Planche n° 5. Réduction

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (**) :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Pour n entier relatif donné, calculer A^n par trois méthodes différentes.

Exercice n° 2 (***) :

Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 3 (**) :

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que A n'est pas diagonalisable.
2) Déterminer $\text{Ker}(A - I)^2$.
3) Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$
4) Calculer A^n pour n entier naturel donné.

Exercice n° 4 (***) :

Soit f qui à P élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ associe $f(P) = (X^2 - 1)P' - 2nXP$.
Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ puis déterminer les valeurs et vecteurs propres de f. f est-il diagonalisable ?

Exercice n° 5 (***) :

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Pour P élément de E, soit $f(P)$ le reste de la division euclidienne de AP par B où $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$.
Vérifier que f est un endomorphisme de E puis déterminer $\text{Ker} f$, $\text{Im} f$ et les valeurs et vecteurs propres de f.

Exercice n° 6 (***) :

Soit A une matrice rectangulaire de format (p, q) et B une matrice de format (q, p). Comparer les polynômes caractéristiques de AB et BA.

Exercice n° 7 (* I) :**

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. On suppose que u et v commutent et que v est nilpotent. Montrer que $\det(u + v) = \det(u)$.

Exercice n° 8 (** I) :**

Soit A une matrice carrée de format n.
Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\text{Tr}\left(A^k\right) = 0$.

Exercice n° 9 (* I) :**

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie vérifiant $fg - gf = f$. Montrer que f est nilpotent.

Exercice n° 10 (****) :

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.
Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 /\ uv - vu = \alpha u + \beta v$. Montrer que u et v ont un vecteur propre en commun.

Exercice n° 11 (***) :

Soit $E = SL_2(\mathbb{Z}) = \{$matrices carrées de format 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de déterminant $1\}$.
1) Montrer que $(E, \times)$ est un groupe.
2) Soit A un élément de E tel que $\exists p \in \mathbb{N}^* /\ A^p = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

Exercice n° 12 (****) :

Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice n° 13 (****) :

Soient A un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et M l'élément de $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$ défini par blocs par $M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$.

Calculer $\det(M)$. Déterminer les éléments propres de M puis montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exercice n° 14 (****) :

Soient a et b deux réels non nuls tels que $|a| \neq |b|$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que les images dans le plan complexe des valeurs propres de A sont cocycliques. (Indication : pour calculer χ_A, considérer $f(x) = \begin{vmatrix} X+x & -b+x & \dots & -b+x \\ -a+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b+x \\ -a+x & \dots & -a+x & X+x \end{vmatrix}$.)

Exercice n° 15 (* I) : (matrices stochastiques).**

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \in [0,1]$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1) Montrer que 1 est valeur propre de A.

2) Soit λ une valeur propre de A.

a) Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

b) Montrer qu'il existe un réel ω de $[0,1]$ tel que $|\lambda - \omega| \leqslant 1 - \omega$. Conséquence géométrique ?

Exercice n° 16 (**) :

Soit A une matrice antisymétrique réelle. Etudier la parité de son polynôme caractéristique.

Exercice n° 17 (*) :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice n° 18 (* I) : (déterminant circulant).**

1) Soit $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ (de format $n \geqslant 3$). Diagonaliser J_n.

2) En déduire la valeur de $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$.

Exercice n° 19 (* I) : (matrices de permutations).**

Pour $\sigma \in S_n$, $n \geqslant 2$, on définit la matrice P_σ par $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1) Calculer $\det(P_\sigma)$ pour tout $\sigma \in S_n$.

2) a) Montrer que $\forall (\sigma, \sigma') \in S_n^2$, $P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}$.

b) On pose $G = \{P_\sigma,\ \sigma \in S_n\}$. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe isomorphe à S_n.

3) Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer AP_σ.

4) Trouver les valeurs propres d'une matrice de permutation (on pourra utiliser le résultat : toute permutation se décompose de manière unique à l'ordre près des facteurs en produit de cycles à supports disjoints).

Exercice n° 20 (* I) : (Décomposition de Dunford).**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.
Montrer qu'il existe un couple d'endomorphismes (d, n) et un seul tel que d est diagonalisable, n est nilpotent, n et d commutent, et $f = d + n$.

Exercice n° 21 (**) :

Trouver une matrice carrée A vérifiant $A^4 - 3A^3 + A^2 - I = 0$.

Exercice n° 22 (I) :**

Calculer $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Exercice n° 23 (**) :

Soit A une matrice carrée de format 2 telle que A^2 est diagonalisable et $\text{Tr}A \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Exercice n° 24 (***) :

$E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour f élément de E, $\varphi(f)$ est l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ (\varphi(f))(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt \text{ si } x \neq 0 \text{ et } (\varphi(f))(0) = f(0).$$

1) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2) Etudier l'injectivité et la surjectivité de φ.
3) Déterminer les éléments propres de φ.

Exercice n° 25 (* I) :**

Sur E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On donne trois endomorphismes f, u et v tels qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour $k \in \{1, 2, 3\}$, $f^k = \lambda^k u + \mu^k v$. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice n° 26 (I) :**

Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 27 (***) :

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle qui commutent. Montrer que f et g sont simultanément trigonalisables.

Exercice n° 28 (**) :

Soient A et B deux matrices carrées complexes de format n. Montrer que A et B n'ont pas de valeurs propres communes si et seulement si la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.

Exercice n° 29 (**) :

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et P un polynôme. Montrer que $P(f)$ est inversible si et seulement si P et χ_f sont premiers entre eux.

Exercice n° 30 (**) : (ESTP1994)

Soit $M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Peut-on trouver deux matrices distinctes semblables parmi les quatre matrices $M_{0,0}$, $M_{0,1}$, $M_{1,0}$ et $M_{1,1}$?

Exercice n° 31 (****) :

Trouver A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la comatrice de A soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 32 (**) :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ où a_1,..., a_n sont n nombres complexes ($n \geqslant 2$). A est-elle diagonalisable ?

Exercice n° 33 (***) :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A. Trouver les sous espaces stables par f dans chacun des cas suivants :

$$\textbf{1)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{2)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{3)}\ A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice n° 34 (***) :

Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 35 :

Commutant de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 36 (**) :

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie non nulle et F un sous-espace non nul de E stable par f. On suppose que f est diagonalisable. Montrer que la restriction de f à F est un endomorphisme diagonalisable de F.

Exercice n° 37 (I) :**

Soit A une matrice carrée réelle de format $n \geqslant 2$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de A est un entier pair.

