Chapitre 5. Séries numériques et vectorielles

Plan du chapitre

Dans ce chapitre, on apporte quelques compléments aux différents résultats énoncés en Maths Sup concernant les séries à termes réels ou complexes. Le programme officiel de Maths Spé prévoit d'effectuer l'étude des séries dans un cadre plus général, à savoir l'étude des séries à termes éléments d'un espace vectoriel normé. Cette étude générale sera effectuée dans le chapitre « Topologie des espaces vectoriels normés ».

1 Sériés numériques (rappels)

1.1 Séries convergentes, séries divergentes

• Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La série de terme général u_n est la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (S_n est la somme partielle de rang n).

La série de terme général u_n converge si et seulement si la suite des sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. La série est dite divergente dans le cas contraire. En cas de convergence, la limite de la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle la somme de la série de terme général u_n et se note $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

• Si la série de terme général u_n converge, il est nécessaire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 est dite grossièrement divergente.

$u_n \to 0$ n'entraine pas le fait que la série de terme général u_n converge. Par exemple, $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ mais la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge.

• Si la série de terme général u_n converge, on peut définir le reste à l'ordre n : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

• La série de terme général u_n est dite absolument convergente si et seulement si la série de terme général $|u_n|$ converge. Si la série de terme général u_n converge absolument, alors la série de terme général u_n converge. La réciproque est fausse. La série harmonique alternée de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \geqslant 1$, est convergente mais non absolument convergente.
Une série convergente mais non absolument convergente est dite semi-convergente.

1.2 Séries de référence

On dispose de deux types de séries de référence.
- Les séries de Riemann : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$, $n \geqslant 1$, converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- Les séries géométriques : pour $q \in \mathbb{C}$, la série de terme général q^n converge si et seulement si $|q| < 1$.

Si $|q| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

1.3 Utilisation des relations de comparaison

• Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **positive** à partir d'un certain rang. Alors la suite des sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang et donc, la série de terme général u_n converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée. En cas de divergence, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

• Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.
- Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n converge.
- Si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n diverge.

• Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives à partir d'un certain rang telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.
- Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n converge.

- Si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n diverge.

Plus généralement, si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite réelle positive à partir d'un certain rang et si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$, alors la convergence de la série de terme général v_n entraine la convergence absolue et donc la convergence de la série de terme général u_n.

• Soient (u_n) une suite réelle positive à partir d'un certain rang et (v_n) une suite réelle strictement positive à partir d'un certain rang telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

- Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n converge.
- Si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n diverge.

Plus généralement, si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite réelle strictement positive à partir d'un certain rang et si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, alors la convergence de la série de terme général v_n entraine la convergence absolue et donc la convergence de la série de terme général u_n.

• Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles strictement positives à partir d'un certain rang telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors, les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n sont de même nature.

L'hypothèse de signe est essentielle sinon le résultat est faux. Plus loin (voir exercice 3), on verra que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont équivalentes mais que la série de terme général u_n converge et la série de terme général v_n diverge. Par contre, le théorème précédent est plus généralement valable pour les suites réelles de signe constant à partir d'un certain rang.

Exercice 1. Nature de la série de terme général :

1) $u_n = 1 - n\ln\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2) $u_n = e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3) $u_n = \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $v_n = \dfrac{e^{inx}}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, (x réel donné).

4) $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution 1.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - n\ln\left(\dfrac{2n\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)}{2n\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)}\right) = 1 - n\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)\right)$ puis

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - n\left(\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}\right) - \left(-\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge (série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$). On en déduit que la série de terme général u_n converge absolument et donc converge.

2)

$$\begin{aligned} u_n = e - e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} &\underset{n\to+\infty}{=} e - e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e - e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e\left(1 - e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} e\left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2n} > 0. \end{aligned}$$

En particulier, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement positive à partir d'un certain rang. De plus, la série de terme général $\dfrac{e}{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge et il en est de même de la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ et $|v_n| = \dfrac{1}{n^2}$. Donc, les deux séries convergent absolument et en particulier convergent.

4) $n^{\frac{3}{2}} \times \dfrac{\ln(n)}{n^2} = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ et donc $\dfrac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

La série de terme général $\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge (série de Riemann d'exposant $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$). On en déduit que la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge absolument et donc converge.

1.4 Propriétés

• Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. Si les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n convergent, alors pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$, la série de terme général $\lambda u_n+\mu v_n$ convergent et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n+\mu v_n)=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\mu\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$.

