5

Inégalités

Au programme

- √ Maîtriser la manipulation des inégalités.
- √ Savoir étudier des signes.

Table des matières

I Inégalités dans $\mathbb{R}$

A Définitions

Définition 1

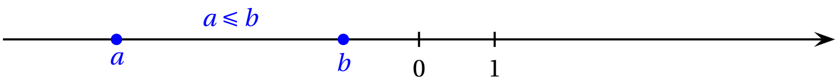
Soient a et b deux réels.

On dit que a est **inférieur ou égal à** b si et seulement si le réel $b-a$ est un réel positif ou nul. On écrit dans ce cas $a \leqslant b$.
On dit que a est **supérieur ou égal à** b si et seulement si le réel $a-b$ est un réel positif ou nul. On écrit dans ce cas $a \geqslant b$.
On dit que a est **strictement inférieur à** b si et seulement si le réel $b-a$ est un réel strictement positif. On écrit dans ce cas $a < b$.
On dit que a est **strictement supérieur à** b si et seulement si le réel $a-b$ est un réel strictement positif. On écrit dans ce cas $a > b$.

On note que l'inégalité $a \leqslant b$ s'écrit aussi $b \geqslant a$ et l'inégalité $a < b$ s'écrit aussi $b > a$. L'inégalité $a \leqslant b$ est vraie quand ou bien l'inégalité $a < b$ est vraie, ou bien l'égalité $a = b$ est vraie. Donc, par exemple, on a $2 \leqslant 3$ et aussi $3 \leqslant 3$.

L'inégalité $a \leqslant b$ est une **inégalité large** et l'inégalité $a < b$ est une **inégalité stricte**.

L'inégalité $a \leqslant b$ se lit sur la droite numérique : le point d'abscisse a est **à gauche** du point d'abscisse b.



La définition fournit déjà une technique pour comparer deux nombres : on analyse le signe de la différence de ces deux nombres. Par exemple, si on veut comparer les deux nombres $3\sqrt{2}+1$ et $2\sqrt{2}+2$, on calcule :

$$\left(3\sqrt{2}+1\right)-\left(2\sqrt{2}+2\right)=3\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}-2=\sqrt{2}-1.$$

Ensuite, $\sqrt{2}>1$ et donc $\sqrt{2}-1>0$. Ceci montre que $2\sqrt{2}+2<3\sqrt{2}+1$.

Exercice 1

1) Quelle est la plus grande des deux fractions $\dfrac{7}{8}$ et $\dfrac{8}{9}$?

2) Pour tout entier naturel n, comparer les fractions $\dfrac{n}{n+1}$ et $\dfrac{n+1}{n+2}$.

Solution 1 :

1) $\dfrac{8}{9}-\dfrac{7}{8}=\dfrac{8\times 8}{9\times 8}-\dfrac{7\times 9}{8\times 9}=\dfrac{64-63}{72}=\dfrac{1}{72}$. Donc, $\dfrac{8}{9}-\dfrac{7}{8}>0$ puis $\dfrac{8}{9}>\dfrac{7}{8}$.

2) Soit n un entier naturel.

$$\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)}-\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2-n(n+2)}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Donc, $\dfrac{n+1}{n+2}-\dfrac{n}{n+1}>0$ puis $\dfrac{n+1}{n+2}>\dfrac{n}{n+1}$.

■

Les premières propriétés des inégalités sont :

Théoreme 1

1) Pour tout réel a, $a \leqslant a$.

2) Pour tous réels a, b et c, **si** $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$, **alors** $a \leqslant c$.

Démonstration :

1) Soit a un réel. On a $a-a=0$. Puisque 0 est un réel positif ou nul, on en déduit que $a \leqslant a$ (et aussi $a \geqslant a$).

2) Soient a, b et c trois réels tels que $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$. Donc, les réels $b-a$ et $c-b$ sont des réels positifs ou nuls. Or, la somme de deux réels positifs ou nuls est un réel positif ou nul. On en déduit que $(b-a)+(c-b)$ est un réel positif ou nul ou encore que $c-a$ est un réel positif ou nul. Ceci montre que $a \leqslant c$.

