

Planche n° 5. Les symboles Σ et Π

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1. (IT)

(Cet exercice est consacré aux sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique.)

- 1) (*) Calculer $\sum_{i=3}^n i$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, $\sum_{i=1}^n (2i - 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $\sum_{k=4}^{n+1} (3k + 7)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$.
- 2) (*) Calculer le nombre $1, 1111\dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1, \underbrace{11\dots 1}_n$ et le nombre $0, 9999\dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0, \underbrace{99\dots 9}_n$.
- 3) (*) Calculer $\underbrace{1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^{n-1}}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- 4) (*) Calculer $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$.
- 5) (***) Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$.
- 6) (**) On pose $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.
 - a) Calculer la suite $(u_n - 3)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - b) Calculer $\sum_{k=0}^n u_k$.

Exercice n° 2. (IT)

(Cet exercice est consacré aux sommes télescopiques.)

Calculer les sommes suivantes :

- 1) (**) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
- 2) (**) $\sum_{k=0}^n k \times k!$ et $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$
- 3) (***) Calculer $S_p = \sum_{k=1}^n k^p$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ (dans chaque cas, chercher un polynôme P_p de degré $p + 1$ tel que $P_p(x+1) - P_p(x) = x^p$).
- 4) (***) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$. (Indication : calculer $2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) C_n$ (on donne $2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$).

Exercice n° 3. (IT)

Calculer les sommes suivantes :

- 1) (**) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} 1$.
- 2) (**) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} j$ et $\sum_{1 \leq i < j \leq n} j$.
- 3) (*) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$.
- 4) (***) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n (5h^4 - 18h^2k^2 + 5k^4)$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice n° 4. (IT)

1) (*) Calculer $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2) (***) Calculer $\prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k}$, $\alpha \in]0, 2\pi[$, $n \in \mathbb{N}^*$ (indication : on sait que pour tout réel x , $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$.)