On peut « séparer » une somme infinie en plusieurs sommes infinies quand chacune des séries convergent. Si ce n'est pas le cas, on ne peut pas et c'est une erreur classique. Par exemple, la série de terme général $u_n=\dfrac{1}{n}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$, converge car

$$\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par contre, les séries de termes généraux respectifs $v_n=\dfrac{1}{n}$ et $w_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ sont divergentes et on ne peut pas écrire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ (cette dernière expression « valant » $+\infty-\infty$). Par contre, on peut écrire pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ (en posant $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$),

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k))\\&=H_n-\ln(n+1).\end{aligned}$$

Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{k}-\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$, $k\in\mathbb{N}^*$, converge, on peut poser $\gamma=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$ (γ est la constante d'Euler) et on obtient $H_n-\ln(n+1)\underset{n\to+\infty}{=}\gamma+o(1)$ puis, en tenant compte de $\ln(n+1)=\ln(n)+\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)+o(1)$,

$$H_n\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n+1)+\gamma+o(1)\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)+\gamma+o(1).$$

• Si $(u_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, la série de terme général u_n converge si et seulement si les séries de termes généraux respectifs $\mathrm{Re}\,(u_n)$ et $\mathrm{Im}\,(u_n)$ convergent et dans ce cas, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Re}\,(u_n)+i\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Im}\,(u_n)$. Ceci fournit plus explicitement $\mathrm{Re}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Re}\,(u_n)$ et $\mathrm{Im}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Im}\,(u_n)$

1.5 Lien suites-séries. Séries télescopiques

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis, pour $n\in\mathbb{N}$, $v_n=u_{n+1}-u_n$. Pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}v_k=\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_{n+1}-u_0\text{ (somme télescopique).}$$

On en déduit que la **suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la **série** de terme général $v_n=u_{n+1}-u_n$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence, en posant $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}v_k=\sum_{k=0}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k)=\ell-u_0\text{ (sériee télescopique).}$$

1.6 Les séries alternées

• On appelle **série alternée** toute série dont le terme général u_n est de la forme $u_n=(-1)^n v_n$ ou $u_n=-(-1)^n v_n$ où la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante, convergente et de limite nulle.

• Critère spécial aux séries alternées : toute série alternée converge.

• Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle alternée en signe dont la valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Si on pose $S=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$ et $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k$, S, S_n et R_n sont du signe de leur premier terme et en valeur absolue majorés par la valeur absolue de leur premier terme. Plus explicitement,

$$\operatorname{sgn}(S)=\operatorname{sgn}(u_0)\text{ et }\forall n\in\mathbb{N},\ \operatorname{sgn}(S_n)=\operatorname{sgn}(u_0)\text{ et }\forall n\in\mathbb{N},\ \operatorname{sgn}(R_n)=\operatorname{sgn}(u_{n+1}).$$

$$|S|\leqslant|u_0|\text{ et }\forall n\in\mathbb{N},\ |S_n|\leqslant|u_0|\text{ et }\forall n\in\mathbb{N},\ |R_n|\leqslant|u_{n+1}|.$$

Exercice 2.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1) Vérifier que u_n est bien défini pour tout entier naturel n.

2) a) Montrer que la série de terme général v_n converge.
b) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

3) a) Préciser le signe de u_n en fonction de n. Que vaut $|u_n|$?
b) Représenter graphiquement les premiers de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.
c) Etudier le sens de variation de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

4) Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Solution 2.

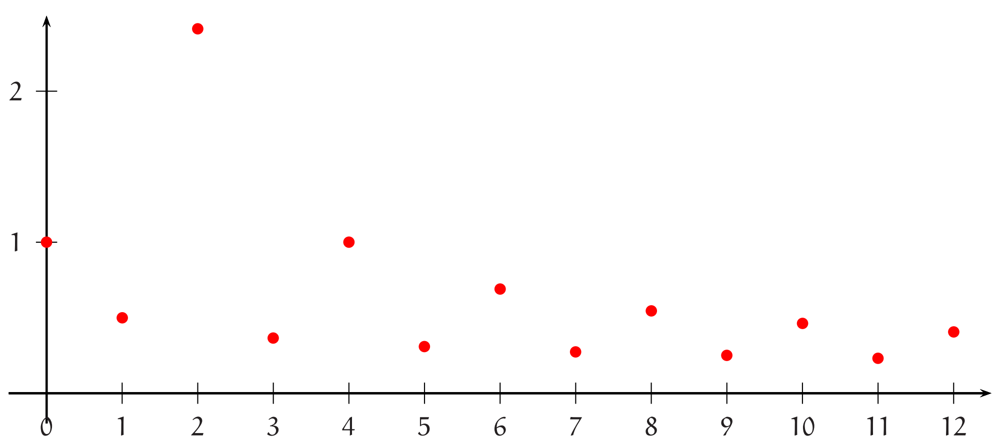
1) $\sqrt{0}+(-1)^{-1}=-1\neq0$, $\sqrt{1}+(-1)^0=2\neq0$. D'autre part, pour $n\geqslant2$, $\sqrt{n}+(-1)^{n-1}\geqslant\sqrt{2}-1>0$. Ceci montre que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sqrt{n}+(-1)^{n-1}\neq0$ et donc que u_n est bien défini pour tout entier naturel n.

