Fiche n° 5. Logique.

I Eléments de logique

1 Propositions. Négation d'une proposition.

Définition 1

Une **proposition** ou une **affirmation** ou une assertion est un énoncé qui peut être vrai ou faux.

Par exemple, la phrase « tout nombre premier est impair » est une proposition fausse et la phrase « tout nombre premier supérieur ou égal à 3 est impair » est une proposition vraie.

Définition 2

La **négation** d'une proposition P est la proposition, notée $\overline{\mathrm{P}}$, qui est vraie quand P est fausse et fausse quand P est vraie.

Par exemple, pour tout réel x, la négation de la proposition « $x \geqslant 3$ » est la proposition « $x < 3$ » et n'est pas « $x \leqslant 3$ ».

2 « et » et « ou ».

Définition 3

Soient P et Q deux propositions.
La proposition « P et Q » est la proposition qui est vraie quand les deux propositions P et Q sont vraies et fausse sinon.
La proposition « P ou Q » est la proposition qui est vraie quand au moins une des deux propositions P et Q est vraie et fausse sinon.

3 « Pour tout » et « il existe ».

Quand tous les éléments x d'un ensemble E vérifient une certaine propriété, on emploie l'expression « **pour tout** » ou aussi « **quelque soit** ».

Par exemple, pour tout réel x, $x^2+1>0$.

Quand au moins un des éléments x d'un ensemble E vérifie une certaine propriété, on emploie l'expression « **il existe** ».

Par exemple, il existe un réel x tel que $x^2-1<0$.

4 Equivalences.

Définition 4

Deux propositions P et Q **équivalentes** sont deux propositions qui sont simultanément vraies et simultanément fausses.
Quand deux proposition P et Q sont équivalentes, on écrit « P **équivaut à** Q » ou « P **si et seulement si** Q » ou « $\mathrm{P} \Leftrightarrow \mathrm{Q}$ ».

5 Implications.

Une **implication** est une phrase du type « **Si** on a une propriété P, **alors** on a une propriété Q ». L'implication se note $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$.
Dans l'implication $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$, P est l'**hypothèse** et Q est la **conclusion**.

La **réciproque** de l'implication $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ est l'implication $\mathrm{Q} \Rightarrow \mathrm{P}$. Elle n'a **aucun rapport** avec l'implication $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$.

Par exemple, la réciproque de l'implication « si $x=1$, alors $x^2=1$ » (qui est vraie) est l'implication « si $x^2=1$ alors $x=1$ » (qui est fausse).

La **contraposée** de l'implication $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ est l'implication $\overline{\mathrm{Q}} \Rightarrow \overline{\mathrm{P}}$. Elle est **équivalente** à l'implication $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$.

Par exemple, la contraposée de l'implication « si $x=1$, alors $x^2=1$ » est l'implication « si $x^2 \neq 1$ alors $x \neq 1$ ».

II Quelques types de raisonnements pour faire des démonstrations

1 Le raisonnement par l'absurde.

On veut montrer qu'une proposition P est vraie. **On suppose que** P **est fausse** (c'est-à-dire on suppose que sa négation est vraie) et **on en déduit une absurdité** ou une contradiction ou quelque chose de faux. On en conclut que **la proposition** P **est vraie**.

Par exemple, pour montrer que $\sqrt{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$, on suppose le contraire : $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Cela entraine $b^2 = 2a^2$ et on montre que cette égalité est impossible. On en conclut que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2 Le raisonnement par contraposition.

Pour montrer que $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ est une implication vraie, on peut montrer que sa contraposée $\overline{\mathrm{Q}} \Rightarrow \overline{\mathrm{P}}$ est une implication vraie.

Par exemple, pour montrer que l'implication « si n^2 est pair, alors n est pair » est vraie pour tout entier naturel n, il est plus facile de montrer que l'implication « si n est impair, alors n^2 est impair » est vraie.

3 Le raisonnement par contre-exemple.

Pour montrer qu'une phrase du type « pour tout élément x de E, on a la propriété $\mathrm{P}(x)$ » est fausse, on fournit un contre-exemple.

Par exemple, la phrase « pour tout réel x, $x^2 - 1 \geqslant 0$ » est fausse car pour $x = 0$, $x^2 - 1 = -1$ et donc, pour $x = 0$, $x^2 - 1 < 0$.

4 Le raisonnement par disjonction des cas.

De nouveau, on veut montrer qu'une certaine propriété est vraie pour tous les éléments x d'un ensemble E. On découpe l'ensemble E en sous-ensembles deux à deux disjoints (comme par exemple, un sous-ensemble A de E et son complémentaire $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$). Le découpage crée les **différents cas de figure** à étudier.

Par exemple, pour montrer que le produit de deux entiers naturels consécutifs (c'est-à-dire $n(n+1)$ où n est un entier naturel) est toujours un entier pair, on peut montrer ce résultat quand n est un entier pair (1er cas) puis quand n est un entier impair (2ème cas).