Planche n° 5. Réduction. Corrigé

Exercice n° 1

1ère solution. $A = 2J - I_3$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $J^2 = 3J$ et plus généralement $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $J^k = 3^{k-1}J$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque les matrices $2J$ et $-I$ commutent, la formule du binôme de Newton permet d'écrire

$$\begin{aligned} A^n &= (2J - I_3)^n = (-I_3)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (2J)^k (-I_3)^{n-k} = (-1)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{k-1} (-1)^{n-k}\right) J \\ &= (-1)^n I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 6^k (-1)^{n-k}\right) J = (-1)^n I_3 + \frac{1}{3}\left((6-1)^n - (-1)^n\right) J \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$.

Soit de nouveau $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} &\left((-1)^n I_3 + \frac{1}{3}\left(5^n - (-1)^n\right) J\right) \times \left((-1)^{-n} I_3 + \frac{1}{3}\left(5^{-n} - (-1)^{-n}\right) J\right) \\ &\qquad = I_3 + \frac{1}{3}\left((-5)^n - 1 + (-5)^{-n} - 1\right) J + \frac{1}{9}\left(1 - (-5)^n - (-5)^{-n} + 1\right) J^2 \\ &\qquad = I_3 + \frac{1}{3}\left((-5)^n - 1 + (-5)^{-n} - 1\right) J + \frac{3}{9}\left(1 - (-5)^n - (-5)^{-n} + 1\right) J = I_3, \end{aligned}$$

et donc A^n est inversible et

$$A^{-n} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^{-n} + 2(-1)^{-n} & 5^{-n} - (-1)^{-n} & 5^{-n} - (-1)^{-n} \\ 5^{-n} - (-1)^{-n} & 5^{-n} + 2(-1)^{-n} & 5^{-n} - (-1)^{-n} \\ 5^{-n} - (-1)^{-n} & 5^{-n} - (-1)^{-n} & 5^{-n} + 2(-1)^{-n} \end{pmatrix}.$$

Finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}}.$$

2ème solution. Puisque $\text{rg}(A+I) = 1$, $\dim(\text{Ker}(A+I)) = 2$ et -1 est valeur propre de A d'ordre au moins 2. La troisième valeur propre λ est fournie par la trace : $\lambda - 1 - 1 = 3$ et donc $\lambda = 5$. Par suite, $\chi_A = (X+1)^2(X-5)$. On note que 0 n'est pas valeur propre de A et donc A est inversible.

De plus, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow x + y + z = 0$ et donc $E_{-1} = \text{Vect}(e_1, e_2)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

De même, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_5 \Leftrightarrow x = y = z$ et $E_5 = \text{Vect}(e_3)$ où $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(-1, -1, 5)$ et on a $A = PDP^{-1}$.

Calcul de P^{-1}. Soit (i, j, k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{l} e_1 = i - j \\ e_2 = i - k \\ e_3 = i + j + k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} j = i - e_1 \\ k = i - e_2 \\ e_3 = i + i - e_1 + i - e_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} i = \dfrac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3) \\ j = \dfrac{1}{3}(-2e_1 + e_2 + e_3) \\ k = \dfrac{1}{3}(e_1 - 2e_2 + e_3) \end{array}\right.$$

et donc $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit alors $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
A^n = PD^nP^{-1} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n & 5^n \\ -(-1)^n & 0 & 5^n \\ 0 & -(-1)^n & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n+2(-1)^n & 5^n-(-1)^n & 5^n-(-1)^n \\ 5^n-(-1)^n & 5^n+2(-1)^n & 5^n-(-1)^n \\ 5^n-(-1)^n & 5^n-(-1)^n & 5^n+2(-1)^n \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

et on retrouve le résultat obtenu plus haut, le calcul ayant été mené directement avec n entier relatif.

3ème solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La division euclidienne de X^n par χ_A fournit trois réels a_n, b_n et c_n et un polynôme Q_n tels que $X^n = \chi_A Q_n + a_nX^2 + b_nX + c_n$. En prenant les valeurs des deux membres en 5, puis la valeur des deux membres ainsi que de leurs dérivées en -1, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} 25a_n + 5b_n + c_n = 5^n \\ a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ -2a_n + b_n = n(-1)^{n-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b_n = 2a_n - n(-1)^n \\ 35a_n + c_n = 5n(-1)^n + 5^n \\ -a_n + c_n = -(n-1)(-1)^n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n = \dfrac{1}{36}\left(5^n + (6n-1)(-1)^n\right) \\ c_n = \dfrac{1}{36}\left(5^n + (-30n+35)(-1)^n\right) \\ b_n = \dfrac{1}{36}\left(2\times 5^n + (-24n-2)(-1)^n\right) \end{array}\right. .$$

Le théorème de Cayley-Hamilton fournit alors $A^n = \chi_A(A)Q_n(A) + a_nA^2 + b_nA + c_nI_3 = a_nA^2 + b_nA + c_nI_3$ puis

$$\begin{aligned}
A^n &= \frac{1}{36}\left(\left(5^n + (6n-1)(-1)^n\right)A^2 + 2(5^n - (12n+1)(-1)^n)A + \left(5^n + (-30n+35)(-1)^n\right)I_3\right) \\
&= \frac{1}{36}\left(\left(5^n + (6n-1)(-1)^n\right)\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} + 2\left(5^n - (12n+1)(-1)^n\right)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right. \\
&\left. + \left(5^n + (-30n+35)(-1)^n\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 12\times 5^n + 24(-1)^n & 12\times 5^n - 12(-1)^n & 12\times 5^n - 12(-1)^n \\ 12\times 5^n - 12(-1)^n & 12\times 5^n + 24(-1)^n & 12\times 5^n - 12(-1)^n \\ 12\times 5^n - 12(-1)^n & 12\times 5^n - 12(-1)^n & 12\times 5^n + 24(-1)^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n+2(-1)^n & 5^n-(-1)^n & 5^n-(-1)^n \\ 5^n-(-1)^n & 5^n+2(-1)^n & 5^n-(-1)^n \\ 5^n-(-1)^n & 5^n-(-1)^n & 5^n+2(-1)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On retrouve encore une fois le même résultat mais pour $n \in \mathbb{N}^*$ uniquement.

3ème solution (bis). $\chi_A = (X+1)^2(X-5)$ et donc, ou bien $\mu_A = (X+1)^2(X-5)$, ou bien $\mu_A = (X+1)(X-5)$. De plus, $(A+I_3)(A-5I_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = 0_3$. Donc, $\mu_A = (X+1)(X-5)$. La division euclidienne de X^n par μ_A fournit deux réels a_n et b_n et un polynôme Q_n tels que $X^n = \mu_AQ_n + a_nX + b_n$. En prenant les valeurs des deux membres en 1 et 5, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} 5a_n + b_n = 5^n \\ -a_n + b_n = (-1)^n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6a_n = 5^n - (-1)^n \\ 6b_n = 5^n + 5(-1)n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n = \dfrac{1}{6}\left(5^n - (-1)^n\right) \\ b_n = \dfrac{1}{6}\left(5^n + 5(-1)^n\right) \end{array}\right. .$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
A_n &= \mu_A(A)Q_n(A) + a_nA + b_nI_3 = a_nA + b_nI_3 \\
&= \frac{1}{6}\left(\left(5^n - (-1)^n\right)A + \left(5^n + 5(-1)n\right)I_3\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n+2(-1)^n & 5^n-(-1)^n & 5^n-(-1)^n \\ 5^n-(-1)^n & 5^n+2(-1)^n & 5^n-(-1)^n \\ 5^n-(-1)^n & 5^n-(-1)^n & 5^n+2(-1)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercice n° 2

Soit $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Si $X^2 = A$ alors $AX = X^3 = XA$ et donc X et A commutent.
A admet trois valeurs propres réelles et simples à savoir 1, 3 et 4. Donc A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et les sous espaces propres de A sont des droites. X commute avec A et donc laisse stable les trois droites propres de A.
Ainsi, un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1 (ou 3, ou 4) est encore un vecteur propre de X (mais pas nécessairement avec la même valeur propre) puis une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A est également une base de vecteurs propres de X ou encore, si P est une matrice réelle inversible telle que $P^{-1}AP$ soit la matrice diagonale $D_0 = \text{diag}(3, 4, 1)$ alors pour la même matrice P, $P^{-1}XP$ est une matrice diagonale D. De plus

$$X^2 = A \Leftrightarrow PD^2P^{-1} = PD_0P^{-1} \Leftrightarrow D^2 = D_0 \Leftrightarrow D = \text{diag}(\pm\sqrt{3}, \pm 2, \pm 1)$$

ce qui fournit huit solutions deux à opposées. On peut prendre $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'où les solutions

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ -16\sqrt{3}\varepsilon_1 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 5\sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ -8\sqrt{3}\varepsilon_1 + 16\varepsilon_2 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 5(\sqrt{3}\varepsilon_1 - \varepsilon_3)/2 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3$.

Exercice n° 3

1) En développant suivant la dernière colonne, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & -1 & 0 \\ 4 & X+1 & 0 \\ -4 & -8 & X+2 \end{vmatrix} = (X+2)((X-3)(X+1)+4) = (X+2)(X^2-2X+1) = (X+2)(X-1)^2.$$

A diagonalisable $\Rightarrow \dim(\text{Ker}(A - I)) = 2 \Rightarrow \text{rg}(A - I) = 1$ ce qui n'est pas . Donc A n'est pas diagonalisable. De plus, $E_{-2} = \text{Vect}(e_1)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_1 = \text{Vect}(e_2)$ où $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

2) $(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -36 & -36 & 9 \end{pmatrix}$ et donc $\text{Ker}(A - I)^2$ est le plan d'équation $-36x - 36y + 9z = 0$ ou encore $4x + 4y - z = 0$.

3) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A. Le théorème de Cayley-Hamilton et le théorème de décomposition des noyaux permettent d'affirmer

$$\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \text{Ker}(A + 2I) \oplus \text{Ker}\left((A - I)^2\right).$$

De plus, chacun des sous-espaces $\text{Ker}(A + 2I)$ et $\text{Ker}\left((A - I)^2\right)$ étant stables par f, la matrice de f dans toute base adaptée à cette décomposition est diagonale par blocs. Enfin, $\text{Ker}(A - I)$ est une droite vectorielle contenue dans le plan $\text{Ker}\left((A - I)^2\right)$ et en choisissant une base de $\text{Ker}\left((A - I)^2\right)$ dont l'un des deux vecteurs est dans $\text{Ker}(A - I)$, la matrice de f aura la forme voulue.
On a déjà choisi $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ puis on prend $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$. P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On peut déjà affirmer que $P^{-1}AP$ est de la forme $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Plus précisément

$$Ae_3 - e_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = e_2$$

et donc $Ae_3 = e_2 + e_3$ puis

$$\boxed{A = PTP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $T = D + N$ où $D = \text{diag}(-2, 1, 1)$ et $N = E_{2,3}$. On a $ND = E_{2,3}(-2E_{1,1} + E_{2,2} + E_{3,3}) = E_{2,3} = DN$ et $N^2 = 0$. Puisque les matrices D et N commutent, la formule du binôme de Newton permet d'écrire (en tenant compte du fait que $N^k = 0$ pour $k \geqslant 2$),

$$\begin{aligned} T^n &= D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} N = \text{diag}((-2)^n, 1, 1) + n\,\text{diag}((-2)^{n-1}, 1, 1)E_{2,3} = \text{diag}((-2)^n, 1, 1) + nE_{2,3} \\ &= \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} A^n = PT^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & n+1 \\ 0 & -2 & -2n-1 \\ (-2)^n & -4 & -4n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 & n & 0 \\ -4n & -2n+1 & 0 \\ -4(-2)^n - 8n + 4 & -4(-2)^n - 4n + 4 & (-2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & n & 0 \\ -4n & -2n+1 & 0 \\ -4(-2)^n - 8n + 4 & -4(-2)^n - 4n + 4 & (-2)^n \end{pmatrix}.}$$

Exercice n° 4

Soit P un élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. $f(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n + 1$ et de plus, si a est le coefficient de X^{2n} dans P, le coefficient de X^{2n+1} dans $f(P)$ est $2na - 2na = 0$. Donc $f(P)$ est un élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. f est une application de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ dans lui-même.

Soient $(P, Q) \in (\mathbb{R}_{2n}[X])^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= \left(X^2 - 1\right)(\lambda P + \mu Q) - 2nX(\lambda P + \mu Q)' = \lambda\left(\left(X^2 - 1\right)P - 2nXP'\right) + \mu\left(\left(X^2 - 1\right)Q - 2nXQ'\right) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q). \end{aligned}$$

Donc, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

Cherchons maintenant P polynôme non nul et λ réel tels que $f(P) = \lambda P$ ce qui équivaut à

$$\frac{P'}{P} = \frac{2nX + \lambda}{X^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2n + \lambda}{X - 1} + \frac{2n - \lambda}{X + 1}\right).$$

En identifiant à la décomposition en éléments simples classique de $\dfrac{P'}{P}$ (à savoir si $P = K(X - z_1)^{\alpha_1} \dots (X - z_k)^{\alpha_k}$ avec $K \neq 0$ et les z_i deux à deux distincts, alors $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{X - z_i}$), on voit que nécessairement P ne peut admettre pour racines dans $\mathbb{C}$ que -1 et 1 et d'autre part que P est de degré $\alpha_1 + \alpha_2 = \dfrac{1}{2}(2n + \lambda + 2n - \lambda) = 2n$. P est donc nécessairement de la forme

$$P = aP_k \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* \text{ et } P_k = (X - 1)^k (X + 1)^{2n-k} \text{ avec } k \in [\![0, 2n]\!].$$

Réciproquement, chaque P_k est non nul et vérifie

$$\frac{P_k'}{P_k} = \frac{k}{X-1} + \frac{2n-k}{X+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2n+(2k-2n)}{X-1} + \frac{2n-(2k-2n)}{X+1}\right).$$

Donc, pour chaque $k \in [\![0, 2n]\!]$, P_k est vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda_k = 2(k-n)$.
Ainsi, f admet $2n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes, nécessairement simples car $\dim(\mathbb{R}_{2n}[X]) = 2n+1$. f est donc diagonalisable et les sous espaces propres de f sont les droites $\mathrm{Vect}(P_k)$, $0 \leqslant k \leqslant 2n$.

Exercice n° 5

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$

$$\begin{aligned} AP - (X^4 - X)P = (X-1)P &= aX^4 + (b-a)X^3 + (c-b)X^2 + (d-c)X - d \\ &= a(X^4 - X) + (b-a)X^3 + (c-b)X^2 + (a+d-c)X - d. \end{aligned}$$

et donc $AP = (X^4-X)(P+a)+(b-a)X^3+(c-b)X^2+(a+d-c)X-d$ et donc $f(P) = (b-a)X^3+(c-b)X^2+(a+d-c)X-d$.
Par suite, f est un endomorphisme de E et la matrice de f dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de E est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

puis

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} X+1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & X+1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & X+1 \end{vmatrix} = (X+1)\begin{vmatrix} X+1 & 0 & -1 \\ -1 & X+1 & 0 \\ 0 & -1 & X+1 \end{vmatrix} \\ &= (X+1)((X+1)^3 - 1) = X(X+1)(X^2+3X+3). \end{aligned}$$

A admet quatre valeurs propres simples dans $\mathbb{C}$, deux réelles 0 et -1 et deux non réelles $-1+j$ et $-1+j^2$. χ_f n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et donc f n'est pas diagonalisable.

- Soit $P \in E$. $P \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow b - a = c - b = a + d - c = -d = 0 \Leftrightarrow a = b = c$ et $d = 0$. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(X^3 + X^2 + X)$.
- Soit $P \in E$. $P \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \Leftrightarrow b = c = a + d = 0 \Leftrightarrow b = c = 0$ et $d = -a$. $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(X^3 - 1)$.
- D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) = 4 - 1 = 3$ et immédiatement $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(X-1, X^2-X, X^3-X^2)$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on peut continuer :
$P \in \mathrm{Ker}(f + (1-j)\mathrm{Id}) \Leftrightarrow b - ja = c - jb = a + d - jc = -jd = 0 \Leftrightarrow b = ja,\ c = j^2a$ et $d = 0$.
Donc $\mathrm{Ker}(f + (1-j)\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\left(X^3 + jX^2 + j^2X\right)$ et en conjuguant $\mathrm{Ker}(f + (1-j^2)\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(X^3 + j^2X^2 + jX)$.

Remarque. $B = X(X-1)(X-j)(X-j^2)$ et on a trouvé pour base de vecteurs propres les quatre polynômes de Lagrange $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ puis $X^3 + X^2 + X = X(X-j)(X-j^2)$ puis $X^3 + jX^2 + j^2X = X(X-1)(X-j^2)$ et enfin $X^3+j^2X^2+jX = X(X-1)(X-j)$. C'est une généralité. On peut montrer que si $E = \mathbb{C}_n[X]$ et si B a $n+1$ racines deux à deux distinctes dans $\mathbb{C}$ alors f est diagonalisable et une base de vecteurs propres est fournie par les polynômes de Lagrange associés aux racines de B et ceci pour un polynôme A quelconque.

Exercice n° 6

Si $p = q$, le résultat est connu : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
Supposons par exemple $p < q$. On se ramène au cas de matrices carrées en complétant. Soient $A' = \begin{pmatrix} A \\ 0_{q-p,q} \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} B & 0_{q,q-p} \end{pmatrix}$. A' et B' sont des matrices carrées de format q et $A'B'$ et $B'A'$ ont même polynôme caractéristique.
Un calcul par blocs donne $B'A' = BA$ et $A'B' = \begin{pmatrix} A \\ 0_{q-p,q} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & 0_{q,q-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & 0_{p,q-p} \\ 0_{q-p,p} & 0_{q-p,q-p} \end{pmatrix}$.
Un calcul de déterminant par blocs fournit $\chi_{BA} = X^{q-p}\,\chi_{AB}$ ou encore, avec une écriture plus symétrique, $X^p\,\chi_{BA} = X^q\,\chi_{AB}$, ce qui est vrai dans tous les cas.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K}),\ X^p\,\chi_{BA} = X^q\,\chi_{AB}.}$$

Exercice n° 7

Si u est inversible,

$$\det(u+v)=\det(u)\Leftrightarrow \det u\times\det\left(\mathrm{Id}+u^{-1}v\right)=\det(u)\Leftrightarrow \det\left(\mathrm{Id}+u^{-1}v\right)=1.$$

u et v commutent et donc u^{-1} et v également car $uv=vu\Rightarrow u^{-1}uvu^{-1}=u^{-1}vuu^{-1}\Rightarrow vu^{-1}=u^{-1}v$. Mais alors, puisque v est nilpotent, l'endomorphisme $w=u^{-1}v$ l'est également (car, si $v^p=0$, alors $(u^{-1}v)^p=u^{-p}v^p$).
Il reste donc à calculer $\det(\mathrm{Id}+w)$ où w est un endomorphisme nilpotent. On remarque que $\det(\mathrm{Id}+w)=(-1)^n\chi_w(-1)$.
Il est connu que 0 est l'unique valeur propre d'un endomorphisme nilpotent et donc $\chi_w=X^n$ puis

$$\det(\mathrm{Id}+w)=(-1)^n\chi_w(-1)=(-1)^n(-1)^n=1.$$

Le résultat est donc démontré dans le cas où u est inversible. Si u n'est pas inversible, $u+x\mathrm{Id}$ est inversible sauf pour un nombre fini de valeurs de x et commute toujours avec v. Donc, pour tout x sauf peut-être pour un nombre fini, $\det(u+x\mathrm{Id}+v)=\det(u+x\mathrm{Id})$. Ces deux polynômes coïncident en une infinité de valeurs de x et sont donc égaux. Ils prennent en particulier la même valeur en 0 ce qui refournit $\det(u+v)=\det u$.