2) a) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alternée en signe et sa valeur absolue, à savoir $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, tend vers 0 en décroissant. Donc, la série de terme général v_n, $n\in\mathbb{N}^*$, converge d'après le critère spécial aux séries alternées.

b) $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{=}o(1)$ et donc $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\times\dfrac{1}{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}}\underset{n\to+\infty}{=}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\times\dfrac{1}{1+o(1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

3) a) $u_0=-1<0$. D'autre part, d'après ce qui précède, pour $n\geqslant1$, $\sqrt{n}+(-1)^{n-1}>0$. Donc, pour $n\geqslant1$, le signe de u_n est le signe de $(-1)^n$ ou encore, pour $n\geqslant1$, u_n est strictement positif quand n est pair et strictement négatif quand n est impair. En particulier, $\forall n\geqslant1$, $|u_n|=\dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$.

b) Représentation graphique des premiers termes de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.



c) Il semblerait que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas monotone, ni même monotone à partir d'un certain rang. Tout d'abord, $|u_0|<|u_1|$. En suite, pour $n\geqslant1$

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(|u_{n+1}|-|u_n|) &= \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+(-1)^n}-\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}\right) = \operatorname{sgn}\left(\left(\sqrt{n}+(-1)^{n-1}\right)-\left(\sqrt{n+1}+(-1)^n\right)\right)\\ &= \operatorname{sgn}\left(-\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+2(-1)^{n-1}\right).\end{aligned}$$

• Si n est pair et supérieur ou égal à 1, posons $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}^*$. On a $\operatorname{sgn}(|u_{2p+1}|-|u_{2p}|) = \operatorname{sgn}\left(-\sqrt{2p+1}+\sqrt{2p}-2\right)$ avec

$$\left(-\sqrt{2p+1}+\sqrt{2p}\right)-2<0.$$

Donc, $\forall p \geqslant 1$, $|u_{2p+1}|-|u_{2p}| < 0$.

• Si n est impair et supérieur ou égal à 1, posons $n = 2p-1$ où $p \in \mathbb{N}^*$. On a $\operatorname{sgn}(|u_{2p}|-|u_{2p-1}|) = \operatorname{sgn}\left(-\sqrt{2p}+\sqrt{2p-1}+2\right)$ avec

$$-\sqrt{2p}+\sqrt{2p-1}+2 = -\frac{1}{\sqrt{2p}+\sqrt{2p-1}}+2 \geqslant 2-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} \geqslant 2-1 = 1 > 0.$$

Donc, $\forall p \geqslant 1$, $|u_{2p}|-|u_{2p-1}| > 0$.

La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone, ni même monotone à partir d'un certain rang.

4) Quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = v_n+w_n+t_n,\end{aligned}$$

en posant pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{1}{n}$ et $t_n = O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

• La série de terme général v_n converge d'après 2).
• La série de terme général w_n diverge (série harmonique).
• La série de terme général $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann d'exposant $\dfrac{3}{2} > 1$). Donc, la série de terme général t_n converge absolument et en particulier converge.

Supposons par l'absurde que la série de terme général u_n converge. Alors, la série de terme général $w_n = u_n - v_n - t_n$ converge ce qui est faux. Donc, la série de terme général u_n diverge.

1.7 Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

• Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes.
Le **produit de Cauchy** des séries de termes généraux respectifs u_n et v_n **est la série** de terme général w_n où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

• Si les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n convergent **absolument**, alors le produit de Cauchy de ces deux séries converge et a pour somme $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$. Plus explicitement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Le produit de Cauchy de deux séries **absolument** convergentes est une série convergente.
L'exercice ci-dessous montre qu'on ne peut pas élargir l'hypothèse aux séries convergentes.
Le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.

