

FICHE n° 6. DÉVELOPPEMENTS ET FACTORISATIONS.

I Développements

Théorème 1

La formule de développement. Pour tous réels a , b et c ,

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

Plus généralement, pour tous réels a , b , c et d ,

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d.$$

Par exemple, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned}(3x - 1) \times (2x - 3) &= (3x + (-1))(2x + (-3)) = (3x) \times (2x) + (3x) \times (-3) + (-1) \times 2x + (-1) \times (-3) \\ &= 6x^2 - 9x - 2x + 3 = 6x^2 - 11x + 3.\end{aligned}$$

Théorème 2

Les identités remarquables dans le sens du développement. Pour tous réels a et b ,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Par exemple, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned}(6x + 1)^2 &= (6x)^2 + 2 \times (6x) \times 1 + 1^2 = 36x^2 + 12x + 1. \\ (2x - 3)^2 &= (2x)^2 - 2 \times (2x) \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9. \\ (3x - 4)(3x + 4) &= (3x)^2 - 4^2 = 9x^2 - 16.\end{aligned}$$

A ces identités usuelles, on doit rajouter deux identités remarquables pas vraiment au programme :

Théorème 3

1) Pour tous réels a , b et c ,

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

2) Pour tous réels a et b ,

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

II Factorisations

Théorème 4

La formule de factorisation. Pour tous réels a , b et c ,

$$a \times b + a \times c = a \times (b + c).$$

Par exemple, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned}(2x - 3)(x + 5) - (2x - 3)(-x - 6) &= (2x - 3) \times ((x + 5) - (-x - 6)) = (2x - 3)(x + 5 + x + 6) \\ &= (2x - 3)(2x + 11).\end{aligned}$$

Théoreme 5

Les identités remarquables dans le sens de la factorisation. Pour tous réels a et b ,

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Par exemple, pour tout réel x ,

$$25x^2 + 30x + 9 = (5x)^2 + 2 \times (5x) \times 3 + 3^2 = (5x + 3)^2.$$

$$49x^2 - 28x + 4 = (7x)^2 - 2 \times (7x) \times 2 + 2^2 = (7x - 2)^2.$$

$$x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x - 1)(x + 1).$$