Chapitre 5. Inégalités dans $\mathbb{R}$

Plan du chapitre

© Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.

1 La relation d'ordre usuelle dans $\mathbb{R}$

1.1 Définition et propriétés de la relation $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$

La relation $\leqslant$ (resp. $<$) dans $\mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\leqslant y\Leftrightarrow y-x\in[0,+\infty[\ \text{(resp. } x<y\Leftrightarrow y-x\in]0,+\infty[\text{)}.$$

• On note que « le contraire » de $x\leqslant y$ est $y<x$ car « le contraire » de $y-x\in[0,+\infty[$ est $y-x\in]-\infty,0[$ ou encore $x-y\in]0,+\infty[$.

• On a l'implication : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x<y\Rightarrow x\leqslant y$, la réciproque de cette implication étant fausse.

• Dans le but de réviser un peu, vérifions explicitement que $\leqslant$ une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$ (la relation $<$ n'est pas une relation d'ordre).

- pour tout réel x, $x-x=0\in[0,+\infty[$ et donc $x\leqslant x$. La relation $\leqslant$ est réflexive.
- pour tous réels x et y, si $x\leqslant y$ et $y\leqslant x$, alors $y-x$ et $x-y$ sont dans $[0,+\infty[$, puis $y-x$ est dans $]-\infty,0]\cap[0,+\infty[$ puis $y-x=0$ et finalement $x=y$. La relation $\leqslant$ est anti-symétrique.
- pour tous réels x, y et z, si $x\leqslant y$ et $y\leqslant z$, alors $y-x$ et $z-y$ sont dans $[0,+\infty[$. Mais alors, $z-x=(z-y)+(y-x)$ est dans $[0,+\infty[$ et donc $x\leqslant z$. La relation $\leqslant$ est transitive.

Ceci montre que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Soient alors x et y deux réels. Si $y-x\in[0,+\infty[$, alors $x\leqslant y$. Sinon, $y-x\in]-\infty,0[\subset]-\infty,0]$ puis $x-y=-(y-x)\in[0,+\infty[$ et donc $y\leqslant x$. Ainsi, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x\leqslant y$ ou $y\leqslant x$. Ceci montre que la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.

• La définition de $\leqslant$ n'est pas qu'anecdotique car elle fournit déjà un premier procédé pour démontrer une inégalité : quand on veut montrer que $A\leqslant B$, on peut montrer que $B-A\geqslant 0$ ou encore

pour comparer deux nombres A et B, on peut étudier le signe de $B-A$.

Exercice 1. Montrer que pour tout réel x de $[1,3]$, on a $x^2-3x+2\leqslant x-1$.

Solution 1. Soit $x\in[1,3]$. $(x-1)-\left(x^2-3x+2\right)=-x^2+4x-3=-(x-1)(x-3)\leqslant 0$. Donc,

$$\forall x\in[1,3],\ x^2-3x+2\leqslant x-1.$$

On étudie maintenant le comportement de la relation $\leqslant$ avec les deux opérations de $\mathbb{R}$: $+$ et $\times$.

Théorème 1. (compatibilité avec l'addition)

1) $\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $a\leqslant b\Rightarrow a+c\leqslant b+c$ (on dit que $\leqslant$ est compatible avec l'addition).

2) $\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^3$, $(a\leqslant b$ et $c\leqslant d)\Rightarrow a+c\leqslant b+d$ (on peut additionner membre à membre des inégalités).

Démonstration .

1) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Supposons que $a\leqslant b$. Donc, $b-a\geqslant 0$. Mais alors, $(b+c)-(a+c)=b-a\geqslant 0$ puis $a+c\leqslant b+c$.

2) Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$. Supposons que $a\leqslant b$ et $c\leqslant d$. Alors, d'après 1), $a+c\leqslant b+c$ et $b+c\leqslant b+d$.
Par transitivité, on en déduit que $a+c\leqslant b+d$.

❏

Théorème 2. (compatibilité avec la multiplication par les réels positifs)

1) $\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, $a\leqslant b\Rightarrow a\times c\leqslant b\times c$ (on dit que $\leqslant$ est compatible avec la multiplication par les réels positifs).

2) $\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^3$, $(0\leqslant a\leqslant b$ et $0\leqslant c\leqslant d)\Rightarrow a\times c\leqslant b\times d$ (on peut multiplier membre à membre des inégalités entre réels positifs).

Démonstration .

1) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Supposons que $a\leqslant b$. Donc, $b-a\geqslant 0$. Mais alors, $(b\times c)-(a\times c)=c(b-a)\geqslant 0$ (un produit de deux réels positifs est un réel positif) puis $a\times c\leqslant b\times c$.

2) Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$. Supposons que $0\leqslant a\leqslant b$ et $0\leqslant c\leqslant d$. Alors, d'après 1), $a\times c\leqslant b\times c$ et $b\times c\leqslant b\times d$.
Par transitivité, on en déduit que $a\times c\leqslant b\times d$.

❏

© Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.

1.2 Résolutions d'inéquations. Tableaux de signes

Quand l'inéquation à résoudre est polynomiale, il y a une règle d'or : factoriser, factoriser, factoriser.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^3 + x^2 + x + 1 \leqslant 0$.