Exercice 3. Analyser la convergence du produit de Cauchy de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $n \geqslant 1$, par elle-même.

Solution 5. $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ est alterné en signe et sa valeur absolue, à savoir $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, tend vers 0 en décroissant (à partir du rang 1). Donc la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

D'autre part, la série de terme général $\left|\dfrac{-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geqslant 1$, est divergente (série de Riemann d'exposant $\dfrac{1}{2} \leqslant 1$).

La série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $n \geqslant 1$, est donc une série semi-convergente.

Pour $n \geqslant 0$, posons $u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \text{ si } n \geqslant 1 \end{cases}$ de sorte que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Le terme général du produit de Cauchy de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $n \geqslant 1$, par elle-même est $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.

On a $v_0 = v_1 = 0$ et pour $n \geqslant 2$,

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \times \frac{(-1)^{n-k-1}}{\sqrt{n-k}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}.$$

Soit $n \geqslant 2$. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $k(n-k) = -k^2 + nk = -\left(k - \dfrac{n}{2}\right)^2 + \dfrac{n^2}{4} \leqslant \dfrac{n^2}{4}$ et donc

$$|v_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2/4}} = \frac{2(n-1)}{n} = 2 - \frac{2}{n} \geqslant 2 - \frac{2}{2} = 1.$$

Ceci montre que v_n ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc que la série de terme général v_n diverge grossièrement. Ainsi, le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.

---

2 Compléments sur les séries numériques

2.1 La règle de d'Alembert

Théorème 1. (règle de d'Alembert)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

On suppose que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ admet pour limite un certain ℓ élément de $[0, +\infty]$ quand n tend vers $+\infty$. Alors

- Si $0 \leqslant \ell < 1$, la série de terme général u_n converge absolument ;
- Si $\ell > 1$, la série de terme général u_n diverge grossièrement ;
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien en conclure.

Démonstration . Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \neq 0$.

1er cas. Supposons que $\ell \in]1, +\infty]$. Il existe alors un rang $n_1 \geqslant n_0$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1$ ou encore $|u_{n+1}| \geqslant |u_n|$. Ainsi, la suite $(|u_n|)$ croît à partir du rang n_1 et en particulier,

$$\forall n \geqslant n_1,\ |u_n| \geqslant |u_{n_1}| \text{ avec } |u_{n_1}| > 0.$$

Ceci montre que u_n ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc que la série de terme général u_n est grossièrement divergente.

2ème cas. Supposons que $\ell \in [0, 1[$. Il existe un rang $n_1 \geqslant n_0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \dfrac{1+\ell}{2}$. Pour $n \geqslant n_1 + 1$,

$$\begin{aligned}|u_n| &= \left|u_{n_1} \times \prod_{k=n_1}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = |u_{n_1}| \prod_{k=n_1}^{n-1} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \leqslant |u_{n_1}| \prod_{k=n_1}^{n-1} \left(\frac{1+\ell}{2}\right) \\ &= |u_{n_1}| \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_1} = \frac{|u_{n_1}|}{\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n_1}} \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

Maintenant, $0 < \dfrac{1+\ell}{2} < \dfrac{1+1}{2} = 1$ et donc $\dfrac{|u_{n_1}|}{\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n_1}} \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente et on en déduit que la série de terme général u_n converge absolument.

Le cas $\ell = 1$ est analysé dans le commentaire 2 ci-dessous.

❏

⇛ **Commentaire** . *Dans la pratique, on utilise peu la règle de d'*Alembert *pour les séries numériques. Elle ne s'utilise que dans le cas de suites au comportement à l'infini caricatural comme les suites géométriques et définies avec beaucoup de produits. La règle de d'*Alembert *est introduite en maths spé principalement pour l'étude des « séries entières », chapitre dans lequel elle sera bien davantage utilisée.*

*On peut par exemple être tenté d'utiliser la règle de d'*Alembert *pour* $u_n = \dfrac{n+1}{2^n}$*. La suite* (u_n) *ne s'annule pas et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{n+2}{n+1} \times \dfrac{2^n}{2^{n+1}} = \dfrac{n+1}{2n}$*. Ainsi,* $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ *tend vers* $\dfrac{1}{2} \in [0,1[$ *et la règle de d'*Alembert *permet d'affirmer que la série de terme général* $\dfrac{n+1}{2^n}$ *converge absolument.*

Mais tout ceci est maladroit : $n^2u_n \sim \dfrac{n^4}{2^n} = o(1)$ *d'après un théorème de croissances comparées et donc* $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$*. On voit donc tout de suite que la série de terme général* $\dfrac{n+1}{2^n}$ *converge.*

Un exemple typique d'utilisation de la règle de d'Alembert est fournie par l'exercice suivant :

Exercice 4. Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{3^{2n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Solution 4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}/3^{2(n+1)}}{\binom{2n}{n}/3^{2n}} = \frac{3^{2n}}{3^{2n+2}} \times \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{n!^2}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{9(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{9(n+1)}.$$

$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ tend vers $\dfrac{4}{9} \in [0,1[$ et donc la série de terme général $\dfrac{\binom{2n}{n}}{3^{2n}}$ converge d'après la règle de d'Alembert.