Exercice n° 8

• Si A est nilpotente, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, A^k est nilpotente et donc 0 est l'unique valeur propre dans $\mathbb{C}$ de A^k. Par suite, $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\mathrm{Tr}(A^k)=0$.
• Réciproquement , supposons que $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\mathrm{Tr}(A^k)=0$ et montrons alors que toutes les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ sont nulles. Ceci montrera que le polynôme caractéristique de A est X^n et donc que A est nilpotente d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

Soient λ_1,..., λ_n les n valeurs propres (distinctes ou confondues) de A dans $\mathbb{C}$. Pour $k\in[\![1,n]\!]$, on pose $S_k=\lambda_1^k+\ldots+\lambda_n^k$.
Il s'agit de montrer que : $(\forall k\in[\![1,n]\!],\ S_k=0)\Rightarrow(\forall j\in[\![1,n]\!],\ \lambda_j=0)$.

Les S_k, $1\leqslant k\leqslant n$, sont tous nuls et par combinaisons linéaires de ces égalités, on en déduit que pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n et s'annulant en 0, on a $P(\lambda_k)=0$ (1). Il s'agit alors de bien choisir le polynôme P.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Soient μ_1,..., μ_p les valeurs propres deux à deux distinctes de A $(1\leqslant p\leqslant n)$. On prend $P=X\displaystyle\prod_{j\neq i}(X-\mu_j)$ si $p\geqslant 2$ et $P=X$ si $p=1$. P est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à n et s'annule en 0. L'égalité $P(\mu_i)=0$ fournit $\mu_i=0$ ce qu'il fallait démontrer.

Exercice n° 9

Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}f^kg-gf^k&=f^kg-f^{k-1}gf+f^{k-1}gf-f^{k-2}gf^2+f^{k-2}gf^2-\ldots-fgf^{k-1}+fgf^{k-1}-gf^k\\&=\sum_{i=0}^{k-1}(f^{k-i}gf^i-f^{k-i-1}gf^{i+1})=\sum_{i=0}^{k-1}f^{k-i-1}(fg-gf)f^i=\sum_{i=0}^{k-1}f^{k-i-1}ff^i\\&=kf^k.\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $k=0$. Ainsi,

$$\boxed{\text{si } fg-gf=f,\text{ alors }\forall k\in\mathbb{N},\ f^kg-gf^k=kf^k\quad(*).}$$

1ère solution. Soit $\varphi:\begin{array}{ccc}\mathscr{L}(E)&\rightarrow&\mathscr{L}(E)\\h&\mapsto&hg-gh\end{array}$. φ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\varphi(f^k)=kf^k$. Si, pour $k\in\mathbb{N}^*$ donné, f^k n'est pas nul, f^k est valeur propre de φ associé à la valeur propre k. Par suite, si aucun des f^k n'est nul, φ admet une infinité de valeurs propres deux à deux distinctes. Ceci est impossible car $\dim(\mathscr{L}(E))<+\infty$. Donc, f est nilpotent.

2ème solution. Les égalités $(*)$ peuvent s'écrire $P(f)g-gP(f)=fP'(f)$, $(**)$, quand P est un polynôme de la forme X^k, $k\in\mathbb{N}$. Par linéarité, l'égalité $(**)$ sont vraies pour tout polynôme P.
En particulier, l'égalité $(**)$ est vraie quand P est μ_f le polynôme minimal de f et donc

$$f\mu_f'(f)=\mu_f(f)g-g\mu_f(f)=0.$$

Le polynôme $X\mu_f'$ est donc un polynôme annulateur de f et on en déduit que le polynôme μ_f divise le polynôme $X\mu_f'$. Plus précisément, si $p\in\mathbb{N}^*$ est le degré de μ_f, les polynômes $p\mu_f$ et $X\mu_f'$ ayant mêmes degrés et mêmes coefficients dominants, on en déduit que $p\mu_f=X\mu_f'$ ou encore que

$$\frac{\mu_f'}{\mu_f}=\frac{p}{X}.$$

Par identification à la décomposition en éléments simples usuelle de $\dfrac{\mu_f'}{\mu_f}$, on en déduit que $\mu_f = X^p$. En particulier, $f^p = 0$ et encore une fois f est nilpotent.

Exercice n° 10

1er cas. Supposons $\alpha = \beta = 0$ et donc $uv = vu$. Puisque E est un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle, u admet au moins une valeur propre que l'on note λ. Le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ correspondant n'est pas réduit à $\{0\}$, est stable par u et d'autre part stable par v car u et v commutent. On note u' et v' les restrictions de u et v au sous-espace $E_\lambda(u)$. u' et v' sont des endomorphismes de $E_\lambda(u)$. De nouveau, $E_\lambda(u)$ est un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle et donc v' admet au moins un vecteur propre x_0. Par construction, x_0 est un vecteur propre commun à u et v.

2ème cas. Supposons par exemple $\alpha \neq 0$.

$$\begin{aligned} uv - vu = \alpha u + \mu v &\Leftrightarrow (\alpha u + \beta v) \circ \frac{1}{\alpha}v - \frac{1}{\alpha}v \circ (\alpha u + \beta v) = \alpha u + \beta v \\ &\Leftrightarrow fg - gf = f \text{ en posant } f = \alpha u + \beta v \text{ et } g = \frac{1}{\alpha}v. \end{aligned}$$

On va chercher un vecteur propre commun à u et v dans le noyau de f. Montrons tout d'abord que $\text{Ker} f$ n'est pas nul (on sait montrer que f est en fait nilpotent (exo n° 9) mais on peut montrer directement une propriété un peu moins forte).
Si f est inversible, l'égalité $fg - gf = f$ fournit $(g + Id) \circ f = f \circ g$ et donc $g + Id = f \circ g \circ f^{-1}$. Par suite, g et $g + Id$ ont même polynôme caractéristique (en tenant compte de $1 \leqslant \dim(E) < +\infty$) ou encore, si λ est valeur propre de g alors $\lambda + 1$ est encore valeur propre de g. Mais alors $\lambda + 2$, $\lambda + 3$... sont aussi valeurs propres de g et g a une infinité de valeurs propres deux à deux distinctes. Ceci est exclu et donc $\text{Ker} f$ n'est pas réduit à $\{0\}$.
Maintenant, si x est un vecteur de $\text{Ker} f$, on a $f(g(x)) = g(f(x)) + f(x) = 0$ et $g(x)$ est dans $\text{Ker} f$. Donc g laisse $\text{Ker} f$ stable et sa restriction à $\text{Ker} f$ est un endomorphisme de $\text{Ker} f$ qui admet au moins une valeur propre et donc au moins un vecteur propre. Ce vecteur est bien un vecteur propre commun à f et g.
Enfin si x est vecteur propre commun à f et g alors x est vecteur propre de $v = \dfrac{1}{\alpha}g$ et de $u = \dfrac{1}{\alpha}(f - \beta v)$. x est un vecteur propre commun à u et v.

Exercice n° 11

1) • E contient I_2 et est inclus dans $GL_2(\mathbb{R})$.
• Si A et B sont dans E alors AB est à coefficients entiers et $\det(AB) = \det A \times \det B = 1$. Donc AB est dans E.
• Si A est dans E, $\det(A^{-1}) = 1$ et en particulier $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}{}^t\text{com}(A)$ est à coefficients entiers. On en déduit que A^{-1} est dans E.

Finalement

$$\boxed{E \text{ est un sous-groupe de } GL_2(\mathbb{R}).}$$

2) Soit A un élément de E tel qu'il existe un entier naturel non nul p tel que $A^p = I_2$.
A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car annule le polynôme à racines simples $X^p - 1$.
A admet deux valeurs propres distinctes ou confondues qui sont des racines p-èmes de 1 dans $\mathbb{C}$ et puisque A est réelle, on obtient les cas suivants :

1er cas. Si $\text{Sp}A = (1, 1)$, puisque A est diagonalisable, A est semblable à I_2 et par suite $A = I_2$. Dans ce cas, $A^{12} = I_2$.

2ème cas. Si $\text{Sp}A = (-1, -1)$, $A = -I_2$ et $A^{12} = I_2$.

3ème cas. Si $\text{Sp}A = (1, -1)$ alors A est semblable à $\text{diag}(1, -1)$ et donc $A^2 = I_2$ puis encore une fois $A^{12} = I_2$.