■

On peut aussi énoncer le résultat immédiat (un réel strictement positif étant en particulier un réel positif ou nul) :

Théoreme 2

Pour tous réels a et b, **si** $a < b$, **alors** $a \leqslant b$.

B Calculer avec des inégalités

On commence par analyser le comportement des inégalités avec l'addition :

Théoreme 3

Pour tous réels a, b et c, $a \leqslant b$, équivaut à $a+c \leqslant b+c$.
Pour tous réels a, b et c, $a < b$, équivaut à $a+c < b+c$.

Démonstration : Soient a, b et c trois réels. On suppose que $a \leqslant b$ et donc que $b-a \geqslant 0$.
Puisque $(b+c)-(a+c) = b+c-a-c = b-a$, on a aussi $(b+c)-(a+c) \geqslant 0$ et donc $a+c \leqslant b+c$. On a montré que pour tous réels a, b et c, si $a \leqslant b$, alors $a+c \leqslant b+c$.

Inversement, soient a, b et c trois réels tels que $a+c \leqslant b+c$. En ajoutant le réel $-c$ aux deux membres de l'inégalité, on obtient $a+c+(-c) \leqslant b+c+(-c)$ ou encore $a \leqslant b$. On a montré que pour tous réels a, b et c, $a \leqslant b$ équivaut à $a+c \leqslant b+c$.

La même démonstration reste valable en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

■

Ainsi, on obtient une inégalité équivalente en ajoutant à chaque membre de cette inégalité un même réel (positif ou négatif). Cette règle de calcul permet de « faire passer un nombre de l'autre côté du signe $\leqslant$ pour l'addition » :

Théoreme 4

Pour tous réels a, b et c, l'inégalité $a+b \leqslant c$ est équivalente à l'inégalité $a \leqslant c-b$.

Démonstration : Soient a, b et c trois réels. L'inégalité $a+b \leqslant c$ équivaut à l'inégalité $a+b+(-b) \leqslant c+(-b)$ ou encore à l'inégalité $a \leqslant c-b$.

■

Enfin, **on peut ajouter membre à membre des inégalités de même sens** :

Théoreme 5

Pour tous réels a, b, c et d, **si** $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, **alors** $a+c \leqslant b+d$.

Démonstration : Soient a, b, c et d quatre réels tels que $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$. Alors $a+c \leqslant b+c$ et $b+c \leqslant b+d$. On en déduit que $a+c \leqslant b+d$.

■

Ainsi par exemple, puisque $\sqrt{2} \leqslant 1{,}5$ et $\sqrt{3} \leqslant 1{,}8$ et $\sqrt{5} \leqslant 2{,}3$, on en déduit que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \leqslant 1{,}5+1{,}8+2{,}3$ ou encore $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \leqslant 5{,}6$.

On ne retranche pas membre à membre des inégalités. Par exemple, si A et B sont deux réels tels que $\mathrm{A} \leqslant 3$ et $\mathrm{B} \leqslant 2$, on ne peut rien dire de $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ (et en particulier, on ne peut pas dire que $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ est inférieur ou égal à 1). Le réel $\mathrm{A}=1$ vérifie $\mathrm{A} \leqslant 3$ et le réel $\mathrm{B}=-6$ vérifie $\mathrm{B} \leqslant 1$ mais $\mathrm{A}-\mathrm{B}=7$ et donc $\mathrm{A}-\mathrm{B} > 1$ ou encore $\mathrm{A}-\mathrm{B} > 3-2$.

Passons maintenant au comportement des inégalités avec la multiplication. On commence par le changement de signe c'est-à-dire la multiplication des deux membres d'une inégalité par -1 :

Théoreme 6

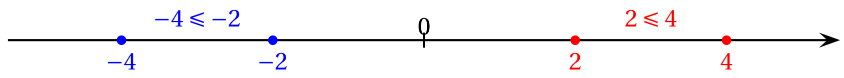
Pour tout réel a et b, $a \leqslant b$ équivaut à $-b \leqslant -a$ (ou aussi $-a \geqslant -b$).
Pour tout réel a et b, $a \geqslant b$ équivaut à $-b \geqslant -a$.
Pour tout réel a et b, $a < b$ équivaut à $-b < -a$.
Pour tout réel a et b, $a > b$ équivaut à $-b > -a$.

