Planche n° 4. Trigonométrie. Corrigé

Exercice n° 1

Dans ce qui suit, on note $\mathscr{S}_{\mathrm{I}}$ l'ensemble des solutions de l'équation proposée sur un intervalle I donné.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. Donc, $\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \pi\mathbb{Z}$. Ensuite, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin x = 1 \Leftrightarrow x \in \dfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. Donc, $\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. Ensuite, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin x = -1 \Leftrightarrow x \in -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. Donc, $\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. Ensuite, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbb{Z}$. Donc, $\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = 2\pi\mathbb{Z}$. Ensuite, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, 2\pi\}$.

5) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cos x = -1 \Leftrightarrow x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Donc, $\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Ensuite, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{\pi\}$.

6) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Donc, $\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Ensuite, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

7) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\tan x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. Donc, $\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \pi\mathbb{Z}$. Ensuite, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.

8) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\tan x = 1 \Leftrightarrow x \in \dfrac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. Donc, $\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \dfrac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. Ensuite, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}$.

Exercice n° 2

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\tan x = -1 \Leftrightarrow x \in -\dfrac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \in \dfrac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right\}$.

5) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\dfrac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$.

6) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(-\dfrac{3\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}$.

Exercice n° 3

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin(2x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \in \left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right)$.
De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{17\pi}{12}\right\}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin\dfrac{x}{2} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} \in \left(\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\dfrac{7\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{5\pi}{2} + 4\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\dfrac{7\pi}{2} + 4\pi\mathbb{Z}\right)$.
De plus, $\mathscr{S}_{[0,4\pi]} = \left\{\dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{2}\right\}$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\tan(5x) = 1 \Leftrightarrow 5x \in \dfrac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi}{5}\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{20}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{9\pi}{20}, \dfrac{13\pi}{20}, \dfrac{17\pi}{20}\right\}$.

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cos(2x) = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos(2x) = \dfrac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \Leftrightarrow \cos(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$ ou aussi $\cos(2x) = \cos^2 x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1$ ou $\cos x = -1 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.

5) Soit $x \in \mathbb{R}$. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2}$ ou $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$.

6) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cos(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \in \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.

7) Soit $x \in \mathbb{R}$. $|\cos(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \dfrac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.

8) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \dfrac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.

9) Soit $x \in \mathbb{R}$. $|\sin(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.

10) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sin x = \tan x &\Leftrightarrow \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x \times \frac{\cos x - 1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow (\sin x = 0 \text{ ou } \cos x = 1) \text{ et } \cos x \neq 0\\ &\Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.

11) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sin(2x) + \sin x = 0 &\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(x+\pi) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ 2x = x + \pi + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}/\ 2x = \pi - (x+\pi) + 2k\pi)\\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \pi + 2k\pi) \text{ ou } \left(\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{2k\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

Donc, $\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = (\pi + 2\pi\mathbb{Z}) \cup \left(\dfrac{2\pi}{3}\mathbb{Z}\right)$ puis, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{0, \dfrac{2\pi}{3}, \pi, \dfrac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}$.

12) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2 &\Leftrightarrow 6\cos^2 x - 4(1-\cos^2 x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

De plus, $\mathscr{S}_{[-\pi,\pi]} = \left\{-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

Exercice n° 4

1) Pour $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos x \leqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\pi, -\dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$.

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin x \geqslant -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right]$.

3) Pour $x \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned}\cos x > \cos\frac{x}{2} &\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \left(2\cos\frac{x}{2} + 1\right)\left(\cos\frac{x}{2} - 1\right) > 0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2} + 1 < 0 \text{ et } \cos\frac{x}{2} \neq 1\\ &\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right[\\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]\frac{4\pi}{3} + 4k\pi, \frac{8\pi}{3} + 4k\pi\right[\Leftrightarrow x \in \left]\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right].\end{aligned}$$

4) Pour $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos^2 x \geqslant \cos(2x) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \geqslant \cos(2x) \Leftrightarrow \cos(2x) \leqslant 1$. Puisque pour tout réel x, $\cos(2x) \leqslant 1$, $\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

5) Pour $x \in [0, 2\pi]$, $\cos^2 x \leqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \cos x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$.