Solution 2. Pour tout réel x,

$$x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x+1) + (x+1) = \left(x^2+1\right)(x+1).$$

Pour tout réel x, $x^2 + 1 > 0$ (car $x^2 + 1 \geqslant 1$) et donc

$$x^3 + x^2 + x + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \left(x^2+1\right)(x+1) \Leftrightarrow x + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -1.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est $\mathcal{S} =]-\infty, -1]$.

Dans l'exercice précédent, le facteur $x^2 + 1$ était strictement positif et donc, le produit était du signe de l'unique facteur $x + 1$. Dans des situations plus compliquées, produit ou quotient de multiples facteurs, on peut avoir besoin d'un tableau de signes :

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{(x-1)\left(x^2-6x+8\right)}{\left(x^3+1\right)(-2x+5)} \geqslant 0$.

Solution 3. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \dfrac{5}{2}\right\}$, posons $f(x) = \dfrac{(x-1)\left(x^2-6x+8\right)}{\left(x^3+1\right)(-2x+5)}$.

• Le trinôme $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$ est du signe du coefficient de x^2, à savoir strictement positif, sur $]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[$ et strictement négatif sur $]2, 4[$. De plus, le trinôme $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$ s'annule en 2 et en 4.

• Par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$, $x^3 + 1 > 0 \Leftrightarrow x^3 > (-1)^3 \Leftrightarrow x > -1$.

On détaille alors les signes des différents facteurs du quotient dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		1		2		$\frac{5}{2}$		4		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
x^2-6x+8		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
x^3+1		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-2x+5$		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$f(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

En particulier, $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup[1, 2] \cup \left]-\dfrac{5}{2}, 4\right]$. L'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est donc

$$\mathcal{S} =]-\infty, -1[\cup[1, 2] \cup \left]-\frac{5}{2}, 4\right].$$

1.3 Exemples de majorations ou de minorations

Majorer une expression A, c'est fournir une expression B telle que $A \leqslant B$. Minorer une expression A, c'est fournir une expression B telle que $A \geqslant B$. Les principaux outils, techniques et pièges sont :

• **la définition.**

$$\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2,\ A \leqslant B \Leftrightarrow B - A \geqslant 0.$$

• **la compatibilité avec l'addition.**

$$\forall (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4,\ \left\{\begin{array}{l} A \leqslant C \\ B \leqslant D \end{array}\right. \Rightarrow A + B \leqslant C + D.$$

On peut donc additionner membre à membre des inégalités.

• **la compatibilité avec la multiplication par un réel positif.**

$$\forall (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4,\ \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant A \leqslant C \\ 0 \leqslant B \leqslant D \end{array}\right. \Rightarrow A \times B \leqslant C \times D.$$

On peut multiplier membre à membre des inégalités entre réels positifs.

Exercice 4.

1) Montrer que pour tout réel $n \geqslant 2$, $(n!)^2 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)$.

2) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $k(n+1-k) \leqslant \dfrac{(n+1)^2}{4}$.

3) En déduire que : $\forall n \geqslant 2$, $n! \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

Solution 4.

1) Soit $n \geqslant 2$. $n!^2 = (1 \times 2 \times \ldots \times n) \times (n \times (n-1) \times \ldots \times 1) = (1 \times n) \times (2 \times (n-1)) \times \ldots \times ((n-1) \times 2) \times (n \times 1) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)$.

2) Soit $n \geqslant 2$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. $k(n+1-k) = -k^2 + k(n+1) = -\left(k - \dfrac{n+1}{2}\right)^2 + \dfrac{(n+1)^2}{4} \leqslant \dfrac{(n+1)^2}{4}$.

(on peut aussi écrire : $\dfrac{(n+1)^2}{4} - k(n+1-k) = \dfrac{(n+1)^2}{4} - k(n+1) + k^2 = \left(\dfrac{n+1}{2} - k\right)^2 \geqslant 0$ et donc $k(n+1-k) \leqslant \dfrac{(n+1)^2}{4}$).

3) Soit $n \geqslant 2$. En multipliant membre à membre ces inégalités entre réels positifs, on obtient

$$n!^2 = \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{(n+1)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)^2}{4}\right)^n$$

puis, par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$, $n! \leqslant \sqrt{\left(\dfrac{(n+1)^2}{4}\right)^n} = \left(\sqrt{\dfrac{(n+1)^2}{4}}\right)^n = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

• **Multiplication par un réel négatif.** Changer de signe les deux membres de cette inégalité change le sens de cette inégalité :

$$\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2,\ (A \leqslant B \Rightarrow -A \geqslant -B)$$

(ou aussi $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2,\ (A \leqslant B \Rightarrow -B \leqslant -A)$).
Plus généralement, multiplier les deux membres d'une inégalité par un réel négatif change le sens de cette inégalité. Soient A, B deux réels et C un réel négatif. Si $A \leqslant B$, alors $A \times C \geqslant B \times C$ (ou aussi $B \times C \leqslant A \times C$).

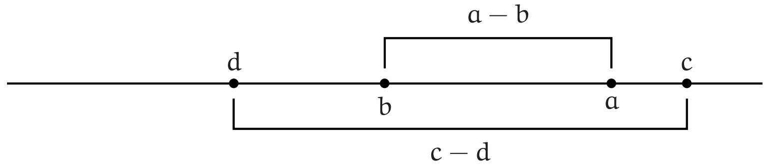
Une conséquence importante des constations précédentes est

on ne retranche pas membre à membre des inégalités.