Démonstration : Soient a et b deux réels.

Si $a \leqslant b$, alors $b - a \geqslant 0$. Puisque $(-a) - (-b) = b - a$, on en déduit que $(-a) - (-b)$ est un réel positif ou nul et donc que $-b \leqslant -a$. Maintenant, en appliquant ce résultat aux réels $-b$ et $-a$, on obtient : si $-b \leqslant -a$, alors $-(-a) \leqslant -(-b)$ puis $a \leqslant b$.

■

Ainsi, **quand on multiplie les deux membres d'une inégalité par -1, l'inégalité change de sens**. Par exemple, $2 \leqslant 4$ donne $-2 \geqslant -4$ ou aussi $-4 \leqslant -2$:



Revenons sur le problème d'une différence $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ (on rappelle qu'on ne retranche pas membre à membre des inégalités).

Soient A et B deux nombres réels tels que $-1 \leqslant \mathrm{A} \leqslant 4$ et $2 \leqslant \mathrm{B} \leqslant 7$. On veut donner un nombre supérieur à $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ (on dit alors que l'on veut majorer $\mathrm{A} - \mathrm{B}$). On a $\mathrm{A} \leqslant 4$.
D'autre part, $2 \leqslant \mathrm{B}$ et donc $-\mathrm{B} \leqslant -2$. En additionnant membre à membre les inégalités $\mathrm{A} \leqslant 4$ et $-\mathrm{B} \leqslant -2$, on obtient $\mathrm{A} + (-\mathrm{B}) \leqslant 4 + (-2)$ ou encore $\mathrm{A} - \mathrm{B} \leqslant 2$.

De même, $\mathrm{A} \geqslant -1$ et $\mathrm{B} \leqslant 7$ ou encore $-\mathrm{B} \geqslant -7$. Donc, $\mathrm{A} - \mathrm{B} \geqslant -1 - 7 = -8$.

Ainsi, si $-1 \leqslant \mathrm{A} \leqslant 4$ et $2 \leqslant \mathrm{B} \leqslant 7$, alors $-8 \leqslant \mathrm{A} - \mathrm{B} \leqslant 2$.

Théoreme 7

Pour tous réels a, b et c,

1) si $a \leqslant b$ et $c \geqslant 0$, **alors** $ac \leqslant bc$,

2) a) si $c > 0$, alors l'inégalité $a \leqslant b$ équivaut à l'inégalité $ac \leqslant bc$.

b) si $c < 0$, alors l'inégalité $a \leqslant b$ équivaut à l'inégalité $ac \geqslant bc$.

Démonstration : Soient a, b et c trois réels.

1) On suppose que $a \leqslant b$ et que $c \geqslant 0$. Alors, $b - a \geqslant 0$ et $c \geqslant 0$. Puisque le produit de deux réels positifs ou nuls est un réel positif ou nul, $(b - a)c \geqslant 0$ ou encore $bc - ac \geqslant 0$ ou enfin $ac \leqslant bc$. Ainsi, pour tous réels a, b et c, si $a \leqslant b$ et $c \geqslant 0$, alors $ac \leqslant bc$.

2) a) On suppose que $a \leqslant b$ et que $c > 0$. En particulier, $c \geqslant 0$ et donc $ac \leqslant bc$ d'après 1).
Inversement, supposons que $ac \leqslant bc$ et $c > 0$. L'inverse d'un réel strictement positif est un réel strictement positif et donc, en multipliant les deux membres de l'inégalité $ac \leqslant bc$ par le réel positif $\frac{1}{c}$, on obtient $ac \times \frac{1}{c} \leqslant bc \times \frac{1}{c}$ ou encore $a \leqslant b$.