6) Pour $x \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned}\cos\frac{x}{3} \leqslant \sin\frac{x}{3} &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{3} \geqslant 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ 2k\pi \leqslant \frac{x}{3} - \frac{\pi}{4} \leqslant \pi + 2k\pi\\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ \frac{3\pi}{4} + 6k\pi \leqslant x \leqslant 3\pi + \frac{3\pi}{4} + 6k\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant 2\pi\end{aligned}$$

Exercice n° 5

$\cos^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1}{2}\left(1+\cos\left(2\times\dfrac{\pi}{8}\right)\right)=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$, et puisque $\cos\dfrac{\pi}{8}>0$,

$$\boxed{\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.}$$

De même, puisque $\sin\dfrac{\pi}{8}>0$, $\sin\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1-\cos\left(2\times\dfrac{\pi}{8}\right)\right)}$ et

$$\boxed{\sin\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.}$$

Exercice n° 6

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

De même,

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\text{ et }\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.}$$

Exercice n° 7

1) Si a est dans $]0,\pi[$ alors, pour tout entier naturel non nul k, $\dfrac{a}{2^k}$ est dans $]0,\pi[$ et donc $\sin\dfrac{a}{2^k}\neq 0$. De plus, puisque $\sin\left(2\times\dfrac{a}{2^k}\right)=2\sin\left(\dfrac{a}{2^k}\right)\cos\left(\dfrac{a}{2^k}\right)$, on a $\cos\left(\dfrac{a}{2^k}\right)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{a}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\dfrac{a}{2^k}\right)}$. Par suite,

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)=\frac{1}{2^n}\frac{\sin a}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\times\frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2^2}\right)}\times\ldots\times\frac{\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}=\frac{\sin a}{2^n\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}.$$

2) $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \cos\left(\dfrac{a}{2^k}\right)>0$ car $\dfrac{a}{2^k}$ est dans $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. Ensuite,

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)=\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)=\ln\left(\frac{\sin a}{2^n\sin\frac{a}{2^n}}\right)=\ln\left(\frac{\sin a}{a}\right)-\ln\left(\frac{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}{\frac{a}{2^n}}\right).$$

Maintenant, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}{\frac{a}{2^n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ et donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)=\ln\left(\frac{\sin a}{a}\right).$$

Exercice n° 8

1) Soit $\theta\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos(3\theta)&=\cos(2\theta+\theta)=\cos(2\theta)\cos(\theta)-\sin(2\theta)\sin(\theta)=\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta\\&=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin(3\theta)&=\sin(2\theta+\theta)=\sin(2\theta)\cos(\theta)+\cos(2\theta)\sin(\theta)=2\sin\theta\cos^2\theta+\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\sin\theta\\&=3\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos(3\theta)=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta\text{ et }\sin(3\theta)=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta.}$$

Ensuite, $\tan(3\theta)$ et $\tan\theta$ existent $\Leftrightarrow 3\theta\notin\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$ et $\theta\notin\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow 3\theta\notin\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow\theta\notin\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}\mathbb{Z}$.

Soit donc $\theta\notin\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}\mathbb{Z}$.

$$\tan(3\theta)=\frac{\sin(3\theta)}{\cos(3\theta)}=\frac{3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta}{\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta}=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta},$$

après division du numérateur et du dénominateur par le réel non nul $\cos^3\theta$.

$$\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right),\ \tan(3\theta)=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}.}$$

2) Soit $a\neq\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

1ère méthode. a est bien sûr racine de l'équation proposée, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}=\frac{3a-a^3}{1-3a^2}&\Leftrightarrow\left(3x-x^3\right)\left(1-3a^2\right)=\left(1-3x^2\right)\left(3a-a^3\right)\ \left(\text{car }\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\text{ ne sont pas solution de l'équation}\right)\\&\Leftrightarrow\left(3a^2-1\right)x^3-3\left(a^3-3a\right)x^2-3\left(3a^2-1\right)x+a^3-3a=0\\&\Leftrightarrow(x-a)\left(\left(3a^2-1\right)x^2+8ax-a^2+3\right)=0.\end{aligned}$$

Le discriminant réduit du trinôme $\left(3a^2-1\right)x^2+8ax-a^2+3$ vaut :

$$\Delta'=16a^2-(3a^2-1)(-a^2+3)=3a^4+6a^2+3=\left(\sqrt{3}\left(a^2+1\right)\right)^2>0.$$

L'équation proposée a donc trois racines réelles :

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{a,\frac{4a-\sqrt{3}\left(a^2+1\right)}{1-3a^2},\frac{4a+\sqrt{3}\left(a^2+1\right)}{1-3a^2}\right\}.}$$

2ème méthode. Il existe un unique réel $\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right\}$ tel que $a=\tan\alpha$. De même, si x est un réel distinct de $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, il existe un unique réel $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right\}$ tel que $x=\tan\theta$. Comme $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ne sont pas solution de l'équation proposée, on a :

$$\begin{aligned}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}=\frac{3a-a^3}{1-3a^2}&\Leftrightarrow\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}\Leftrightarrow\tan(3\theta)=\tan(3\alpha)\\&\Leftrightarrow 3\theta\in3\alpha+\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow\theta\in\alpha+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Ceci refournit les solutions $x=\tan\alpha=a$, puis

$$x=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{a+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}a}=\frac{\left(a+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}a\right)}{1-3a^2}=\frac{4a+\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2},$$

et $x=\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{4a-\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2}$.