4ème cas. Si $\text{Sp}A = (e^{i\theta}, e^{-i\theta})$. Dans ce cas $\text{Tr}A = 2\cos\theta$ est un entier ce qui impose $2\cos\theta \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Les cas $\cos\theta = 1$ et $\cos\theta = -1$ ont déjà été étudié.
- Si $\cos\theta = 0$, $\text{Sp}A = (i, -i)$ et A est semblable à $\text{diag}(i, -i)$. Donc $A^4 = I_2$ puis $A^{12} = I_2$.
- Si $\cos\theta = \pm\dfrac{1}{2}$, $\text{Sp}A = (j, j^2)$ ou $\text{Sp}A = (-j, -j^2)$. Dans le premier cas, $A^3 = I_2$ et dans le deuxième $A^6 = I_2$.

Dans tous les cas $A^{12} = I_2$.

Exercice n° 12

On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ le format de A.
• C'est clair pour $n = 1$.
• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que toute matrice de format n et de trace nulle soit semblable à une matrice de diagonale nulle. Soient A une matrice carrée de format $n + 1$ et de trace nulle puis f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^{n+1}$ de matrice A dans la base canonique $(e_1, ..., e_{n+1})$ de $\mathbb{K}^{n+1}$.

Si f est une homothétie de rapport noté k, alors $0 = \mathrm{Tr}(f) = k(n+1)$ et donc $k = 0$ puis $f = 0$ puis $A = 0$. Dans ce cas, A est effectivement semblable à une matrice de diagonale nulle.

Sinon f n'est pas une homothétie et on sait qu'il existe un vecteur u de E tel que la famille $(u, f(u))$ soit libre (voir exercice n° 25, planche 2). On complète la famille libre $(u, f(u))$ en une base de E. Le coefficient ligne 1, colonne 1, de la matrice de f dans cette base est nul. Plus précisément, A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \times & \dots & & \dots & \times \\ 1 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & A' & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$.

Puis $\mathrm{Tr}A' = \mathrm{Tr}A = 0$ et par hypothèse de récurrence, A' est semblable à une matrice A_1 de diagonale nulle ou encore il existe A_1 matrice carrée de format n et de diagonale nulle et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}A'Q = A_1$.

Mais alors, si on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, P est inversible car $\det(P) = 1 \times \det(Q) \neq 0$ et un calcul par blocs montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ puis que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \times & \dots & & \dots & \times \\ \times & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ & & & A_1 & & \\ \vdots & & & & & \\ \times & & & & & \end{pmatrix}$ est de diagonale nulle.

Exercice n° 13

$\det(M) = \det\begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -3A & 4A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ $(\forall k \in [\![1, n]\!],\ C_k \leftarrow C_k - C_{n+k})$ et donc $\det M = \det(A)\det(-3A) = (-3)^n(\det A)^2$.

$$\boxed{\det M = (-3)^n(\det A)^2.}$$

L'idée de l'étude de M qui suit vient de l'étude de la matrice de format 2, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Une diagonalisation rapide amène à $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Soit alors P la matrice de format $2n$ définie par blocs par $P = \begin{pmatrix} -2I_n & 2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$. Un calcul par blocs montre que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -I_n & 2I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix}$ puis que

$$P^{-1}MP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -I_n & 2I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2I_n & 2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} A & -2A \\ 3A & 6A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2I_n & 2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}.$$

On pose $N = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$. Puisque les matrices M et N sont semblables, M et N ont même polynôme caractéristique et de plus M est diagonalisable si et seulement si N l'est.

Un calcul par blocs fournit $\chi_M = \chi_{-A} \times \chi_{3A}$. Donc, si $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, alors $\mathrm{Sp}(M) = (-\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \cup (3\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Cherchons les vecteurs propres Z de N sous la forme $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ où X et Y sont des vecteurs colonnes de format n. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$NZ = \lambda Z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Leftrightarrow -AX = \lambda X \text{ et } 3AY = \lambda Y.$$

Par suite

$$Z \text{ est vecteur propre de } N \text{ associé à } \lambda \Leftrightarrow (X \neq 0 \text{ ou } Y \neq 0) \text{ et } (X \in \mathrm{Ker}(A + \lambda I) \text{ et } Y \in \mathrm{Ker}\left(A - \frac{\lambda}{3}I\right)).$$

Une discussion suivant λ s'en suit :

1er cas. Si $-\lambda$ et $\dfrac{\lambda}{3}$ ne sont pas valeurs propres de A alors λ n'est pas valeur propre de M.

2ème cas. Si $-\lambda$ est dans SpA et $\dfrac{\lambda}{3}$ n'y est pas, alors λ est valeur propre de M. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des $P\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2X \\ X \end{pmatrix}$ où X décrit $\mathrm{Ker}(A+\lambda I)$. La dimension de E_λ est alors $\dim(\mathrm{Ker}(A+\lambda I))$.

3ème cas. Si $-\lambda$ n'est pas dans SpA et $\dfrac{\lambda}{3}$ y est, alors λ est valeur propre de M. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des $P\begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2Y \\ Y \end{pmatrix}$ où Y décrit $\mathrm{Ker}\left(A-\dfrac{\lambda}{3}I\right)$. La dimension de E_λ est alors $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(A-\dfrac{\lambda}{3}I\right)\right)$.

4ème cas. Si $-\lambda$ est dans SpA et $\dfrac{\lambda}{3}$ aussi, alors λ est valeur propre de M. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des $P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2X+2Y \\ X+Y \end{pmatrix}$ où X décrit $\mathrm{Ker}(A+\lambda I)$ et Y décrit $\mathrm{Ker}\left(A-\dfrac{\lambda}{3}I\right)$. La dimension de E_λ est alors $\dim(\mathrm{Ker}(A+\lambda I))+\dim\left(\mathrm{Ker}\left(A-\dfrac{\lambda}{3}I\right)\right)$.

Dans tous les cas, $\dim(E_\lambda(M)) = \dim(E_{-\lambda}(A))+\dim(E_{\lambda/3}(A))$ (et en particulier $\dim(\mathrm{Ker}M) = 2\dim(\mathrm{Ker}A)$). Comme les applications $\lambda \mapsto -\lambda$ et $\lambda \mapsto \dfrac{\lambda}{3}$ sont des bijections de $\mathbb{C}$ sur lui-même,

$$\begin{aligned}
A \text{ est diagonalisable} &\Leftrightarrow \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \dim(E_\lambda(A)) = n \\
&\Leftrightarrow \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \dim(E_\lambda(A)) + \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \dim(E_\lambda(A)) = 2n \\
&\Leftrightarrow \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \dim(E_{-\lambda}(A)) + \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \dim(E_{\lambda/3}(A)) = 2n \\
&\Leftrightarrow M \text{ est diagonalisable.}
\end{aligned}$$

Exercice n° 14

$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -b & \dots & -b \\ -a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b \\ -a & \dots & -a & X \end{vmatrix}$. Soit $f(x) = \begin{vmatrix} X+x & -b+x & \dots & -b+x \\ -a+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b+x \\ -a+x & \dots & -a+x & X+x \end{vmatrix}$.

f est un polynôme en x. En retranchant la première colonne à toutes les autres (ce qui ne change pas la valeur de $f(x)$), on fait disparaître les x de colonnes n° $2, \dots, n$. En développant alors suivant la première colonne, on obtient un polynôme en x de degré inférieur ou égal à 1.

Ainsi, f est donc une fonction affine. Il existe donc deux nombres α et β tels que $\forall x \in \mathbb{C}$, $f(x) = \alpha x+\beta$. Les égalités $f(a) = (X-a)^n$ et $f(b) = (X-b)^n$ fournissent $\left\{\begin{array}{l} \alpha a+\beta = (X-a)^n \\ \alpha b+\beta = (X-b)^n \end{array}\right.$ et comme $a \neq b$, les formules de Cramer fournissent

$$\chi_A = f(0) = \beta = \frac{1}{b-a}(b(X-a)^n - a(X-b)^n).$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \Rightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\lambda-a}{\lambda-b}\right)^n = \frac{a}{b} \Rightarrow \left|\frac{\lambda-a}{\lambda-b}\right| = \left|\frac{a}{b}\right|^{1/n}.$$

Soient M le point du plan d'affixe λ, A le point du plan d'affixe a et B le point du plan d'affixe b puis $k = \left|\dfrac{a}{b}\right|^{1/n}$.
k est un réel strictement positif et distinct de 1. On peut donc poser $I = \mathrm{bar}(A(1), B(-k))$ et $J = \mathrm{bar}(A(1), B(k))$.

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } A &\Rightarrow MA = kMB \Rightarrow MA^2 - k^2MB^2 = 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right) = 0 \\
&\Rightarrow (1-k)\overrightarrow{MI}.(1+k)\overrightarrow{MJ} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0 \\
&\Rightarrow M \text{ est sur le cercle de diamètre } [I,J] \text{ (cercles d'Appolonius (de Perga)).}
\end{aligned}$$

Exercice n° 15

1) Les hypothèses fournissent $AU = U$ où $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc 1 est valeur propre de A.