On a montré que pour tous réels a, b et c tels que $c > 0$, l'inégalité $a \leqslant b$ équivaut à l'inégalité $ac \leqslant bc$.

b) On suppose maintenant $c < 0$. Alors $-c > 0$ et donc l'inégalité $a \leqslant b$ équivaut à l'inégalité $a(-c) \leqslant b(-c)$ ou encore à l'inégalité $-ac \leqslant -bc$ ou enfin à l'inégalité $ac \geqslant bc$.

■

La règle de calcul du théorème précédent permet de « faire passer un nombre non nul de l'autre côté du symbole $\leqslant$ pour la multiplication ». Il faut absolument **faire attention au signe de ce nombre** :

Théoreme 8

Pour tous réels a, b et c tels que $c > 0$, l'inégalité $ac \leqslant b$ équivaut à l'inégalité $a \leqslant \frac{b}{c}$.

Pour tous réels a, b et c tels que $c < 0$, l'inégalité $ac \leqslant b$ équivaut à l'inégalité $a \geqslant \frac{b}{c}$.

Démonstration : Soient a, b et c trois réels tels que $c > 0$. L'inégalité $ac \leqslant b$ équivaut à l'inégalité $ac \times \frac{1}{c} \leqslant b \times \frac{1}{c}$ (d'après le théorème 7, 2)a)) c'est-à-dire à l'inégalité $a \leqslant \frac{b}{c}$.

Soient a, b et c trois réels tels que $c < 0$. L'inégalité $ac \leqslant b$ équivaut à l'inégalité $ac \times \frac{1}{c} \geqslant b \times \frac{1}{c}$ (d'après le théorème 7 2)b)) c'est-à-dire à l'inégalité $a \geqslant \frac{b}{c}$.

■

Ainsi, **multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un même réel strictement négatif, change le sens de cette inégalité**.

Exercice 2

Soit x un réel tel que $-2 \leqslant x \leqslant 4$. Donner un encadrement de $-2x+3$.

Solution 2 : Soit x un réel. Si $-2 \leqslant x \leqslant 4$, alors $(-2) \times (-2) \geqslant -2x \geqslant (-2) \times 4$ ou encore $4 \geqslant -2x \geqslant -8$. Ensuite, $4+3 \geqslant -2x+3 \geqslant -8+3$ ou encore $7 \geqslant -2x+3 \geqslant -5$ ou enfin

$$-5 \leqslant -2x+3 \leqslant 7.$$

■

Théoreme 9

Pour tous réels positifs a, b, c et d, **si** $a \leqslant c$ et $b \leqslant d$, **alors** $ab \leqslant cd$.

Démonstration : Soient a, b, c et d quatre réels positifs tels que $a \leqslant c$ et $b \leqslant d$. Alors, $ab \leqslant bc$ et $bc \leqslant cd$ puis $ab \leqslant cd$.

■

Ainsi, on peut multiplier membre à membre des inégalités entre réels positifs. Mais attention,

on ne divise pas membre à membre des inégalités même entre réels strictement positifs.
Par exemple, si A et B sont deux réels strictement positifs tels que $\mathrm{A} \leqslant 6$ et $\mathrm{B} \leqslant 2$, on ne peut rien dire de $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ (et en particulier, on ne peut pas dire que $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \leqslant 3$). Par exemple, le réel $\mathrm{A} = 4$ vérifie $0 < \mathrm{A} \leqslant 6$ et le réel $\mathrm{B} = \frac{1}{2}$ vérifie $0 < \mathrm{B} \leqslant 2$. Mais $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{4}{1/2} = 4 \times 2 = 8$ et donc $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} > 3$ ou encore $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} > \frac{6}{2}$.

Exercice 3

Soit x un réel tel que $-2 \leqslant x \leqslant 4$. Donner un encadrement de $-\frac{4}{x+7}$.