⇛ **Commentaire** .

⋄ *(analyse du cas* $\ell = 1$*)*

Si $u_n = n^{10}$*, alors* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ *et si* $v_n = n^{-10}$*, alors* $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-10} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$*. Les séries de termes généraux respectifs* u_n *et* v_n *sont respectivement divergentes et convergentes. Ceci montre déjà que dans le cas critique* $\ell = 1$*, on ne peut rien conclure de l'étude de* $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ *et on doit essayer autre chose.*

En fait, de manière générale, si $u_n = n^\alpha$*, alors* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\to} 1$*. Cette constatation montre la médiocrité de la règle de d'*Alembert*. Son champ d'application est très réduit. La règle de d'*Alembert *ne s'utilise que pour des suites qui sont « dans l'idée » d'une suite géométrique de raison différente de* 1 *comme* $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ *ou* (2^n)*. On redit ici que cette règle sera beaucoup plus utilisée dans un cadre particulier, celui des séries entières.*

◇ *Pour pouvoir utiliser la règle de d'Alembert, il est essentiel que la suite* (u_n) *ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On ne cherchera donc pas à l'utiliser directement pour* $u_n = \dfrac{1}{2^n}\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ *ou* $u_n = \dfrac{(1+(-1)^n)\dbinom{2n}{n}}{3^{2n}}$.

Exercice 5. (règle de RAABE-DUHAMEL)

Soit (u_n) une suite réelle strictement positive. On suppose qu'il existe un réel α tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Montrer qu'il existe un réel strictement positif K tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{n^\alpha}$ (considérer $w_n = \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ où $v_n = n^\alpha u_n$).

Application 1. Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{\dbinom{2n}{n}}{2^{2n}}$.

Application 2. Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{n!}$, a réel strictement positif donné.

Solution 5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $v_n = n^\alpha u_n$ puis $w_n = \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\alpha \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Par suite,

$$\begin{aligned}
w_n &= \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \alpha\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que la série de terme général $w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$ converge. On sait qu'il en est de même de la suite $(\ln(v_n))$. Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(v_n)$ puis $K = e^\ell$.

Puisque $n^\alpha u_n = v_n = e^{\ln(v_n)}$, $n^\alpha u_n$ tend vers K quand n tend vers $+\infty$ ou encore $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} K$ puisque K est un réel strictement positif et finalement

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n^\alpha}.$$

Application 1. La suite (u_n) est strictement positive. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} \times \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{n!^2}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

D'après la règle de RAABE-DUHAMEL, il existe $K > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{\sqrt{n}}$. La série de terme général u_n diverge.

Application 2. La suite (u_n) est strictement positive. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)(a+n)}{a(a+1)\dots(a+n-1)} \times \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n+a}{n+1}.$$

Par suite,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} \left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{1-a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

D'après la règle de RAABE-DUHAMEL, il existe $K>0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n^{1-a}}$. Puisque $1-a<1$, la série de terme général u_n diverge.

2.2 Théorèmes de sommation des relations de comparaison

Théorème 2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ (resp. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$).

- Si la série de terme général v_n converge alors la série de terme général u_n converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right) \ (\text{resp. } \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)).$$

- Si la série de terme général u_n diverge alors la série de terme général v_n diverge et

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) \ (\text{resp. } \sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)).$$

DÉMONSTRATION .

• Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et que la série de terme général v_n converge. On sait que la série de terme général u_n converge et donc les restes à l'ordre n $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ sont bien définis pour tout entier naturel n.