2) a) Soient λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \lambda x_i \Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ |\lambda x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}||x_j| \\ &\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ |\lambda x_i| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) \mathrm{Max}\{|x_j|,\ 1 \leqslant j \leqslant n\} \\ &\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ |\lambda||x_i| \leqslant \mathrm{Max}\{|x_j|,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}. \end{aligned}$$

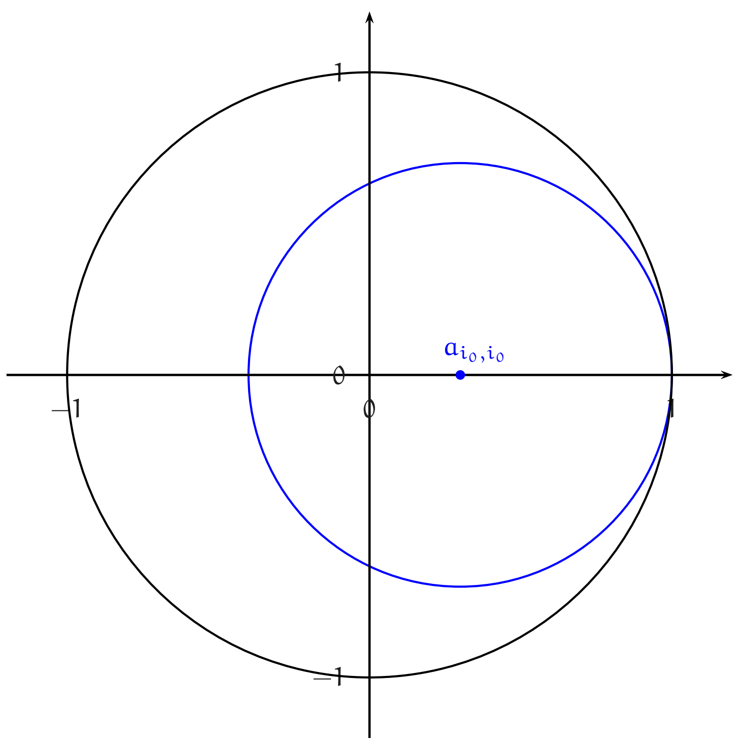
On choisit alors pour i un indice i_0 tel que $|x_{i_0}| = \mathrm{Max}\{|x_j|,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Puisque X est non nul, on a $|x_{i_0}| > 0$. On obtient

$$|\lambda||x_{i_0}| \leqslant |x_{i_0}| \text{ et donc } |\lambda| \leqslant 1 \text{ puisque } |x_{i_0}| > 0.$$

b) Plus précisément,

$$|\lambda - a_{i_0,i_0}|\,|x_{i_0}| = \left|\sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j}|x_j| \leqslant \left(\sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j}\right)|x_{i_0}| = (1 - a_{i_0,i_0})|x_{i_0}|$$

et donc $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}A,\ |\lambda - a_{i_0,i_0}| \leqslant 1 - a_{i_0,i_0}$ ce qui signifie que les valeurs propres de A appartiennent au disque de centre $\omega = a_{i_0,i_0}$ et de rayon $1 - \omega$. Ce disque est tangent intérieurement au cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1 en le point $(1,0)$.



Exercice n° 16

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. A est antisymétrique si et seulement si $A^T = -A$. Dans ce cas

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A) = \det\left((XI_n - A)^T\right) = \det(XI_n + A) = (-1)^n \det(-XI_n - A) = (-1)^n \chi_A(-X).$$

Ainsi, χ_A a la parité de n.

Exercice n° 17

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = e_{n+1-i}$ et donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f^2(e_i) = e_i$. Donc f est une symétrie distincte de l'identité et en particulier $\mathrm{Sp}A = \{-1, 1\}$ et f est diagonalisable. On en déduit que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice n° 18

1) $J^n = I$. Le polynôme $X^n - 1$, qui est à racines simples dans $\mathbb{C}$, est annulateur J. Donc, J est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Les valeurs propres de J sont à choisir parmi les racines n-èmes de 1 dans $\mathbb{C}$. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Vérifions que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, ω^k est valeur propre de J.

Soient $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $X = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ un élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$JX = \omega^k X \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = \omega^k x_2 \\ \vdots \\ x_n = \omega^k x_{n-1} \\ x_1 = \omega^k x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = (\omega^k)^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = (\omega^k)^{n-1} x_1 \\ x_1 = (\omega^k)^n x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = (\omega^k)^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = (\omega^k)^{n-1} x_1 \end{cases}$$

et donc

$$JX = \omega^k X \Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}(U_k) \text{ où } U_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ (\omega^k)^2 \\ \vdots \\ (\omega^k)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, ω^k est valeur propre de J. Les valeurs propres de J sont les n racines n-èmes de 1 dans $\mathbb{C}$. Ces valeurs propres sont toutes simples. Le sous espace propre associé à ω^k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, est la droite vectorielle $D_k = \mathrm{Vect}(U_k)$.

Soit P la matrice de Vandermonde des racines n-èmes de l'unité c'est-à-dire $P = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{1 \leqslant j,k \leqslant n}$ puis $D = \mathrm{diag}(1, \omega, ..., \omega^{n-1})$. On a déjà vu que $P^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{P}$ (planche 3, exercice n° 16) et on a

$$\boxed{J = PDP^{-1} \text{ avec } D = \mathrm{diag}(\omega^{j-1})_{1 \leqslant j \leqslant n},\ P = \left(\omega^{(j-1)(k-1)}\right)_{1 \leqslant j,k \leqslant n} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{n}\overline{P} \text{ avec } \omega = e^{2i\pi/n}.}$$

Remarque. La seule connaissance de D suffit pour le 2).

2) Soit A la matrice de l'énoncé.

$$A = a_0 I_n + a_1 J + a_2 J^2 + ... + a_{n-1} J^{n-1} = Q(J) \text{ où } Q = a_0 + a_1 X + ... + a_{n-1} X^{n-1}.$$

D'après 1), $A = P \times Q(D) \times P^{-1}$ et donc A est semblable à la matrice $\mathrm{diag}(Q(1), Q(\omega), ..., Q(\omega^{n-1}))$. Par suite, A a même déterminant que la matrice $\mathrm{diag}(Q(1), Q(\omega), ..., Q(\omega^{n-1}))$. D'où la valeur du déterminant circulant de l'énoncé :

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} e^{\frac{2i(j-1)(k-1)\pi}{n}} a_j \right).}$$

Exercice n° 19

1) Soit $\sigma \in S_n$.

$$\det(P_\sigma) = \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') p_{\sigma'(1),1} \ldots p_{\sigma'(n),n} = \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') \delta_{\sigma'(1),\sigma(1)} \ldots \delta_{\sigma'(n),\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma),$$

car $\delta_{\sigma'(1),\sigma(1)} \ldots \delta_{\sigma'(n),\sigma(n)} \neq 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \sigma'(i) = \sigma(i) \Leftrightarrow \sigma' = \sigma$.

$$\boxed{\forall \sigma \in S_n,\ \det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma).}$$

2) a) Soit $(\sigma, \sigma') \in S_n^2$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $P_\sigma \times P_{\sigma'}$ vaut

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma'(j)}.$$

Dans cette somme, si $k \neq \sigma'(j)$, le terme correspondant est nul et quand $k = \sigma'(j)$, le terme correspondant vaut $\delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}$. Finalement, le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $P_\sigma \times P_{\sigma'}$ vaut $\delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}$ qui est encore le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $P_{\sigma\circ\sigma'}$.

$$\boxed{\forall (\sigma, \sigma') \in S_n^2,\ P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}.}$$

b) Montrons que G est un sous-groupe du groupe $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$. G contient $I_n = P_{Id}$ et d'autre part, G est contenu dans $GL_n(\mathbb{R})$ d'après 1). G est stable pour $\times$ d'après 2) et pour le passage à l'inverse car pour tout $\sigma \in S_n$, $(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}} \in G$ (toujours d'après 2)). Donc

$$\boxed{(G, \times) \text{ est un sous-groupe de } (GL_n(\mathbb{R}), \times).}$$

Soit l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} (S_n, \circ) & \to & (G, \times) \\ \sigma & \mapsto & P_\sigma \end{array}$. φ est un morphisme de groupes d'après 2), surjectif par construction. De plus,

$$\sigma \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow P_\sigma = I_n \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \sigma(i) = i \Leftrightarrow \sigma = Id_{[\![1,n]\!]}.$$

Donc $\text{Ker}(\varphi) = \{Id\}$ puis φ est injectif et finalement φ est un isomorphisme du groupe $(S_n, \circ)$ sur le groupe $(G, \times)$.

3) Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice AP_σ vaut

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\delta_{k,\sigma(j)} = a_{i,\sigma(j)}.$$

Par suite, si C_1,..., C_n désignent les colonnes de la matrice A, la matrice AP_σ est la matrice dont les colonnes sont $C_{\sigma(1)}$,..., $C_{\sigma(n)}$.

$$\boxed{\text{Si } A = (C_1 \dots C_n),\ AP_\sigma = (C_{\sigma(1)} \dots C_{\sigma(n)}).}$$

4) Commençons par trouver le polynôme caractéristique de la matrice associée à un cycle c de longueur ℓ ($2 \leqslant \ell \leqslant n$). Soit f_c l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ de matrice P_c dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f_c est $\begin{pmatrix} J_\ell & 0_{\ell,n-\ell} \\ 0_{n-\ell,\ell} & I_{n-\ell} \end{pmatrix}$ où la matrice J_ℓ est la matrice du n° 18. Le polynôme caractéristique χ_{P_c} de P_c est donc $(X-1)^{n-\ell}(X^\ell - 1)$ (voir n° 18).