Solution 3 : Soit x un réel. Si $-2 \leqslant x \leqslant 4$, alors $5 \leqslant x+7 \leqslant 11$. En particulier, $x+7$ est un réel strictement positif vérifiant $5 \leqslant x+7$. En divisant les deux membres de cette inégalité par 5 puis par $x+7$, on obtient $\frac{1}{x+7} \leqslant \frac{1}{5}$.
De même, en divisant les deux membres de l'inégalité $x+7 \leqslant 11$ par 11 puis par $x+7$, on obtient $\frac{1}{11} \leqslant \frac{1}{x+7}$.

En résumé, $\frac{1}{11} \leqslant \frac{1}{x+7} \leqslant \frac{1}{5}$. Enfin, en multipliant par -4 les trois membres de cet encadrement, on obtient $-\frac{4}{11} \geqslant -\frac{4}{x+7} \geqslant -\frac{4}{5}$ ou encore $-\frac{4}{5} \leqslant -\frac{4}{x+7} \leqslant -\frac{4}{11}$.

■

II Montrer des inégalités

On met en place quelques techniques pour comparer deux nombres A et B.

Technique 1. On étudie le signe de la différence $\mathrm{B}-\mathrm{A}$.

Exemple. On veut montrer que pour tout réel x, $x^2+3x+1 \geqslant -x-3$. Soit x un réel. On calcule :

$$\left(x^2+3x+1\right)-(-x-3)=x^2+3x+1+x+3=x^2+4x+4=(x+2)^2.$$

Puisque le carré de n'importe quel réel est un réel positif, on a $(x+2)^2 \geqslant 0$ puis $x^2+3x+1 \geqslant -x-3$.

Technique 2. Si A et B sont strictement positifs, **on peut étudier la position de $\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$ par rapport à 1.**

Exemple. n étant un entier naturel donné, on veut comparer $\mathrm{A}=3^n$ et $\mathrm{B}=3^{n+1}$.

On a $\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}=\dfrac{3^{n+1}}{3^n}=3^{n+1-n}=3$. Or $3>1$ et donc $\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}>1$. Puisque $\mathrm{A}>0$, on en déduit que $\mathrm{B}>\mathrm{A}$ (après multiplication des deux membres de l'inégalité par le réel strictement positif A) et donc que $3^{n+1}>3^n$.

Technique 3. On utilise directement les règles de calcul sur les inégalités.

Exemple. On veut montrer que pour tout réel x de $[2,4]$, $x^2+4x+1 \leqslant 33$. Soit x un réel de $[2,4]$.

x est un réel positif tel que $x \leqslant 4$ et encore $0 \leqslant x \leqslant 4$. En multipliant membre à membre les inégalités entre réels positifs $x \leqslant 4$ et $x \leqslant 4$, on obtient $x^2 \leqslant 16$. D'autre part, $x \leqslant 4$ et donc $4x \leqslant 16$. Finalement, $x^2+4x+1 \leqslant 16+16+1$ ou encore $x^2+4x+1 \leqslant 33$.

L'exercice qui suit est un approfondissement prévu par le programme officiel.

Exercice 4

(Comparaison de la moyenne arithmétique et de la moyenne géométrique de deux nombres positifs).

1) Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a<b$. On pose $m=\dfrac{a+b}{2}$ (moyenne arithmétique de a et b) et $g=\sqrt{ab}$ (moyenne géométrique de a et b).

a) Montrer que $g-a=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}(b-a)$. En déduire que $a<g$.

b) Montrer que $m-g=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$. En déduire que $g<m$.

c) Montrer que $m<b$.

On a donc montré que

$$a<g<m<b.$$

2) Une construction géométrique de $\sqrt{ab}$.

On considère un triangle ABC rectangle en A. On note H le pied de la hauteur issue de A (H est le projeté orthogonal du point A sur $[\mathrm{BC}]$). On pose $\mathrm{HB}=a$, $\mathrm{HC}=b$ et on suppose que $a<b$. On pose encore $\mathrm{AH}=x$.

a) Faire un dessin.

b) Montrer que $\mathrm{AH}\times\mathrm{BC}=\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}$.

c) Exprimer AB^2 et AC^2 en fonction de x, a et b.

d) Déduire des questions b) et c) que $\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)=x^2(a+b)^2$.

e) En déduire que $x^2=ab$ puis que $x=\sqrt{ab}$.

f) Compléter le dessin pour illustrer l'inégalité $g<m$ (on construira le demi-cercle de diamètre $[\mathrm{BC}]$ contenant A).