Dit autrement, $\left\{\begin{array}{l} A \leqslant C \\ B \leqslant D \end{array}\right. \not\Rightarrow A - B \leqslant C - D$. La bonne démarche est

$$\left\{\begin{array}{l} A \leqslant C \\ B \leqslant D \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A \leqslant C \\ -D \leqslant -B \end{array}\right. \Rightarrow A - D \leqslant C - B.$$

Ceci se visualise sur un dessin. Pour majorer la différence $a - b$, on majore a ($a \leqslant c$) et on minore b ($b \geqslant d$).



© Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.

• **Inverses et quotients.** La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ ou encore

$$\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < A \leqslant B \Rightarrow \frac{1}{A} \geqslant \frac{1}{B}.$$

Une conséquence est

on ne divise pas membre à membre des inégalités.

Plus précisément, pour $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$, $\left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant A \leqslant B \\ 0 < C \leqslant D \end{array}\right. \Rightarrow \dfrac{A}{D} \leqslant \dfrac{B}{C}$ (et non pas $\dfrac{A}{C} \leqslant \dfrac{B}{D}$).

Par exemple, cherchons à encadrer $\dfrac{3x-1}{x+4}$ quand $x \in [2, 6]$.

$$2 \leqslant x \leqslant 6 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 5 \leqslant 3x-1 \leqslant 17 \\ 6 \leqslant x+4 \leqslant 10 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 5 \leqslant 3x-1 \leqslant 17 \\ \dfrac{1}{10} \leqslant \dfrac{1}{x+4} \leqslant \dfrac{1}{6} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{5}{10} \leqslant \frac{3x-1}{x+4} \leqslant \frac{17}{6}.$$

Ainsi,

pour majorer un quotient (de réels strictement positifs), on « majore le haut et on minore le bas » et pour minorer ce quotient on « minore le haut et on majore le bas ».

• **Utilisation du sens de variation d'une fonction.**

On rappelle qu'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
- est croissante sur I si et seulement si $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ (a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b))$,
- est décroissante sur I si et seulement si $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ (a \leqslant b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b))$.

(« une fonction croissante conserve les inégalités et une fonction décroissante renverse les inégalités »).

Par exemple, la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{3x-1}{x-4}$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 4[$ car sa dérivée, à savoir $f'\ :\ x \mapsto -\dfrac{11}{(x-4)^2}$ est strictement négative sur cet intervalle. Donc par exemple,

$$-1 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow f(2) \leqslant f(x) \leqslant f(-1) \Rightarrow -\frac{5}{2} \leqslant \frac{3x-1}{x-4} \leqslant \frac{4}{5}.$$

2 Valeur absolue

2.1 Définition et propriétés de la valeur absolue

DÉFINITION 1. Soit x un réel. La **valeur absolue** de x est x si x est positif et $-x$ si x est négatif. Elle est notée $|x|$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \left\{\begin{array}{ll} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{array}\right. .}$$

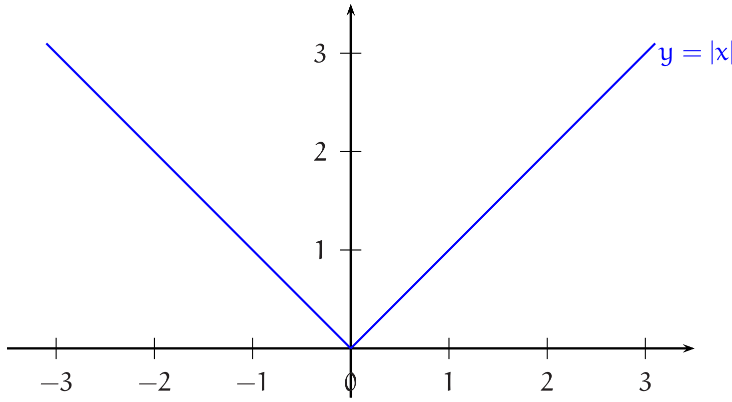
Donc, $|-2,3| = 2,3$ et $|4| = 4$. Dans tous les cas, il s'agissait d'obtenir le nombre sans son signe.

On peut exprimer la valeur absolue d'un nombre à l'aide des fonctions usuelles : $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \sqrt{x^2}$. On retiendra :

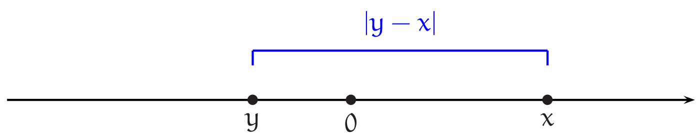
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = |x| \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \left(\sqrt{x}\right)^2 = x.}$$

La fonction « valeur absolue » est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et non dérivable en 0. Si on pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = |x|$, alors, pour $x < 0$, $f'(x) = -1$ et pour $x > 0$, $f'(x) = 1$. Voici le graphe de cette fonction :

© Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.



Rappelons l'interprétation géométrique de la valeur absolue d'un nombre. Sur l'axe réel, pour tout réel x, $|x|$ est la distance usuelle de x à 0 et plus généralement, pour tous réels x et y, $|y-x|$ est la distance usuelle de x à y.



Numériquement, on a

Théorème 3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |y-x| = \begin{cases} y-x & \text{si } y \geqslant x \\ x-y & \text{si } x \geqslant y \end{cases}.$

$|y-x|$ est égal au plus grand des deux nombres x ou y moins le plus petit.