Soit $\varepsilon>0$. Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $k\geqslant n_0$, $0\leqslant u_k\leqslant \varepsilon v_k$. Soit $n\geqslant n_0$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$0\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

On a montré que $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}/\ \forall n\in\mathbb{N},\left(n\geqslant n_0 \Rightarrow 0\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\leqslant \varepsilon\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$ et donc que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right).$$

• Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et que la série de terme général u_n diverge. On sait que la série de terme général v_n diverge et donc les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\sum_{k=0}^{n} v_k$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Soit $\varepsilon>0$. Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, il existe $n_1\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k\geqslant n_1$, $0\leqslant u_k\leqslant \frac{\varepsilon}{2}v_k$. Soit $n\geqslant n_1$.

$$0\leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_1-1} u_k + \sum_{k=n_1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_1-1} u_k + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=n_1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_1-1} u_k + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Ainsi, pour tout $n\geqslant n_1$, $0\leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_1-1} u_k + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k$. Maintenant, $\sum_{k=0}^{n} v_k$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Donc, il existe $n_0\geqslant n_1$ tel que, pour $n\geqslant n_0$, $\sum_{k=0}^{n} v_k \geqslant \frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{n_1-1} u_k$ et donc $\sum_{k=0}^{n_1-1} u_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k$. Pour $n\geqslant n_0$, on a

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k = \varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k\right)$ et donc que

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right).$$

• Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et que la série de terme général v_n converge. On sait que la série de terme général u_n converge et donc les restes à l'ordre n $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ sont bien définis pour tout entier naturel n.

Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $M \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que pour tout $k \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_k \leqslant M v_k$. Soit $n \geqslant n_0$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant M \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

On a montré que $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \exists M \in \mathbb{R}^{+*}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant M \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$ et donc que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right).$$

• Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et que la série de terme général u_n diverge. On sait que la série de terme général v_n diverge et donc les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\sum_{k=0}^{n} v_k$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$, il existe $M \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que pour tout $k \geqslant n_1$, $0 \leqslant u_k \leqslant \frac{M}{2} v_k$. Soit $n \geqslant n_1$.

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_1-1} u_k + \sum_{k=n_1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_1-1} u_k + \frac{M}{2}\sum_{k=n_1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_1-1} u_k + \frac{M}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant n_1$, $0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_1-1} u_k + \frac{M}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k$. Maintenant, $\sum_{k=0}^{n} v_k$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Donc, il existe $n_0 \geqslant n_1$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $\sum_{k=0}^{n} v_k \geqslant \frac{2}{M}\sum_{k=0}^{n_1-1} u_k$ et donc $\sum_{k=0}^{n_1-1} u_k \leqslant \frac{M}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k$. Pour $n \geqslant n_0$, on a

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \frac{M}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k + \frac{M}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k = M \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

On a montré que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists M \in]0,+\infty[/\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant M \sum_{k=0}^{n} v_k\right)$ et donc que

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right).$$

❏

Théorème 3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

• Si la série de terme général u_n converge alors la série de terme général v_n converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

• Si la série de terme général u_n diverge alors la série de terme général v_n diverge et

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

$\Rightarrow$ **Commentaire** .

$\diamond$ *Dans la situation ci-dessus, on a l'habitude de dire que, en cas de convergence, les restes à l'ordre* n *sont des infiniment petits équivalents et que, en cas de divergence, les sommes partielles sont des infiniment grands équivalents.*

$\diamond$ *Les théorèmes 2 et 3 restent plus généralement valables pour les suites réelles de signe constant à partir d'un certain rang.*

Démonstration . On peut déduire immédiatement le théorème 3 du théorème 2 à partir de : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$. Nous ferons néanmoins une démonstration explicite et autonome car sa restitution peut être l'objet d'un problème d'écrit.

• Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et que la série de terme général u_n converge. On sait que la série de terme général v_n converge et donc les restes à l'ordre n $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ sont bien définis pour tout entier naturel n.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant n_0$, $|u_k - v_k| \leqslant \varepsilon u_k$. Soit $n \geqslant n_0$.

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k - v_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}$, $\left(n \geqslant n_0 \Rightarrow \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right)$ et donc que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

• Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et que la série de terme général u_n diverge. On sait que la série de terme général v_n diverge et donc les sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \geqslant n_1$, $|u_k - v_k| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} u_k$. Soit $n \geqslant n_1$.