Exercice n° 9 Pour $x\in[0,\pi]$, posons $f(x)=\tan x+\tan(2x)+\tan(3x)+\tan(4x)$.

$$\begin{aligned}f(x)\text{ existe}&\Leftrightarrow\tan x,\ \tan(2x),\ \tan(3x)\text{ et }\tan(4x)\text{ existent}\\&\Leftrightarrow\left(x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)\text{ et }\left(2x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)\text{ et }\left(3x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)\text{ et }\left(4x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)\\&\Leftrightarrow\left(x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)\text{ et }\left(x\notin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)\text{ et }\left(x\notin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right)\text{ et }\left(x\notin\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\mathbb{Z}\right)\\&\Leftrightarrow x\notin\left\{\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{8}\right\}.\end{aligned}$$

Ainsi, f est définie et continue sur

$$\left[0,\frac{\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{8},\pi\right].$$

Sur chacun des dix intervalles précédents, f est définie, continue et strictement croissante en tant que somme de fonctions strictement croissantes. La restriction de f à chacun de ces dix intervalles est donc bijective de l'intervalle considéré sur l'intervalle image, ce qui montre déjà que l'équation proposée, que l'on note dorénavant (E), a au plus une solution par intervalle et donc au plus dix solutions dans $[0,\pi]$.

Sur $I=\left[0,\frac{\pi}{8}\right[$ ou $I=\left]\frac{7\pi}{8},\pi\right]$, puisque $f(0)=f(\pi)=0$, (E) a exactement une solution dans I. Ensuite, dans l'expression de somme f, une et une seule des quatre fonctions est un infiniment grand en chacun des nombres considérés ci-dessus, à l'exception de $\frac{\pi}{2}$. En chacun de ses nombres, f est un infiniment grand. L'image par f de chacun des six intervalles ouverts n'ayant pas $\frac{\pi}{2}$ pour borne est donc $]-\infty,+\infty[$ et (E) admet exactement une solution dans chacun de ces intervalles. Ceci porte le total à $6+2=8$ solutions.

En $\frac{\pi}{2}^-$, $\tan x$ et $\tan(3x)$ tendent vers $+\infty$ tandis que $\tan(2x)$ et $\tan(4x)$ tendent vers 0. f tend donc vers $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}^-$, et de même f tend vers $-\infty$ en $\frac{\pi}{2}^+$. L'image par f de chacun des deux derniers intervalles est donc encore une fois $]-\infty,+\infty[$ et finalement,

$$\boxed{(E)\text{ admet exactement dix solutions dans }[0,\pi].}$$

Exercice n° 10

1) Pour x réel , on a : $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos(2x))$ et donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto\cos^2 x$ est la fonction $x\mapsto\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin(2x)$.

2) Pour x réel , on a : $\cos^2 x\sin^2 x=(\cos x\sin x)^2=\frac{1}{4}\sin^2(2x)=\frac{1}{8}(1-\cos(4x))$ et donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto\cos^2 x\sin^2 x$ est la fonction $x\mapsto\frac{x}{8}-\frac{1}{32}\sin(4x)$.

3) Pour x réel , on a : $\cos^3 x=\cos^2 x\cos x=\left(1-\sin^2 x\right)\cos x=\cos x-\cos x\sin^2 x$ et donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto\cos^3 x$ est la fonction $x\mapsto\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$.