Soit maintenant $\sigma \in S_n$. On note f_σ l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ de matrice P_σ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. σ se décompose de manière unique à l'ordre près des facteurs en produit de cycles à supports disjoints, ces cycles commutant deux à deux.
Posons donc $\sigma = c_1 \circ \ldots \circ c_p$, $p \geqslant 1$, où les c_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, sont des cycles à supports disjoints, et notons ℓ_i la longueur du cycle c_i, $1 \leqslant i \leqslant p$. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f_σ est $\begin{pmatrix} J_{\ell_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & J_{\ell_p} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_k \end{pmatrix}$ où $k = n - \ell_1 - \ldots - \ell_p$ est le nombre de points fixes de σ.
Le polynôme caractéristique cherché est donc $\chi_{P_\sigma} = (X^{\ell_1} - 1)\dots(X^{\ell_p} - 1)(X-1)^{n-\ell_1-\dots-\ell_p}$. On en déduit les valeurs propres de P_σ.

Exercice n° 20

Posons $\chi_f = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ où λ_1,..., λ_p sont les valeurs propres deux à deux distinctes de f.

Soit $E'_k = \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id})^{\alpha_k}$ (E'_k s'appelle le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ_k, $1 \leqslant k \leqslant p$). D'après le théorème de décomposition des noyaux, $E = E'_1 \oplus ... \oplus E'_p$. De plus, la restriction de f à E'_k induit un endomorphisme f_k de E'_k (car f et $(f - \lambda_k \text{Id})^{\alpha_k}$ commutent).
On note que $(f_k - \lambda_k \text{Id})^{\alpha_k} = 0$ et donc λ_k est l'unique valeur propre de f_k car toute valeur propre de f_k est racine du polynôme annulateur $(X - \lambda_k)^{\alpha_k}$.

Existence de d et n. On définit d par ses restrictions d_k aux E'_k, $1 \leqslant k \leqslant p$: d_k est l'homothétie de rapport λ_k. Puis on définit n par $n = f - d$.
d est diagonalisable car toute base de E adaptée à la décomposition $E = E'_1 \oplus ... \oplus E'_p$ est une base de vecteurs propres de d. De plus, $f = d + n$.
Soit n_k l'endomorphisme de E'_k induit par n. On a $n_k = f_k - \lambda_k \text{Id}_{E'_k}$ et par définition de E'_k, $n_k^{\alpha_k} = 0$. Mais alors, si on pose $\alpha = \text{Max}\{\alpha_1, ..., \alpha_p\}$, on a $n_k^{\alpha} = 0$ pour tout k de $[\![1, p]\!]$ et donc $n^{\alpha} = 0$ (les endomorphismes n^{α} et 0 coïncident sur des sous-espaces supplémentaires). Ainsi, n est nilpotent. Enfin, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, n_k commute avec d_k car d_k est une homothétie et donc $nd = dn$ (les endomorphismes nd et dn coïncident sur des sous-espaces supplémentaires).

Unicité de d et n. Supposons que $f = d + n$ avec d diagonalisable, n nilpotent et $nd = dn$.
d commute avec n et donc avec f car $df = d^2 + dn = d^2 + nd = fd$. Mais alors, $n = f - d$ commute également avec f. d et n laissent donc stables les sous-espaces caractéristiques E'_k, $1 \leqslant k \leqslant p$ de f. Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on note d_k et n_k les endomorphismes de E'_k induits par d et n respectivement.

Soient $k \in [\![1, p]\!]$ puis μ une valeur propre de d_k. D'après l'exercice n° 7,

$$\det(f_k - \mu \text{Id}) = \det(d_k - \mu \text{Id} + n) = \det(d_k - \mu \text{Id}) = 0,$$

car $d_k - \mu \text{Id}$ n'est pas inversible. On en déduit que $f_k - \mu \text{Id}$ n'est pas inversible et donc que μ est valeur propre de f_k. Puisque λ_k est l'unique valeur propre de f_k, on a donc $\mu = \lambda_k$. Ainsi, λ_k est l'unique valeur propre de d_k et puisque d_k est diagonalisable (voir exercice n° 36), on a nécessairement $d_k = \lambda_k \text{Id}_{E'_k}$ puis $n_k = f_k - \lambda_k \text{Id}_{E'_k}$. Ceci montre l'unicité de d et n.

Exercice n° 21

On cherche une matrice A de format 4 dont le polynôme caractéristique est $X^4 - 3X^3 + X^2 - 1$. La matrice compagnon $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ convient (voir planche 4, exercice n° 15) et le théorème de Cayley-Hamilton montre que $A^4 - 3A^3 + A^2 - I_4 = 0$.

Exercice n° 22

Soit A la matrice de l'énoncé. $\det(A)$ est le produit des valeurs propres de A.

• Si $b = 0$, $\det(A) = a^n$.

• Si $b \neq 0$, $\text{rg}(A - (a - b)I) = 1$ ou encore $\dim(\text{Ker}(A - (a - b)I)) = n - 1$. Par suite, $a - b$ est valeur propre d'ordre $n - 1$ au moins. On obtient la valeur propre manquante λ par la trace de A : $(n - 1)(a - b) + \lambda = na$ et donc $\lambda = a + (n - 1)b$. Finalement $\det A = (a - b)^{n-1}(a + (n - 1)b)$ ce qui reste vrai quand $b = 0$.

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix} = (a - b)^{n-1}(a + (n - 1)b).}$$

Exercice n° 23

A est de format $(2, 2)$. Donc, soit A a deux valeurs propres distinctes et est dans ce cas diagonalisable dans $\mathbb{C}$, soit A a une valeur propre double λ non nulle car $\text{Tr}(A) = 2\lambda \neq 0$.
Dans ce dernier cas, A^2 est diagonalisable et est donc est semblable à $\text{diag}(\lambda^2, \lambda^2) = \lambda^2 I$. Par suite, $A^2 = \lambda^2 I$. Ainsi, A annule le polynôme $X^2 - \lambda^2 = (X - \lambda)(X + \lambda)$ qui est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Dans ce cas aussi, A est diagonalisable.

Exercice n° 24

1) Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $(\varphi(f))(x) = \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0}$.
F est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\varphi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, F étant dérivable en 0

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}(\varphi(f))(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=F'(0)=f(0)=(\varphi(f))(0).$$

Finalement $\varphi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, φ est une application de E dans E. La linéarité de φ est claire et finalement

$$\boxed{\varphi\in\mathscr{L}(C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})).}$$

2) Si f est dans $\mathrm{Ker}(\varphi)$ alors $f(0)=0$ et pour tout x non nul, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=0$. Par dérivation on obtient $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f(x)=0$ ce qui reste vrai pour $x=0$ et donc $f=0$. Finalement $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{0\}$ et φ est injective.
φ n'est pas surjective car pour toute $f\in E$, $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Mais alors par exemple, l'application $g\;:\;x\mapsto|x-1|$ est dans E et n'est pas dérivable en 1 et donc, n'est pas dans $\mathrm{Im}(\varphi)$.

$$\boxed{\varphi\text{ est injective et n'est pas surjective.}}$$

3) On cherche $\lambda\in\mathbb{R}$ et f continue sur $\mathbb{R}$ et non nulle telle que $\forall x\in\mathbb{R},\;(\varphi(f))(x)=\lambda f(x)$. D'après la question précédente, 0 n'est pas valeur propre de φ et donc nécessairement $\lambda\neq 0$.
Pour $x=0$, nécessairement $f(0)=\lambda f(0)$ et donc ou bien $\lambda=1$ ou bien $f(0)=0$.
On doit avoir pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $f(x)=\dfrac{1}{\lambda x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. f est nécessairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=\lambda x f(x)$ et par dérivation, on obtient pour $x\in\mathbb{R}^*$,

$$f(x)=\lambda(xf'(x)+f(x)).$$

Soit I l'un des deux intervalles $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}\forall x\in I,\;f(x)=\lambda(xf'(x)+f(x))&\Rightarrow\forall x\in I,\;f'(x)+\frac{\lambda-1}{\lambda x}f(x)=0\\&\Rightarrow\forall x\in I,\;e^{\frac{(\lambda-1)\ln|x|}{\lambda}}f'(x)+\frac{\lambda-1}{\lambda x}e^{\frac{(\lambda-1)\ln|x|}{\lambda}}f(x)=0\\&\Rightarrow\forall x\in I,\;\left(|x|^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}f\right)'(x)=0\\&\Rightarrow\exists K\in\mathbb{R}/\;\forall x\in I,\;|x|^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}f(x)=K\Rightarrow\exists K\in\mathbb{R}/\;\forall x\in I,\;f(x)=K|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.\end{aligned}$$

1er cas. Si $\lambda\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ alors $\dfrac{1-\lambda}{\lambda}<0$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}=+\infty$. La fonction $x\mapsto K|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ ne peut donc être la restriction à I d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ que dans le cas $K=0$. Ceci fournit $f_{/]-\infty,0[}=0$, $f_{/]0,+\infty[}=0$ et $f(0)=0$ par continuité en 0. Donc f est nécessairement nulle et λ n'est pas valeur propre de φ dans ce cas.

2ème cas. Si $\lambda=1$, les restriction de f à $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$ sont constantes et donc, par continuité de f en 0, f est constante sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, les fonctions constantes f vérifient bien $\varphi(f)=f$. Ainsi, 1 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est constitué des fonctions constantes.