$$\begin{aligned}
|U_n - V_n| &= \left|\sum_{k=0}^{n_1-1} (u_k - v_k) + \sum_{k=n_1}^{n} (u_k - v_k)\right| \leqslant |U_{n_1-1} - V_{n_1-1}| + \sum_{k=n_1}^{n} |u_k - v_k| \\
&\leqslant |U_{n_1-1} - V_{n_1-1}| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=n_1}^{n} u_k \leqslant |U_{n_1-1} - V_{n_1-1}| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= |U_{n_1-1} - V_{n_1-1}| + \frac{\varepsilon}{2} U_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant n_1$, $|U_n - V_n| \leqslant |U_{n_1-1} - V_{n_1-1}| + \dfrac{\varepsilon}{2} U_n$. Maintenant, U_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Donc, il existe $n_0 \geqslant n_1$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $U_n \geqslant \dfrac{2}{\varepsilon} |U_{n_1-1} - V_{n_1-1}|$ et donc $|U_{n_1-1} - V_{n_1-1}| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} U_n$. Pour $n \geqslant n_0$, on a

$$|U_n - V_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} U_n + \frac{\varepsilon}{2} U_n = \varepsilon U_n.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \Rightarrow |U_n - V_n| \leqslant \varepsilon U_n)$ et donc que

$$U_n - V_n \underset{n\to+\infty}{=} o(U_n) \text{ ou encore } U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n.$$

❏

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = n \ln n$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= (n+1)\ln(n+1) - n \ln n = \ln(n+1) + n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + n O\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + O(1) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.
\end{aligned}$$

La règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes permet d'écrire

$$\begin{aligned}\ln(n!) &= \sum_{k=1}^{n}\ln(k)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}-u_k) = u_{n+1}-u_1 = (n+1)\ln(n+1)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n.\end{aligned}$$

Donc, $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n$. Cette équivalence est le point de départ de la formule de Stirling.

Exercice 6. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ puis déterminer un équivalent de $\displaystyle\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\right)-\frac{1}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Solution 6. Pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$ et d'autre part, la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge.
Puisque $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$, la règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes permet d'écrire

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\\ &= \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)\\ &= \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

On a montré que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Ensuite, pour $n \geqslant 2$,

$$\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\right)-\frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)} = -\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2(k-1)}.$$

Pour $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n^2(n-1)} \geqslant 0$ et d'autre part, la série de terme général $\dfrac{1}{n^2(n-1)}$ converge.
Puisque $\dfrac{1}{n^2(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n+1)n(n-1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n(n-1)}-\dfrac{1}{(n+1)n}\right)$, la règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes permet d'écrire

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2(k-1)} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k(k-1)}-\frac{1}{(k+1)k}\right)\\ &= \frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{k(k-1)}-\frac{1}{(k+1)k}\right)\right) = \frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{N(N+1)}\right) = \frac{1}{2n(n+1)}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\right)-\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$ ou encore

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

On note que le théorème 3 nous permet de retrouver le théorème de CESARO dans le cas particulier des suites réelles de signe constant à partir d'un certain rang. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell \in \mathbb{R}$. Alors, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ (on rappelle que ce résultat est en fait vrai pour une suite complexe quelconque).

En effet, si $\ell \neq 0$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$ et puisque la série de terme général $v_n = \ell$ diverge,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} \ell = (n+1)\ell$$

puis $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.
Si $\ell = 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ et puisque la série de terme général $v_n = 1$ diverge,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) \underset{n\to+\infty}{=} o(n+1)$$

puis $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$.

2.3 Comparaison séries-intégrales

Ce sujet sera traité dans le chapitre « Intégration sur un intervalle quelconque ».

3 Séries vectorielles

Nous allons (brièvement) généraliser tout ce qui précède aux séries à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. On rappelle qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et que quand N et N' sont deux normes équivalentes, une suite converge vers un élément ℓ pour la norme N si et seulement si elle converge vers ℓ pour N'. Dans ce qui suit, nous pourrons donc choisir une norme adaptée à chaque situation.

3.1 Séries convergentes, séries divergentes

DÉFINITION 1. Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

La série de terme général u_n converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

En cas de convergence, la limite de la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ se note $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la somme de la série de terme général u_n.

Enfin, si pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, S_n est la somme partielle de rang n de la série de terme général u_n.

Si la série n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Exemple. On suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie. $\mathscr{L}(E)$ est donc également un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie.
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ puis $f = \lambda \mathrm{Id}_E$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n!}f^n$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda^k\right) \mathrm{Id}_E.$$

Quand n tend vers $+\infty$ (quelque soit le choix de la norme sur $\mathscr{L}(E)$), la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'endomorphisme $e^{\lambda}\mathrm{Id}_E$. Dit autrement, la série d'endomorphismes de terme général $u_n = \dfrac{1}{n!}f^n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}f^n = e^{\lambda}\mathrm{Id}_E.$$

❑

Théorème 4. Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

Si la série de terme général u_n converge, **alors** $u_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$.