Exercice n° 11

1) $\tan\frac{x}{2}$ existe si et seulement si $x\notin\pi+2\pi\mathbb{Z}$ et $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ existe si et seulement si $x\notin\pi\mathbb{Z}$. Pour $x\notin\pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}=\tan\frac{x}{2}.$$

2) Pour tout réel x,

$$\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\sin x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=0.$$

3) $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ et $\frac{2}{\cos(2x)}$ existent si et seulement si $\frac{\pi}{4}-x$, $\frac{\pi}{4}+x$ et $2x$ ne sont pas dans $\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$, ce qui équivaut à $x\notin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Donc, pour $x\notin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)&=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}+\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}+\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\\&=\frac{(\cos x-\sin x)^2+(\cos x+\sin x)^2}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{2(\cos^2 x+\sin^2 x)}{\cos(2x)}=\frac{2}{\cos(2x)}\end{aligned}$$

4) Pour $x\notin\frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{2}{\tan(2x)}.$$

Exercice n° 12

1) Pour tout réel x, $1 - 2k\cos x + k^2 = (k - \cos x)^2 + \sin^2 x \geqslant 0$. De plus,

$$1 - 2k\cos x + k^2 = 0 \Rightarrow k - \cos x = \sin x = 0 \Rightarrow x \in \pi\mathbb{Z} \text{ et } k = \cos x \Rightarrow k \in \{-1, 1\},$$

ce qui est exclu. Donc,

$$\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ \forall x \in \mathbb{R},\ 1 - 2k\cos x + k^2 > 0.$$

La fonction f_k est donc définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $[0, \pi]$ en vertu de théorèmes généraux. Pour $x \in [0, \pi]$, on a :

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= \cos x \left(1 - 2k\cos x + k^2\right)^{-1/2} - \frac{1}{2}\sin x(2k\sin x)\left(1 - 2k\cos x + k^2\right)^{-3/2} \\ &= \left(1 - 2k\cos x + k^2\right)^{-3/2}\left(\cos x\left(1 - 2k\cos x + k^2\right) - k\sin^2 x\right) \\ &= \left(1 - 2k\cos x + k^2\right)^{-3/2}\left(-k\cos^2 x + (1 + k^2)\cos x - k\right) \\ &= \left(1 - 2k\cos x + k^2\right)^{-3/2}(k\cos x - 1)(k - \cos x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_k'(x) = \frac{(k\cos x - 1)(k - \cos x)}{(1 - 2k\cos x + k^2)\sqrt{1 - 2k\cos x + k^2}}.}$$

1er cas : $|k| < 1$ et $k \neq 0$ (si $k = 0$, pour $x \in [0, \pi]$, $f_k(x) = \sin x$). Pour tout réel x de $[0, \pi]$, $(1 - 2k\cos x + k^2)^{-3/2}(k\cos x - 1) < 0$ et $f_k'(x)$ est du signe de $\cos x - k$. Soit $\theta \in]0, \pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ tel que $\cos\theta = k$.

x	0		θ		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(car $f_k(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1 - 2k\cos\theta + k^2}} = \dfrac{\sqrt{1 - k^2}}{\sqrt{1 - 2k^2 + k^2}} = 1$).

2ème cas : $k > 1$. Pour tout réel x de $[0, \pi]$, $(1 - 2k\cos x + k^2)^{-3/2}(k - \cos x) > 0$ et $f_k'(x)$ est du signe de $k\cos x - 1$. Soit $\theta \in]0, \pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ tel que $\cos\theta = \dfrac{1}{k}$.

x	0		θ		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{k}$	$\searrow$	0

(car $f_k(\theta) = \dfrac{\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}}{\sqrt{1 - 2 + k^2}} = \dfrac{1}{k}$).

3ème cas : $k < -1$. Pour tout réel x, $(1 - 2k\cos x + k^2)^{-3/2}(k - \cos x) < 0$ et $f_k'(x)$ est du signe de $1 - k\cos x$. Soit $\theta \in]0, \pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ tel que $\cos\theta = \dfrac{1}{k}$.

x	0		θ		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$-\frac{1}{k}$	$\searrow$	0

(car $f_k(\theta) = \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{1}{k^2}}}{\sqrt{1-2+k^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{k^2}} = -\dfrac{1}{k}$).

2) Pour $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, posons $I_k = \displaystyle\int_0^{\pi} f_k(x)\, dx$.

Si $k = 0$, $I_k = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\, dx = 2$. Sinon,

$$\begin{aligned}
I_k &= \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \frac{2k\sin x}{2\sqrt{1-2k\cos x+k^2}}\, dx = \frac{1}{k}\left[\sqrt{1-2k\cos x+k^2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{k}(\sqrt{1+2k+k^2} - \sqrt{1-2k+k^2}) = \frac{1}{k}(|k+1| - |k-1|).
\end{aligned}$$