3ème cas. Si $\lambda\in]0,1[$, nécessairement $\exists(K_1,K_2)\in\mathbb{R}^2/\;\forall x\in\mathbb{R},\;f(x)=\begin{cases}K_1x^{\frac{1}{\lambda}-1}\text{ si }x\geqslant 0\\K_2(-x)^{\frac{1}{\lambda}-1}\text{ si }x<0\end{cases}$. f ainsi définie est bien continue sur $\mathbb{R}$. Calculons alors $\varphi(f)$. $(\varphi(f))(0)=f(0)=0$ puis si $x>0$,

$$(\varphi(f))(x)=\frac{1}{x}\int_0^x K_1t^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\,dt=\frac{\lambda K_1}{x}x^{\frac{1}{\lambda}}=\lambda K_1x^{\frac{1}{\lambda}-1}=\lambda f(x)$$

et de même si $x<0$. Enfin, $(\varphi(f))(0)=0=\lambda f(0)$. Finalement $\varphi(f)=\lambda f$. λ est donc valeur propre de φ ($K_1=K_2=1$ fournit une fonction non nulle, vecteur propre de φ associé à λ) et le sous-espace propre associé à λ est de dimension 2.
Une base de ce sous-espace est (f_1,f_2) où $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_1(x)=\begin{cases}x^{\frac{1}{\lambda}-1}\text{ si }x\geqslant 0\\0\text{ si }x<0\end{cases}$ et $f_2(x)=\begin{cases}0\text{ si }x\geqslant 0\\(-x)^{\frac{1}{\lambda}-1}\text{ si }x<0\end{cases}$.
Finalement

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi)=]0,1].}$$

Exercice n° 25

Trouvons un polynôme scindé à racines simples annulant f.
Le polynôme $P = X(X-\lambda)(X-\mu) = X^3 - (\lambda+\mu)X^2 + \lambda\mu X$ est annulateur de f. En effet,

$$\begin{aligned} P(f) &= f^3 - (\lambda+\mu)f^2 + \lambda\mu f = (\lambda^3 - (\lambda+\mu)\lambda^2 + (\lambda\mu)\lambda)u + (\mu^3 - (\lambda+\mu)\mu^2 + (\lambda\mu)\mu)v \\ &= P(\lambda)u + P(\mu)v = 0. \end{aligned}$$

• Si λ et μ sont distincts et non nuls, P est un polynôme scindé à racines simples annulateur de f et donc f est diagonalisable.
• Si $\lambda = \mu = 0$, alors $f = 0$ et donc f est diagonalisable.
• Si par exemple $\lambda \neq 0$ et $\mu = 0$, $f^2 = \lambda^2 u = \lambda f$ et et le polynôme $P = X(X-\lambda)$ est scindé à racines simples et annulateur de f. Dans ce cas aussi f est diagonalisable.
• Enfin si $\lambda = \mu \neq 0$, $f^2 = \lambda^2(u+v) = \lambda f$ et de nouveau $P = X(X-\lambda)$ est scindé à racines simples et annulateur de f.

Dans tous les cas , f est diagonalisable .

Exercice n° 26

Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $N^2 = E_{1,3}$ et $N^3 = 0$. Si $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ est une matrice carrée vérifiant $X^2 = N$, alors $X^6 = 0$. Donc X est nilpotente et, puisque X est de format 3, on sait que $X^3 = 0$. Mais alors $N^2 = X^4 = 0$ ce qui n'est pas. L'équation proposée n'a pas de solution.

Exercice n° 27

Montrons le résultat par récurrence sur $n = \dim(E) \geqslant 1$.
• Si $n = 1$, c'est clair.
• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace de dimension n qui commutent soient simultanément trigonalisables.
Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ tels que $fg = gf$.
f et g ont au moins un vecteur propre en commun. En effet, f admet au moins une valeur propre λ. Soit E_λ le sous-espace propre de f associé à λ. g commute avec f et donc laisse stable E_λ. La restriction de g à E_λ est un endomorphisme de E_λ qui est de dimension finie non nulle. Cette restriction admet donc une valeur propre et donc un vecteur propre. Ce vecteur est un vecteur propre commun à f et g.
Commençons à construire une base de trigonalisation simultanée de f et g. Soit x un vecteur propre commun à f et g. On complète la famille libre (x) en une base $\mathscr{B} = (x, \ldots)$ de E. Dans la base $\mathscr{B}$, les matrices M et N de f et g s'écrivent respectivement $M = \begin{pmatrix} \lambda & \times \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} \mu & \times \\ 0 & N_1 \end{pmatrix}$ où M_1 et N_1 sont de format n. Un calcul par blocs montre que M_1 et N_1 commutent ou encore si f_1 et g_1 sont les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ de matrices M_1 et N_1 dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, f_1 et g_1 commutent. Par hypothèse de récurrence, f_1 et g_1 sont simultanément trigonalisables. Donc il existe une matrice inversible P_1 de format n et deux matrices triangulaires supérieures T_1 et T_1' de format n telles que $P_1^{-1}M_1P_1 = T_1$ et $P_1^{-1}N_1P_1 = T_1'$.
Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$. P est inversible de format $n+1$ car $\det(P) = \det(P_1) \neq 0$ et un calcul par blocs montre que $P^{-1}MP$ et $P^{-1}NP$ sont triangulaires supérieures.

P est donc la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à une base de trigonalisation simultanée de f et g.

Exercice n° 28

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres de A. On a donc $\chi_A = (X-\lambda_1)\ldots(X-\lambda_n)$.

$$\begin{aligned} \chi_A(B) \text{ inversible} &\Leftrightarrow (B-\lambda_1 I)\ldots(B-\lambda_n I) \text{ inversible} \\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ B - \lambda_k I \text{ inversible (car } \det((B-\lambda_1 I)\ldots(B-\lambda_n I)) = \det(B-\lambda_1 I)\times\ldots\times\det(B-\lambda_n I)) \\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ \lambda_k \text{ n'est pas valeur propre de } B \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing. \end{aligned}$$

Exercice n° 29

Si P et χ_f sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux polynômes U et V tels que $UP + V\chi_f = 1$. En prenant la valeur en f et puisque que $\chi_f(f) = 0$, on obtient $P(f) \circ U(f) = U(f) \circ P(f) = \mathrm{Id}$. $P(f)$ est donc un automorphisme de E.

Réciproquement, si P et χ_f ne sont pas premiers entre eux, P et χ_f ont une racine commune λ dans $\mathbb{C}$. Soit A la matrice de f dans une base donnée (si $\mathbb{K}$ n'est pas $\mathbb{C}$ l'utilisation de la matrice est indispensable). On a $P(A) = (A - \lambda I)Q(A)$ pour un certain polynôme Q. La matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible car λ est valeur propre de A et donc $P(A)$ n'est pas inversible ($\det(P(A)) = \det(A - \lambda I)\det Q(A) = 0$) puis $P(f)$ n'est pas un automorphisme.

Exercice n° 30

$\text{rg}\,(M_{a,b} - I) = 1$, si $a = b = 0$, 2 si l'un des deux nombres a ou b est nul et l'autre pas et 3 si a et b ne sont pas nuls. Donc $M_{0,0}$ n'est semblable à aucune des trois autres matrices et de même pour $M_{1,1}$.
Il reste à savoir si les matrices $M_{1,0}$ et $M_{0,1}$ sont semblables.
$(M_{1,0} - I)^2 = (E_{1,2} + E_{2,3})^2 = E_{1,3} \neq 0$ et $(M_{0,1} - I)^2 = (E_{1,2} + E_{3,4})^2 = 0$. Donc les matrices $M_{1,0}$ et $M_{0,1}$ ne sont pas semblables.

Exercice n° 31

Soit B la matrice de l'énoncé. $\text{rg}B = 1$ et si A existe, nécessairement $\text{rg}A = n - 1$ (planche 4, exercice n° 18).
Une matrice de rang 1 admet l'écriture générale UV^T où U et V sont des vecteurs colonnes non nuls.

Ici $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si A existe, A doit déjà vérifier $AB^T = B^T A = 0$ ou encore $AVU^T = 0$ (1) et $VU^T A = 0$ (2). En multipliant les deux membres de l'égalité (1) par U à droite puis en simplifiant par le réel non nul $U^T U = \|U\|_2^2$, on obtient $AV = 0$. Ceci montre que la première colonne de A est nulle (les $n - 1$ dernières devant alors former une famille libre).
De même, en multipliant les deux membres de l'égalité (2) par V^T à gauche, on obtient $U^T A = 0$ et donc les colonnes de la matrice A sont orthogonales à U (pour le produit scalaire usuel) ce qui invite franchement à considérer la matrice
$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \dots & \dots & -n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui convient (les mineurs des coefficients des colonnes C_2, ..., C_n, ont une première colonne nulle et sont donc nuls et les cofacteurs des coefficients de la première colonne sont après un calcul simple, effectivement égaux à $1, \dots, n$).

Exercice n° 32

(Si les a_k sont réels, la matrice A est symétrique réelle et les redoublants savent que la matrice A est diagonalisable.)
Si tous les a_k, $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, sont nuls la matrice A est diagonalisable car diagonale.

On suppose dorénavant que l'un au moins des a_k, $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, est non nul. Dans ce cas, $\text{rg}(A) = 2$.
0 est valeur propre d'ordre $n - 2$ au moins. Soient λ et μ les deux dernières valeurs propres. On a

$$\lambda + \mu = \text{Tr}A = a_n \text{ et } \lambda^2 + \mu^2 = \text{Tr}(A^2) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 2\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + a_n^2.$$

λ et μ sont solutions du système $\left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = a_n \\ \lambda^2 + \mu^2 = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + a_n^2 \end{array}\right.$ qui équivaut au système $\left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = a_n \\ (\lambda + \mu)^2 - 2\lambda\mu = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + a_n^2 \end{array}\right.$

ou encore $\left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = a_n \\ \lambda\mu = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \end{array}\right.$ (S).