La vision géométrique de la valeur absolue fournit rapidement les résultats qui suivent.

Théorème 4.
❶ $\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ |A| = |B| \Leftrightarrow B = A$ ou $B = -A$.
❷ $\forall (A,B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,\ |A| = B \Leftrightarrow A = B$ ou $A = -B$.
❸ $\forall (A,B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,\ |A| \leqslant B \Leftrightarrow -B \leqslant A \leqslant B$.
❹ $\forall (A,B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,\ |A| \geqslant B \Leftrightarrow A \geqslant B$ ou $A \leqslant -B$.

On doit aussi connaître le lien avec les intervalles. Soient x_0 un réel et r un réel positif. Pour tout réel x, on a :

$$|x-x_0| = r \Leftrightarrow x = x_0 - r \text{ ou } x = x_0 + r$$
$$|x-x_0| \leqslant r \Leftrightarrow x \in [x_0 - r, x_0 + r]$$
$$|x-x_0| < r \Leftrightarrow x \in]x_0 - r, x_0 + r[$$
$$|x-x_0| \geqslant r \Leftrightarrow x \in]-\infty, x_0 - r] \cup [x_0 + r, +\infty[$$
$$|x-x_0| > r \Leftrightarrow x \in]-\infty, x_0 - r[\cup]x_0 + r, +\infty[.$$

Ces résultats sont géométriquement évidents.

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1) $|x+3| = 5$, $|x+3| \leqslant 5$ et $|x+3| > 5$.
2) $|2x-5| = |x^2-4|$.
3) $|x+12| \leqslant |x^2-8|$.

Solution 5.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.
$|x+3| = 5 \Leftrightarrow x = -3-5$ ou $x = -3+5 \Leftrightarrow x = -8$ ou $x = 2$.
$|x+3| \leqslant 5 \Leftrightarrow -3-5 \leqslant x \leqslant -3+5 \Leftrightarrow -8 \leqslant x \leqslant 2$ et $|x+3| > 5 \Leftrightarrow x < -8$ ou $x > 2$.

© Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.

2) Soit x un réel.

$$|2x-5| = |x^2-4| \Leftrightarrow x^2-4 = 2x-5 \text{ ou } x^2-4 = -2x+5 \Leftrightarrow x^2-2x+1 = 0 \text{ ou } x^2+2x-9 = 0$$
$$\Leftrightarrow x \in \left\{1, -1-\sqrt{10}, -1+\sqrt{10}\right\}.$$

3) Plutôt que d'étudier de nombreux cas de figures, il est plus judicieux d'élever au carré les deux membres (positifs) de l'inéquation en remarquant que la carré d'un réel est encore le carré de sa valeur absolue :

$$|x+12| \leqslant |x^2-8| \Leftrightarrow (x+12)^2 \leqslant (x^2-8)^2 \Leftrightarrow ((x^2-8)-(x+12))((x^2-8)+(x+12)) \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-x-20)(x^2+x+4) \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2-x-20 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -4] \cup [5, +\infty[.$$

Analysons maintenant le comportement de la valeur absolue avec les deux opérations $+$ et $\times$. La valeur absolue se comporte bien avec la multiplication et mal avec l'addition, comme le montre le théorème suivant :

Théorème 5 (propriétés algébriques de la valeur absolue).

❶ (valeur absolue et produit)

a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |xy| = |x| \times |y|$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$.

c) $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*,\ \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

d) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |x^n| = |x|^n$.

e) $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ |x^n| = |x|^n$.

❷ (valeur absolue et somme)

a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| \leqslant |x| + |y|$.
De plus, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (|x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$ ou ($x \neq 0$ et $y \neq 0$ et x et y ont même signe)).

b) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-y| \geqslant ||x| - |y||$.

Démonstration . Les résultats du 1) sont immédiats. Pour l'inégalité triangulaire (❷ a)), il suffit de comparer les carrés des deux membres :

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leqslant x^2 + 2|xy| + y^2 = (|x| + |y|)^2.$$

De plus, l'inégalité écrite est une égalité si et seulement si $xy = |xy|$ ce qui équivaut à $xy \geqslant 0$ ou encore à $x = 0$ ou $y = 0$ ou $x \neq 0$ et $y \neq 0$ et x et y de mêmes signes.

Pour l'inégalité ❷ b), on écrit, pour x et y réels donnés : $|x| = |(x-y)+y| \leqslant |x-y| + |y|$ et donc $|x| - |y| \leqslant |x-y|$. Mais alors, en échangeant les rôles de x et y, on a aussi $|y| - |x| \leqslant |x-y| = |y-x|$. Or, l'un des deux nombres $|x| - |y|$ ou $|y| - |x|$ est $||x| - |y||$ et finalement $||x| - |y|| \leqslant |x-y|$.

❑

⇨ Commentaire .