Plus précisément, si $k \in]-1, 1[\setminus\{0\}$, $I_k = \dfrac{1}{k}((1+k)-(1-k)) = 2$, ce qui reste vrai pour $k = 0$. Si $k > 1$, $I_k = \dfrac{1}{k}((1+k)-(k-1)) = \dfrac{2}{k}$, et enfin, si $k < -1$, $I_k = \dfrac{-2}{k}$. En résumé,

$$\boxed{\text{Si } k \in]-1, 1[,\ I_k = 2 \text{ et si } k \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[,\ I_k = \frac{2}{|k|}.}$$

Exercice n° 13

1) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) &= \sum_{k=0}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos(kx) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\right) \\
&= \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(-\frac{x}{2}\right)\right) + \left(\sin\left(\frac{3x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \left(\sin\left(\frac{5}{2}\right) - \sin\left(\frac{3x}{2}\right)\right) + \\
&\quad \ldots + \left(\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) - \sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\right) \\
&= \sin\frac{(2n+1)x}{2} + \sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}
\end{aligned}$$

Ensuite, $2\sin\dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbb{Z}$. Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, directement $S_n = n+1$ et si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $S_n = \dfrac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\cos\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\cos\left(\dfrac{nx}{2}\right)\sin\left(\dfrac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} \text{ si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n+1 \text{ si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{array}\right. .}$$

2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx)$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin^2(kx)$. On a :

$$S_n + S'_n = \sum_{k=0}^{n}(\cos^2(kx) + \sin^2(kx)) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1,$$

et

$$S_n - S'_n = \sum_{k=0}^{n}(\cos^2(kx) - \sin^2(kx)) = \sum_{k=0}^{n}\cos(2kx).$$

D'après 1), si $x \in \pi\mathbb{Z}$, on trouve immédiatement,

$$\sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx) = n+1 \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\sin^2(kx) = 0,$$

et si $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$S_n + S'_n = n+1 \text{ et } S_n - S'_n = \frac{\cos(nx)\sin(n+1)x}{\sin x},$$

de sorte que

$$S_n = \frac{1}{2}\left(n+1+\frac{\cos(nx)\sin(n+1)x}{\sin x}\right) \text{ et } S'_n = \frac{1}{2}\left(n+1-\frac{\cos(nx)\sin(n+1)x}{\sin x}\right).$$

Exercice n° 14

$$\begin{aligned}\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8} &= 2\left(\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}\right) = 2\left(\cos^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8}\right)\\ &= 2\left(\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}\right)^2 - 2\cos^2\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{\pi}{8}\right) = 2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{4}\right)\\ &= 2\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Exercice n° 15

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos(3x) = \sin(2x) &\Leftrightarrow \cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) \Leftrightarrow \left(\exists k \in \mathbb{Z}/\ 3x = \frac{\pi}{2}-2x+2k\pi\right) \text{ ou } \left(\exists k \in \mathbb{Z}/\ 3x = -\frac{\pi}{2}+2x+2k\pi\right)\\ &\Leftrightarrow \left(\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\right) \text{ ou } \left(\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = -\frac{\pi}{2}+2k\pi\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{10}, \frac{13\pi}{10}, \frac{3\pi}{2}, \frac{17\pi}{10}\right\}.}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) = \cos x\left(2\cos^2 x - 1\right) - 2\sin^2 x\cos x\\ &= \cos x\left(2\cos^2 x - 1\right) - 2\left(1-\cos^2 x\right)\cos x\\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.}$$

3) Par suite, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos(3x) = \sin(2x) &\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x = 2\sin x\cos x \Leftrightarrow \cos x\left(4\cos^2 x - 3 - 2\sin x\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \cos x\left(-4\sin^2 x - 2\sin x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow (\cos x = 0) \text{ ou } \left(4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0\right).\end{aligned}$$

D'après 1), l'équation $4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$ admet entre autre pour solutions $\frac{\pi}{10}$ et $\frac{13\pi}{10}$ (car, dans chacun des deux cas, $\cos x \neq 0$), ou encore, l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$ admet pour solutions les deux nombres **distincts** $X_1 = \sin\frac{\pi}{10}$ et $X_2 = \sin\frac{13\pi}{10}$, qui sont donc les deux solutions de cette équation. Puisque $X_1 > 0$ et que $X_2 < 0$, on obtient

$$X_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } X_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

Donc, (puisque $\sin\frac{13\pi}{10} = -\sin\frac{3\pi}{10}$),

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } \sin\frac{3\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

Ensuite, $\sin\dfrac{3\pi}{10}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3\pi}{10}\right)=\cos\dfrac{\pi}{5}$, et donc

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

Enfin, $\cos\dfrac{\pi}{10}=\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\pi}{10}}=\dfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ et de même $\sin\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\cos\dfrac{3\pi}{10}$.