On a alors les situations suivantes :
• Si λ et μ sont distincts et non nuls, A est diagonalisable car l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant.
• Si λ ou μ est nul, A n'est pas diagonalisable car l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 est différent de $n - 2$, la dimension du noyau de A.
• Si $\lambda = \mu \neq 0$, A est diagonalisable si et seulement si $\text{rg}(A - \lambda I) = n - 2$ mais on peut noter que si λ n'est pas nul, on a toujours $\text{rg}(A - \lambda I) = n - 1$ en considérant la matrice extraite formée des n-1 premières lignes et colonnes.

En résumé, la matrice A est diagonalisable si et seulement si le système (S) admet deux solutions distinctes et non nulles.

Mais λ et μ sont solutions du système (S) si et seulement si λ et μ sont les racines de l'équation $(E) : X^2 - a_n X - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 = 0$.

Par suite, A est diagonalisable si et seulement si $\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \neq 0$ et $\Delta = a_n^2 + 4\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \neq 0$.

Exercice n° 33

1) $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 1 \\ -1 & X-1 & -1 \\ -1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2-2X) + (2-X) - (2-X) = X(X-1)(X-2)$.
On est dans le cas d'une matrice diagonalisable avec 3 valeurs propres simples.

Recherche des droites stables. Dans chacun des cas, les droites stables sont les droites engendrées par des vecteurs propres. On obtient immédiatement les 3 droites stables : $E_0 = \text{Vect}(e_1)$ où $e_1 = (1,-1,0)$, $E_1 = \text{Vect}(e_2)$ où $e_2 = (1,-1,-1)$ et $E_2 = \text{Vect}(e_3)$ où $e_3 = (0,1,1)$.

Recherche des plans stables. Soit P un plan stable par f. La restriction de f à P induit un endomorphisme f_P de P et on sait de plus que le polynôme caractéristique de f_P divise celui de f. f_P est diagonalisable car f l'est (car on dispose d'un polynôme scindé à racines simples annulant f et donc f_P). On en déduit que P est engendré par deux vecteurs propres indépendants de f_P qui sont encore vecteurs propres de f. On obtient trois plans stables : $P_1 = \text{Vect}(e_2, e_3)$, $P_2 = \text{Vect}(e_1, e_3)$ et $P_3 = \text{Vect}(e_1, e_2)$.

2) $\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & -2 & -1 \\ -1 & X-3 & -1 \\ -1 & -2 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)(X^2-5X+4) + (-2X+2) - (X-1) = (X-1)((X-2)(X-4) - 2 - 1) = (X-1)(X^2-6X+5) = (X-1)^2(X-5)$. Puis E_1 est le plan d'équation $x + 2y + z = 0$ et $E_5 = \text{Vect}((1,1,1))$.
On est toujours dans le cas diagonalisable mais avec une valeur propre double.

Les droites stables sont $E_5 = \text{Vect}((1,1,1))$ et n'importe quelle droite contenue dans E_1. Une telle droite est engendrée par un vecteur de la forme $(x, y, -x-2y)$ avec $(x,y) \neq (0,0)$.

Recherche des plans stables. Soit P un plan stable par f. f est diagonalisable et donc f_P est un endomorphisme diagonalisable de P. Par suite, P est engendré par deux vecteurs propres indépendants de f. On retrouve le plan propre de f d'équation $x + 2y + z = 0$ et les plans engendrés par $(1,1,1)$ et un vecteur quelconque non nul du plan d'équation $x + 2y + z = 0$. L'équation générale d'un tel plan est $(-a-3b)x + (2a+2b)y + (b-a)z = 0$ où $(a,b) \neq (0,0)$.

3)

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-6 & 6 & -5 \\ 4 & X+1 & -10 \\ -7 & 6 & X-4 \end{vmatrix} = (X-6)(X^2-3X+56) - 4(6X+6) - 7(5X-55) = X^3 - 9X^2 + 15X + 25$$
$$= (X+1)(X^2-10X+25) = (X+1)(X-5)^2.$$

$E_{-1} = \text{Vect}(10, 15, 4)$ et $E_5 = \text{Vect}((1,1,1))$. On est dans le cas où A admet une valeur propre simple et une double mais n'est pas diagonalisable. Les droites stables par f sont les deux droites propres.

Recherche des plans stables. Soit P un plan stable par f. Le polynôme caractéristique de f_P est unitaire et divise celui de f. Ce polynôme caractéristique est donc soit $(X+1)(X-5)$ soit $(X-5)^2$.
Dans le premier cas, f_P est diagonalisable et P est nécessairement le plan $\text{Vect}((10,15,4)) + \text{Vect}((1,1,1))$ c'est-à-dire le plan d'équation $11x - 6y - 5z = 0$.
Dans le deuxième cas, $\chi_{f_P} = (X-5)^2$ et 5 est l'unique valeur propre de f_P. Le théorème de Cayley-Hamilton montre que $(f_P - 5Id_P)^2 = 0$ et donc P est contenu dans $\text{Ker}\left((f-5Id)^2\right)$. $\text{Ker}\left((f-5Id)^2\right)$ est le plan d'équation $x = z$ qui est bien sûr stable par f car $(f-5Id)^2$ commute avec f.

Exercice n° 34

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$. A est de rang 1 et donc admet deux valeurs propres égales à 0 . $\text{Tr}A = 0$ et donc la troisième valeur propre est encore 0. Donc $\chi_A = X^3$. A est nilpotente et le calcul donne $A^2 = 0$. Ainsi, si X est une matrice telle que $X^2 = A$ alors X est nilpotente et donc $X^3 = 0$.

Réduction de A. $A^2 = 0$. Donc $\text{Im}A \subset \text{Ker}A$. Soit e_3 un vecteur non dans $\text{Ker}A$ puis $e_2 = Ae_3$. (e_2) est une base de $\text{Im}A$ que l'on complète en (e_1, e_2) base de $\text{Ker}A$.
(e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ car si $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$ alors $A(ae_1 + be_2 + ce_3) = 0$ c'est-à-dire $ce_2 = 0$ et donc $c = 0$. Puis $a = b = 0$ car la famille (e_1, e_2) est libre.

Si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ à la base (e_1, e_2, e_3) alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On peut prendre $P = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 0 \\ -1 & -14 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $X^2 = A$, X commute avec A et donc X laisse stable $\text{Im}A$ et $\text{Ker}A$. On en déduit que Xe_2 est colinéaire à e_2 et Xe_1 est dans $\text{Vect}(e_1, e_2)$. Donc $P^{-1}XP$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & d \\ b & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$. De plus, X est nilpotente de polynôme caractéristique $(\lambda - a)(\lambda - c)(\lambda - f)$. On a donc nécessairement $a = c = f = 0$. $P^{-1}XP$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Enfin, $X^2 = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow ab = 1$.

Les matrices X solutions sont les matrices de la forme $P \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ où a est non nul et b quelconque.

On trouve $P^{-1} = \dfrac{1}{49} \begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -7 & -21 & 49 \end{pmatrix}$ puis

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 3 & -7 & 0 \\ -1 & -14 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -7 & -21 & 49 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{49} \begin{pmatrix} -7a & 0 & \frac{3}{a} - 7b \\ -14a & 0 & -\frac{1}{a} - 14b \\ -7a & 0 & -7b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -7 & -21 & 49 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2a - \frac{3}{7a} + b & a - \frac{9}{7a} + 3b & \frac{3}{a} - 7b \\ -4a + \frac{1}{7a} + 2b & 2a + \frac{3}{7a} + 6b & -\frac{1}{a} - 14b \\ -2a + b & a + 3b & -7b \end{pmatrix}, \ (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Exercice n° 35

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 1 \\ -1 & X-2 & -1 \\ -2 & -2 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2 - 5X + 4) + (2X - 2) = (X-1)(X^2 - 5X + 4 + 2) = (X-1)(X-2)(X-3)$.

A est à valeurs propres réelles et simples. A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et les sous-espaces propres sont des droites.

Si M est une matrice qui commute avec A, M laisse stable ces droites et donc si P est une matrice inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale alors la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale. Réciproquement une telle matrice commute avec A.

$$C(A) = \{P\text{diag}(a, b, c)P^{-1}, \ (a, b, c) \in \mathbb{C}^3\}.$$

On trouve $C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2b - c & -a + 2b - c & \frac{a-c}{2} \\ -b + c & a - b + c & (-a + c)/2 \\ 2c - 2b & -2b + c & c \end{pmatrix}, \ (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$. On peut vérifier que $C(A) = \text{Vect}(I, A, A^2)$.

Exercice n° 36

F est stable par f et donc la restriction de f à F induit est un endomorphisme f_F de F. f est diagonalisable et donc il existe un polynôme P, scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples, tel que $P(f) = 0$. Mais alors $P(f_F) = 0$ et on a trouvé un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples annulateur de f_F. Donc f_F est diagonalisable.

Exercice n° 37

Soit $P = X^3+X^2+X = X(X-j)\left(X-j^2\right)$. P est à racines simples dans $\mathbb{C}$ et annulateur de A. Donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont éléments de $\left\{0, j, j^2\right\}$. Le polynôme caractéristique de A est de la forme $X^\alpha(X-j)^\beta\left(X-j^2\right)^\gamma$ avec $\alpha+\beta+\gamma = n$. De plus, A est réelle et on sait que j et $j^2 = \overline{j}$ ont même ordre de multiplicité ou encore $\gamma = \beta$.

Puisque A est diagonalisable, l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant et donc

$$\mathrm{rg}(A) = n - \dim(\mathrm{Ker}A) = n - \alpha = 2\beta.$$

On a montré que $\mathrm{rg}A$ est un entier pair.