◇ *L'inégalité $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ s'appelle l'**inégalité triangulaire**. Elle sera plus généralement valable dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ où elle s'interprètera effectivement dans un triangle.*
La maîtrise de la valeur absolue est essentielle en analyse et on sera fréquemment amené à majorer ou minorer des valeurs absolues. Les seules règles pratiques à disposition sont les suivantes :

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ ||x| - |y|| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|.}$$

*c'est à dire que la valeur absolue d'une somme ou d'une différence est dans tous les cas plus petite que la **somme** des valeurs absolues et plus grande que la différence de ces valeurs absolues.*

◇ *Dans l'activité qui consiste à majorer une valeur absolue, une erreur est fréquemment commise. En voici un exemple : pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| \leqslant \left|\sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$. **Ceci est faux**. Par exemple, pour $x = -\frac{\pi}{2}$, $\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| = \left|-1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2} > \frac{1}{2}$. L'erreur de manipulation vient du résultat suivant.*

La fonction « valeur absolue » n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
Donc, on ne majore pas à l'« intérieur » d'une valeur absolue.

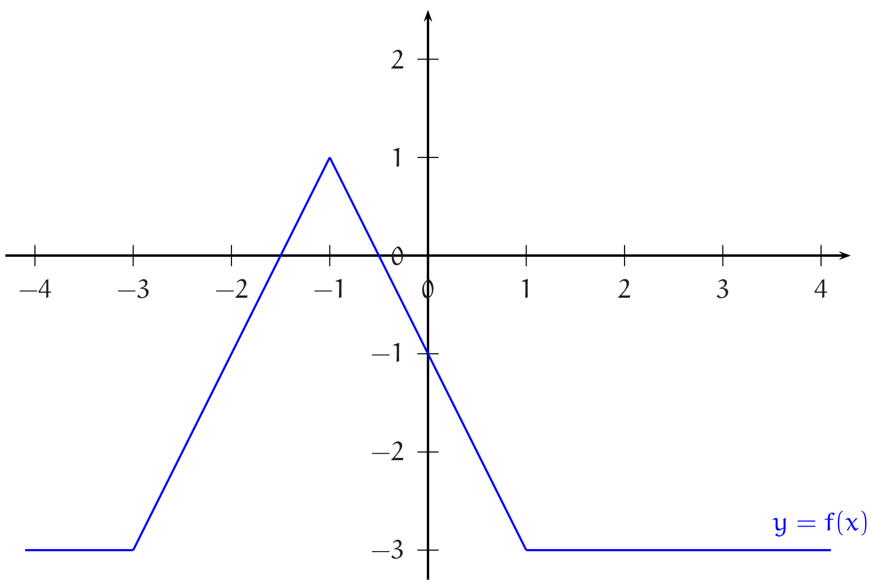
© Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.

2.2 Tableau de valeurs absolues. Fonctions affines par morceaux et continues

On se contentera de l'étude d'un exemple. On veut construire le graphe de la fonction $f\ :\ x \mapsto |x+3|-2|x+1|+|1-x|-3$. Pour cela, on a besoin d'une expression simplifiée de f, c'est à dire sans valeurs absolues. Par exemple, si $-3 \leqslant x \leqslant -1$, alors $x+3 \geqslant 0$, $x+1 \leqslant 0$ et $1-x \geqslant 0$, ce qui permet d'écrire $|x+3| = x+3$, $|x+1| = -x-1$ et $|1-x| = 1-x$. On peut représenter les différents cas de figure dans un **tableau de valeurs absolues** :

x	$-\infty$ $\quad$ -3	-1	1	$+\infty$
$\lvert x+3\rvert$	$-x-3$	$x+3$	$x+3$	$x+3$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\lvert 1-x\rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$
$f(x)$	-3	$2x+3$	$-2x-1$	-3

On est alors en mesure de construire le graphe de cette fonction.



On peut noter que l'utilisation d'un tableau n'est absolument pas obligatoire. Il est en fait bien plus efficace d'écrire en lignes. Par exemple, pour $-3 \leqslant x \leqslant -1$, $|x+3|-2|x+1|+|1-x|-3 = (x+3)-2(-x-1)+(1-x)-3 = 2x+3$.

Une telle fonction est appelée **fonction affine par morceaux**. Les fonctions du type $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |x-a_k|$ $(*)$, $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ réels, $a_1,\dots,a_n$ réels deux à deux distincts, ont ce type de graphe. Inversement, on peut montrer que si f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$ et affine par morceaux sur ce segment alors f peut s'écrire sous la forme $(*)$.

2.3 Minimum et maximum d'un couple de réels

Définition 2. Soient x et y deux réels.
Le plus grand de ces deux réels est appelé le **maximum** de l'ensemble des deux réels x et y et est noté $\text{Max}\{x,y\}$.
Le plus petit de ces deux réels est appelé le **minimum** de l'ensemble des deux réels x et y et est noté $\text{Min}\{x,y\}$.

On a immédiatement :

Théorème 6.

❶ $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \text{Max}\{x,-x\}$.

❷ $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant |x|$ et $-x \leqslant |x|$.

Théorème 7.

❶ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{Max}(x,y) = \dfrac{1}{2}(x+y+|x-y|)$

❷ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{Min}(x,y) = \dfrac{1}{2}(x+y-|x-y|)$.

© Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.

Démonstration . Soient x et y deux réels. $|y-x|$ est le plus grand de ces deux nombres moins le plus petit. En ajoutant $x+y$ à cette différence, on fait disparaître le plus petit des deux et on obtient deux fois le plus grand. Pour l'autre égalité, l'expression $-|x-y|$ peut être pensée comme le plus petit des deux nombres moins le plus grand, et le raisonnement est identique.