Solution 4 :

1) a) Puisque a et b sont strictement positifs, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ n'est pas nul et on peut écrire

$$g-a=\sqrt{ab}-a=\sqrt{a}\times\sqrt{b}-\sqrt{a}\times\sqrt{a}=\sqrt{a}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$$
$$=\frac{\sqrt{a}\left(\left(\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}(b-a).$$

Ensuite, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}>0$ et d'autre part, $b-a>0$ car $a<b$. On en déduit que $g-a>0$ et donc que $a<g$.

b) $m-g=\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{2\sqrt{ab}}{2}=\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{a}\times\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\right)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$.

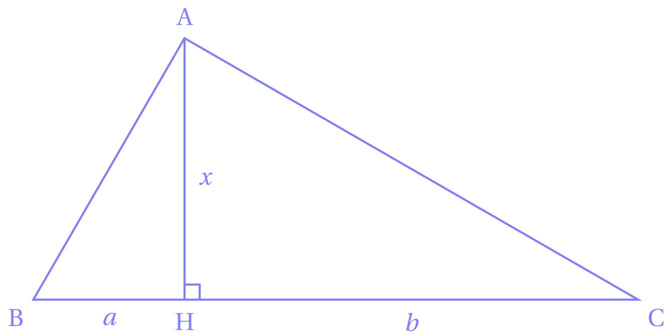
Puisque $a\neq b$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}\neq 0$ puis $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2>0$ et donc $m-g>0$. Ceci montre que $g<m$.

c) $b-m=b-\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{2b}{2}-\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{2b-(a+b)}{2}=\dfrac{2b-a-b}{2}=\dfrac{b-a}{2}$. Puisque $a<b$, on a $b-a>0$ puis $b-m>0$ et donc $m<b$.

On a montré que

$$a<g<m<b.$$

2) a) Graphique.



b) H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. L'aire du triangle ABC est donc $\dfrac{\mathrm{AH}\times\mathrm{BC}}{2}$.
A est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC. Donc, l'aire du triangle ABC est aussi $\dfrac{\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}}{2}$. On en déduit que $\dfrac{\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}}{2}=\dfrac{\mathrm{AH}\times\mathrm{BC}}{2}$ puis que $\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}=\mathrm{AH}\times\mathrm{BC}$.

c) Dans le triangle AHB rectangle en H, d'après le théorème de PYTHAGORE, $\mathrm{AB}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{HB}^2=x^2+a^2$. Dans le triangle AHC rectangle en H, d'après le théorème de PYTHAGORE, $\mathrm{AC}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{HC}^2=x^2+b^2$.

d) En élevant au carré les deux membres de l'égalité de b), on obtient $\mathrm{AB}^2\times\mathrm{AC}^2=\mathrm{AH}^2\times\mathrm{BC}^2$ ou encore

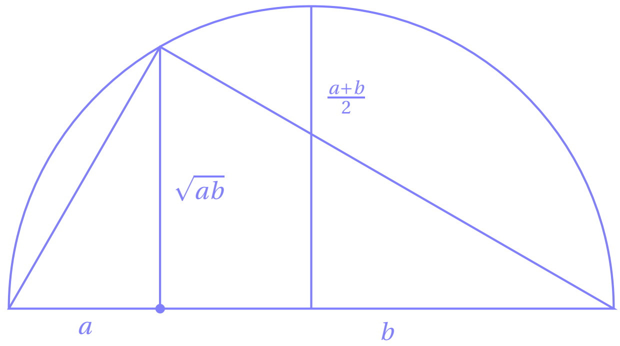
$$\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)=x^2\,(a+b)^2.$$

e) On en déduit que $\left(x^2\right)^2+a^2x^2+b^2x^2+(ab)^2=x^2\left(a^2+2ab+b^2\right)$ puis $\left(x^2\right)^2+a^2x^2+b^2x^2+(ab)^2=a^2x^2+2abx^2+b^2x^2$ puis $\left(x^2\right)^2+a^2x^2+b^2x^2+(ab)^2-a^2x^2-2abx^2-b^2x^2=0$ et donc

$$\left(x^2\right)^2-2abx^2+(ab)^2=0.$$

Par suite, $\left(x^2-ab\right)^2=0$ puis $x^2-ab=0$ puis $x^2=ab$ et donc $x=\sqrt{ab}$ (car $x>0$).