Démonstration. Posons $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - S_{n-1}$ et donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} S - S = 0.$$

❑

Théorème 5. Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Si les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n convergent, **alors** la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ converge. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu\sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Par suite, l'ensemble E des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série de terme général u_n converge est un sous-espace vectoriel de $\left(E^{\mathbb{N}}, +, .\right)$ et l'application $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une forme linéaire sur E.

Démonstration. $\left(\sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k + \mu v_k)\right)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}} + \mu\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente en tant que combinaison linéaire de suites convergentes. De plus,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda u_k + \mu v_k) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k + \mu v_k)\right) = \lambda\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + \mu\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \lambda\sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu\sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

❑

Etudier la convergence d'une série d'éléments d'un espace vectoriel vectoriel de dimension finie peut se faire en étudiant la convergence des séries coordonnées dans une base donnée :

Théorème 6. Soient $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie non nulle p puis $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{i=1}^{p} u_n^{(i)} e_i$.

La série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge (dans E) si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la série de terme général $u_n^{(i)}$, $n \in \mathbb{N}$, converge (dans $\mathbb{K}$). De plus, en cas de convergence,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(i)}\right) e_i.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ puis pour $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![1, p]\!]$, on pose $U_n^{(i)} = \sum_{k=0}^{n} u_k^{(i)}$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sum_{i=1}^{p} U_n^{(i)} e_i$.

On sait que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si chaque suite coordonnée $\left(U_n^{(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $i \in [\![1, p]\!]$, converge. Dit autrement, la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge si et seulement si pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la série numérique de terme général $u_n^{(i)}$ converge.

De plus, en cas de convergence, par linéarité,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(i)}\right) e_i.$$

❑

Par exemple, dans $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, la série de terme général $X_n = \begin{pmatrix} 1/n! \\ 1/2^n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$, converge et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} 1/n! \\ 1/2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3.2 Lien suites-séries. Séries télescopiques

On a une généralisation à l'identique du résultat déjà connu pour les séries numériques. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$ (somme télescopique), on obtient :

Théorème 7. Soient $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$, $n \in \mathbb{N}$, sont de même nature. De plus, en cas de convergence, en posant $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell - u_0 \text{ (série télescopique).}$$

3.3 Séries absolument convergentes

Nous allons généraliser la notion de séries absolument convergentes à $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la distance entre deux nombres x et y est $|y-x|$. Quand on généralise, la valeur absolue $| \ |$ est remplacée par la norme $\| \ \|$: pour $(x, y) \in E^2$, la distance de x à y est $\|x - y\|$. D'où la définition :

Définition 2. Soit $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

La série de terme général u_n converge absolument si et seulement si la série de terme général $\|u_n\|$, $n \in \mathbb{N}$ converge.

On a alors

Théorème 8. Soient $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

Si la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument, **alors** la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge.

Démonstration. On suppose $p = \dim(E) \geqslant 1$. On fixe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E. On munit E de la norme infinie associée à cette base : $\forall x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i e_i \in E$, $\|x\|_\infty = \text{Max}\{|x_i|,\ i \in [\![1, p]\!]\}$ ($\| \ \|_\infty$ est équivalente à $\| \ \|$).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument. Donc, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|_\infty < +\infty$.

Mais alors, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ (avec les notations du théorème 6),

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|u_n^{(i)}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|_\infty < +\infty.$$

Ainsi, chaque série coordonnée converge absolument et donc converge. Mais alors, la série de terme général u_n converge d'après le théorème 6.

❑

⇛ **Commentaire**. *On peut montrer que le théorème 8 devient faux si E est de dimension infinie.*

Exercice 7. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{p!}A^p$, $p \in \mathbb{N}$, converge.

Solution 7. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative $\| \ \|$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\left\|\frac{1}{p!}A^p\right\| = \frac{1}{p!}\|A^p\| \leqslant \frac{\|A\|^p}{p!}.$$

La série numérique de terme général $\dfrac{\|A\|^p}{p!}$, $p \in \mathbb{N}$, converge (et a pour somme $e^{\|A\|}$). Il en est de même de la série numérique de terme général $\left\|\dfrac{1}{p!}A^p\right\|$, $p \in \mathbb{N}$. Ainsi, la série de matrices de terme général $\dfrac{1}{p!}A^p$, $p \in \mathbb{N}$, est absolument convergente et donc convergente (car $\mathscr{M}_n(\mathbb{C}$ est de dimension finie).