On peut aussi constater que $x+y = \text{Max}\{x,y\} + \text{Min}\{x,y\}$ et que $|x-y| = \text{Max}\{x,y\} - \text{Min}\{x,y\}$ puis ajouter ou retrancher membre à membre ces deux égalités. ❑

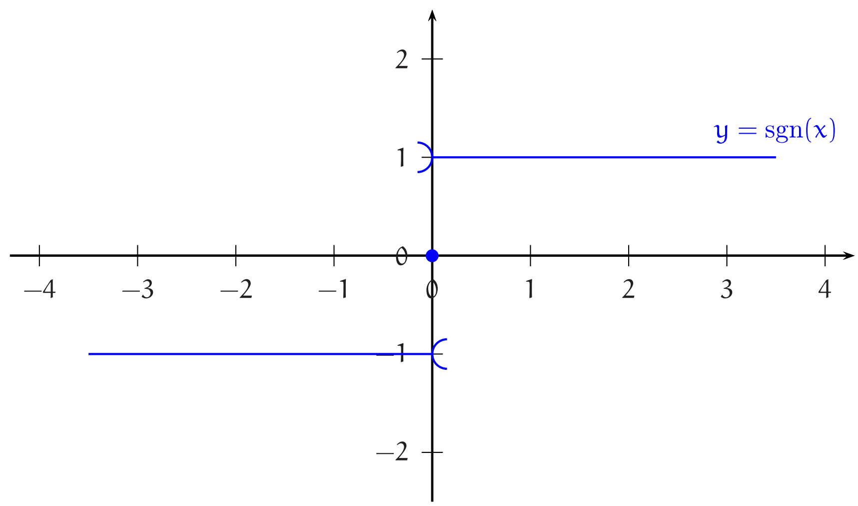
2.4 La fonction « signe »

Définition 3. Soit x un réel. Si x est non nul, le signe de x, noté $\text{sgn}(x)$, est le nombre $\dfrac{x}{|x|}$ et si x est nul le signe de x est 0.

On obtient immédiatement à partir de la définition

Théorème 8. $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Le graphe de la fonction signe est le suivant :



Théorème 9. $\forall x \in \mathbb{R},\ x = \text{sgn}(x) \times |x|$.

Ce résultat signifie qu'un réel est constitué de son signe et de sa valeur absolue qui, elle, ne comporte plus de signe.

La fonction signe est volontiers utilisée pour diminuer la quantité de calcul. Par exemple, pour simplifier ou dériver l'expression $\dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$, plutôt que de faire deux calculs, un si $x > 0$ et un si $x < 0$, on peut n'en faire qu'un seul : soient x un réel non nul et ε le signe de x. Alors,

$$\frac{\sqrt{|x|}}{x} = \frac{\sqrt{\varepsilon x}}{\varepsilon \times \varepsilon x} = \frac{\sqrt{\varepsilon x}}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon x}\sqrt{\varepsilon x}} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon x}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|x|}} = \frac{\text{sgn}(x)}{\sqrt{|x|}}.$$

Si maintenant on doit dériver cette expression, on peut de nouveau n'effectuer qu'un seul calcul sans séparer les cas $x < 0$ et $x > 0$.

$$\left(\frac{\sqrt{|x|}}{x}\right)' = \left(\varepsilon \times (\varepsilon x)^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2} \times \varepsilon^2 \times (\varepsilon x)^{-3/2} = \frac{-1}{2|x|^{3/2}}.$$

Le signe d'un réel non nul obéit aux règles de calcul évidentes suivantes :

Soient x un réel non nul et ε le signe de x.
1) $x = \varepsilon|x|$, 2) $|x| = \varepsilon x$, 3) $\varepsilon^2 = 1$, 4) $\dfrac{1}{\varepsilon} = \varepsilon$.

3 Parties de $\mathbb{R}$ majorées et/ou minorées

DÉFINITION 4. Soit A une partie non vide $\mathbb{R}$.

A est **majorée** $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}/\ \forall x \in A,\ x \leqslant M$.
Soit $M \in \mathbb{R}$. M est un **majorant** de $A \Leftrightarrow \forall x \in A,\ x \leqslant M$.

A est minorée $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}/\ \forall x \in A,\ x \geqslant m$.
Soit $m \in \mathbb{R}$. M est un **minorant** de $A \Leftrightarrow \forall x \in A,\ x \geqslant m$.

A est bornée $\Leftrightarrow A$ est minorée et majorée $\Leftrightarrow \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2/\ \forall x \in A,\ m \leqslant x \leqslant M$.

On peut noter que A n'est pas majorée $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in A/\ x > M$.

Quand on veut montrer qu'un partie est bornée, le théorème suivant simplifie parfois le travail à effectuer.

Théorème 10. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

A est bornée $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}/\ \forall x \in A,\ |x| \leqslant M$.

En notant $|A|$ l'ensemble des $|x|$ où $x \in A$, on a donc : A bornée $\Leftrightarrow |A|$ majorée.

DÉMONSTRATION .

• Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in A$, $|x| \leqslant M$. Alors, pour tout x de A, $-M \leqslant x \leqslant M$. On en déduit que A est bornée.