f) Puisque le triangle ABC est rectangle en A, le point A est sur le cercle de diamètre $[\mathrm{BC}]$. La longueur BC est égale à $a+b$ et donc le rayon de ce cercle est $\dfrac{a+b}{2}$. On peut alors visualiser l'inégalité $\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}$ sur le graphique suivant :



■

III Etudes de signes

A Signe d'une fonction affine

Commençons par l'étude de deux exemples. On veut déterminer le signe de $2x+4$ suivant les valeurs de x. Soit x un réel.

Si $2x+4>0$, alors $2x+4-4>-4$ puis $2x>-4$ puis $\dfrac{2x}{2}>-\dfrac{4}{2}$ et donc $x>-2$. Inversement, si $x>-2$, alors $2x>-4$ puis $2x+4>-4+4$ ou encore $2x+4>0$. En résumé, pour tout réel x, $2x+4>0$ équivaut à $x>-2$.
De même, $2x+4<0$ équivaut à $x<-2$ et $2x+4=0$ équivaut à $x=-2$. On visualise ces résultats dans un **tableau de signes** :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
signe de $2x+4$		$-$	0	$+$	

On veut maintenant déterminer le signe de $-2x+4$ suivant les valeurs de x. Soit x un réel.

Si $-2x+4>0$, alors $-2x+4-4>-4$ puis $-2x>-4$ puis $\dfrac{-2x}{-2}<\dfrac{-4}{-2}$ et donc $x<2$. Inversement, si $x<2$, alors $-2x>-4$ puis $-2x+4>-4+4$ ou encore $-2x+4>0$. En résumé, pour tout réel x, $-2x+4>0$ équivaut à $x<2$.
De même, $-2x+4<0$ équivaut à $x>2$ et $-2x+4=0$ équivaut à $x=2$. On visualise de nouveau ces résultats dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $-2x+4$		$+$	0	$-$	

Passons au cas général :

Théoreme 10

Soient a et b deux réels tels que $a\neq 0$. Pour tout réel x, le signe de $ax+b$ est fourni par le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax+b$		$-$ signe de a	0	$+$ signe de a	

Démonstration : Soient a et b deux réels tels que $a\neq 0$.

1er cas. Supposons $a>0$. Pour tout réel x, $ax+b>0$ équivaut à $ax>-b$ puis à $x>-\dfrac{b}{a}$ car $a>0$. De même, pour tout réel x, $ax+b=0$ équivaut à $x=-\dfrac{b}{a}$ et $ax+b<0$ équivaut à $x<-\dfrac{b}{a}$. Donc, si $a>0$, on obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe de $ax+b$	$-$	0	$+$

En lisant de gauche à droite, on a effectivement obtenu $-$ signe de a puis 0 puis $+$ signe de a.

2ème cas. Supposons $a<0$. Pour tout réel x, $ax+b>0$ équivaut à $ax>-b$ puis à $x<-\dfrac{b}{a}$ car $a<0$. De même, pour tout réel x, $ax+b=0$ équivaut à $x=-\dfrac{b}{a}$ et $ax+b<0$ équivaut à $x>-\dfrac{b}{a}$. Donc, si $a<0$, on obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe de $ax+b$	$+$	0	$-$

En lisant de gauche à droite, on a effectivement obtenu $-$ signe de a puis 0 puis $+$ signe de a.