• Supposons A bornée. Il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout x de A, $m \leqslant x \leqslant M$.
Alors pour tout $x \in A$, $-\mathrm{Max}\{|m|, |M|\} \leqslant x \leqslant \mathrm{Max}\{|m|, |M|\}$ puis pour tout x de A, $|x| \leqslant \mathrm{Max}\{|m|, |M|\}$. Ceci montre que la partie $|A|$ est majorée.

❏

Quand on majore une partie $A = \{x \in A\}$ au sens de la définition précédente, le majorant fourni ne doit pas être fonction de x. Par exemple, si $A = \left\{\dfrac{3x-1}{x+2},\ x \in [1, +\infty[\right\}$, il est tout à fait exact que pour tout x de $[1, +\infty[$,

$$\frac{3x-1}{x+2} \leqslant \frac{3x-1}{x+0} = 3 - \frac{1}{x}$$

ou encore il est tout à fait exact que pour tout x de $[1, +\infty[$, $\dfrac{3x-1}{x+2}$ est majoré par $3 - \dfrac{1}{x}$. Mais cette constatation ne permet en aucune façon d'affirmer que la partie A est majorée. Par contre, pour tout réel x de $[1, +\infty[$,

$$\frac{3x-1}{x+2} \leqslant \frac{3x+0}{x+0} = 3.$$

La partie A est donc une partie majorée de $\mathbb{R}$ et le nombre 3 est un majorant de la partie A.

4 Partie entière d'un réel

4.1 Définition et propriétés de la fonction partie entière

Soit x un réel. $\{k \in \mathbb{Z}/\ k \leqslant x\}$ est une partie non vide et majorée (par x) de $\mathbb{Z}$. Donc, $\{k \in \mathbb{Z}/\ k \leqslant x\}$ admet un plus grand élément. On peut alors donner la définition suivante :

DÉFINITION 5. Soit x un réel. La partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$ (ou aussi $E(x)$), est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Par exemple, $\lfloor 2,7 \rfloor = 2$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$, $\lfloor -1,2 \rfloor = -2$. A partir de la définition précédente, on a immédiatement :

Théorème 11. Soit x un réel et k un entier relatif.

$$\boxed{k = \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow k \leqslant x < k+1 \Leftrightarrow x-1 < k \leqslant x}.$$

On a ainsi deux encadrements à connaître :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \text{ et } x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.}$$

© Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.

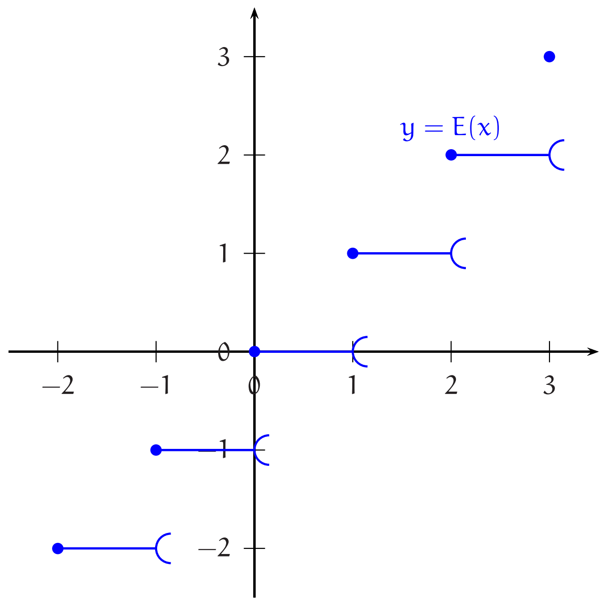
Théorème 12. La fonction « partie entière » est croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soient x et y deux réels tels que $x \leqslant y$. $\lfloor x \rfloor$ est un entier relatif inférieur ou égal à x et donc à y. Comme $\lfloor y \rfloor$ est le plus grand des entiers relatifs inférieurs ou égaux à y, on a bien $\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$. ❑

Théorème 13. $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, puis $\lfloor x \rfloor + 1 \leqslant x + 1 < (\lfloor x \rfloor + 1) + 1$. Comme $\lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbb{Z}$, on a montré que $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$. ❑

Voici le graphe de la fonction « partie entière ».



Le petit arc de cercle à la fin de chaque trait horizontal à droite signifie que le dernier point n'est pas compris, comme le [à droite dans $[2, 3[$ signifie que 3 n'est pas compris. La fonction « partie entière » n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Elle est continue en tout réel non entier, continue à droite mais pas à gauche en tout entier.

En général $\lfloor x+y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
Par exemple, $\lfloor 2,7+3,6 \rfloor = \lfloor 6,3 \rfloor = 6$ alors que $\lfloor 2,7 \rfloor + \lfloor 3,6 \rfloor = 2+3 = 5$.

Exercice 6. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lfloor x+y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

Solution 6.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ et $\lfloor y \rfloor \leqslant y$ et donc, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x+y$. Par suite, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ est un entier relatif inférieur ou égal à $x+y$. Puisque $\lfloor x+y \rfloor$ est le plus grand de ces entiers, on a montré que $\lfloor x+y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

Exercice 7. Soit x un réel. Déterminer l'unique entier relatif k tel que $x - 2k\pi \in [0, 2\pi[$.

Solution 7. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

$$0 \leqslant x - 2k\pi < 2\pi \Leftrightarrow 2k\pi \leqslant x < 2(k+1)\pi \Leftrightarrow k \leqslant \frac{x}{2\pi} < k+1 \Leftrightarrow k = \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor.$$

Exercice 8. n étant un entier naturel non nul donné, combien y-a-t-il d'entiers pairs entre 0 et n, 0 et n compris ? Combien y-a-t-il d'entiers impairs ?