■

B Tableaux de signes

On se propose d'étudier le signe de l'expression $(2x-8)\times(-x+1)$ suivant les valeurs du réel x. On dispose de l'étude du signe d'une fonction affine effectuée au paragraphe précédent et de la règle des signes :

$$\begin{array}{ccccc} + & \times & + & = & + \\ + & \times & - & = & - \\ - & \times & + & = & - \\ - & \times & - & = & + \end{array}$$

Ensuite, pour tout réel x, $2x-8=0$ équivaut à $x=\dfrac{8}{2}$ ou encore $x=4$ et pour tout réel x, $-x+1=0$ équivaut à $-x=-1$ ou encore $x=1$.

D'après l'étude du signe d'une fonction affine,

- si x est un réel de $]-\infty,4[$, alors $2x-8<0$ et si x est un réel de $]4,+\infty[$, $2x-8>0$.
- si x est un réel de $]-\infty,1[$, alors $-x+1>0$ et si x est un réel de $]1,+\infty[$, $-x+1<0$.

Il faut maintenant croiser ces résultats. Trois intervalles d'étude apparaissent : $]-\infty,1[$, $]1,4[$ et $]4,+\infty[$.

- Si x est un réel de l'intervalle $]-\infty,1[$, alors $-x+1>0$ et d'autre part $2x-8<0$ (car $]-\infty,1[\subset]-\infty,4[$). Mais alors $(-x+1)(2x-8)<0$.
- Si x est un réel de l'intervalle $]1,4[$, alors $-x+1<0$ (car $]1,4[\subset]1,+\infty[$) et d'autre part $2x-8<0$ (car $]1,4[\subset]-\infty,4[$). Mais alors $(-x+1)(2x-8)>0$.
- Si x est un réel de l'intervalle $]4,+\infty[$, alors $-x+1<0$ (car $]4,+\infty[\subset]1,+\infty[$) et d'autre part $2x-8>0$. Mais alors $(-x+1)(2x-8)>0$.

Tout ceci est bien long à écrire. On représente tous ces résultats dans un **tableau de signes** :

x	$-\infty$	1		4	$+\infty$
signe de $(2x-8)$	$-$		$-$	0	$+$
signe de $(-x+1)$	$+$	0	$-$		$-$
signe de $(2x-8)(-x+1)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ce tableau se lit verticalement. Par exemple, dans la colonne centrale, on lit que si $1<x<4$ en première ligne, alors $2x-8<0$ en deuxième ligne, $-x+1<0$ en troisième ligne et donc $(2x-8)(-x+1)>0$ en quatrième ligne. Sur les bords de cette colonne centrale, on lit que si $x=4$ en première ligne, alors $2x-8=0$ en deuxième ligne et donc $(2x-8)(-x+1)=0$ en quatrième ligne et si $x=1$ en première ligne, alors $-x+1=0$ en troisième ligne et donc $(2x-8)(-x+1)=0$ en quatrième ligne.

x	$-\infty$		1	$\longleftrightarrow$	4		$+\infty$
signe de $(2x-8)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
signe de $(-x+1)$		$+$	0	$-$	|	$-$	
signe de $(2x-8)(-x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Passons au signe d'un quotient. La règle des signes est la même que celle d'un produit :

$$\begin{array}{ccccc} + & \div & + & = & + \\ + & \div & - & = & - \\ - & \div & + & = & - \\ - & \div & - & = & + \end{array}$$

à la nuance près qu'un dénominateur ne peut pas être égal à 0. On le symbolise par une double barre || dans la ligne donnant le signe du quotient. Par exemple, le signe du quotient $\dfrac{1+x}{1-x}$ suivant les valeurs de x, est donné par

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $(1+x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
signe de $(1-x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	
signe de $(1+x)/(1-x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	

Dans les première et dernière lignes, on lit que si $x<-1$, alors $\dfrac{1+x}{1-x}<0$, si $-1<x<1$, alors $\dfrac{1+x}{1-x}>0$, si $x>1$, alors $\dfrac{1+x}{1-x}<0$, si $x=-1$, alors $\dfrac{1+x}{1-x}=0$ et si $x=1$, $\dfrac{1+x}{1-x}$ n'a pas de sens.