Solution 8. Un entier pair est un entier de la forme $2p$, où p est un entier. Or,

$$0 \leqslant 2p \leqslant n \Leftrightarrow 0 \leqslant p \leqslant \frac{n}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant p \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Le nombre d'entiers pairs éléments de $[\![0, n]\!]$ est donc le nombre d'entiers de la forme $2p$ où p est un entier vérifiant $0 \leqslant p \leqslant E\left[\dfrac{n}{2}\right]$. Il y a ainsi $E\left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$ (ou encore $E\left[\dfrac{n}{2} + 1\right]$) entiers pairs compris au sens large entre 0 et n.

De même, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant 2p + 1 \leqslant n \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant p \leqslant \frac{n-1}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant p \leqslant E\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Il y a donc $E\left[\dfrac{n-1}{2}\right] + 1$ ou encore $E\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ entiers impairs compris au sens large entre 0 et n.

Exercice 9. Trouver l'exposant de 2 et de 5 dans la décomposition en facteurs premiers de $1000!$. Par combien de zéros finit l'écriture décimale $1000!$?

Solution 9. $1000!$ est le produit $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \ldots \times 998 \times 999 \times 1000$. Dans la décomposition en facteurs premiers des nombres 2, 6, 10, 14..., c'est à dire des nombres pairs non divisibles par 4, le facteur premier 2 apparaît une et une seule fois. Dans la décomposition en facteurs premiers des nombres 4, 12, 20,..., c'est à dire des nombres divisibles par 4 mais non divisibles par 8, le facteur premier 2 apparaît exactement deux fois. Dans la décomposition en facteurs premiers des nombres 8, 24, 40..., c'est à dire des nombres divisibles par 8 mais non divisibles par 16, le facteur premier 2 apparaît exactement trois fois.

Pour obtenir, l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de $1000!$, nous allons compter 1 pour chaque multiple de 2 inférieur à 1000, puis rajouter 1 pour chaque multiple de 4 inférieur à 1000, puis rajouter encore 1 pour chaque multiple de 8 inférieur à 1000, et encore 1 par multiple de 16,... et encore 1 par multiple de 512. Ainsi, par exemple, pour l'entier 24, nous l'aurons compté une fois en tant que multiple de 2, une fois en tant que multiple de 4 et une fois en tant que multiple de 8, soit au total 3 fois, 3 étant l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de 24.

Il y a $E\left[\dfrac{1000}{2}\right] = 500$ nombres pairs compris au sens large entre 1 et 1000 ($1 \leqslant 2p \leqslant 1000 \Leftrightarrow 1 \leqslant p \leqslant 500$), puis $E\left[\dfrac{1000}{4}\right] = 250$ multiple de 4, puis $E\left[\dfrac{1000}{8}\right] = 125$, multiple de 8,... et un multiple de 512 compris au sens large entre 1 et 1000. L'exposant de 2 cherché est donc

$$E\left[\frac{1000}{2}\right] + E\left[\frac{1000}{4}\right] + \ldots E\left[\frac{1000}{512}\right] = \sum_{k=1}^{9} E\left[\frac{1000}{2^k}\right] = 500 + 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 994.$$

De même, l'exposant de 5 dans la décomposition en facteurs premiers de $1000!$ est

$$\sum_{k=1}^{4} E\left[\frac{1000}{5^k}\right] = 200 + 40 + 8 + 1 = 249.$$

L'entier $1000!$ peut donc s'écrire $2^{994} \times 3^{\alpha} \times 5^{249} \times 7^{\beta} \ldots.$ ou encore $(2 \times 5)^{249} \times 2^{745} \times 3^{\alpha} \times 5^{0} \times 7^{\beta} \ldots$ en enfin $10^{249} \times K$ où K est un entier non divisible par 10 car non divisible par 5. Finalement,

l'écriture décimale de $1000!$ se termine par 249 zéros.

4.2 La fonction partie décimale

Définition 6. La partie décimale d'un réel x, notée $d(x)$ est la différence entre ce réel et sa partie entière.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ d(x) = x - E(x).}$$

L'égalité ci-dessus s'écrit aussi $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = E(x) + d(x)$ et signifie que tout réel est somme de sa partie entière et de sa partie décimale.

Exemple. $3,7 = 3 + 0,7$ et donc $d(3,7) = 0,7$. $-3,7 = -4 + 0,3$ et donc $d(-3,7) = 0,3$.

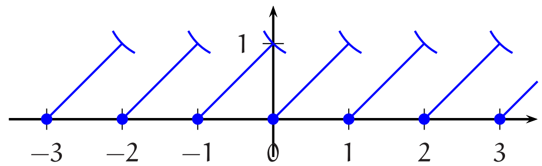
Théorème 14. La fonction d est 1-périodique ou encore $\forall x \in \mathbb{R}$, $d(x+1) = d(x) + 1$.

Démonstration . Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après le théorème 55, page 53,

$$d(x+1) = x+1-E(x+1) = x+1-(E(x)+1) = x-E(x) = d(x).$$

❏

Sinon, voici le graphe de la fonction « partie décimale » :



© Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.