Chapitre 4. Les symboles Σ et Π. Le binôme de NEWTON

Ce chapitre est consacré aux symboles Σ et Π. A terme, la maîtrise de ce symbole est une compétence essentielle à acquérir et nous pensons qu'il faut y consacrer un nombre conséquent de pages.

Quelques passages de ce chapitre font appel à des compétences sur les nombres complexes, voire sur les fonctions trigonométriques réciproques, que vous n'avez pas toutes ou tous en ce début d'année. Si vous ne possédez pas encore ces compétences, sautez les passages concernés. Ces passages sont signalés par le symbole ❄.
Si on a choisi de traiter la version définitive de ce chapitre (en utilisant quelques connaissances sur la trigonométrie et les nombres complexes), c'est pour « centraliser » les exercices classiques sur le sujet. Dans les chapitres ultérieurs, nous reproduirons certains passages de ce chapitre à l'identique

Plan du chapitre

1 Le symbole Σ

1.1 Etude d'un exemple

Nécessité d'une nouvelle notation. La somme S_n des entiers impairs 1, 3, 5,..., $2n-1$ s'écrit

$$S_n = 1+3+5+\ldots+(2n-1).$$

Cette notation cohérente se révèle à l'usage pleine de pièges. En effet, que signifie l'écriture $1+3+5+\ldots+(2n-1)$ quand n vaut 1, 2, 3 ou même 4 ? Si on ne réfléchit pas suffisamment, on écrit $S_2 = 1+3+5+\ldots+3$, alors qu'il fallait comprendre que S_2 était constituée de 2 termes, en commençant par 1 et en finissant par $2\times 2-1=3$. C'est encore pire avec S_1 qui ne contient qu'un seul terme. On peut trouver désagréable que soit écrit explicitement le nombre 5 dans l'écriture de S_n, alors qu'il n'apparaît ni dans S_1, ni dans S_2... De manière générale, dans de nombreuses situations, les notations utilisant des pointillés sont sources d'erreurs si elles ne sont pas maîtrisées.

Pour cette raison et par souci de concision, on introduit une nouvelle notation. La somme S_n ci-dessus est la somme des n nombres $2\times 1-1=1$, $2\times 2-1=3$,..., $2\times n-1$. Ils ont une écriture commune, à savoir $2k-1$ où k prend successivement les valeurs 1, 2,..., n. On décide alors de la noter

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) \quad (*)$$

(la lettre grecque Σ correspondant à notre S, initiale du mot somme). On peut apporter sur l'expression $(*)$ les commentaires suivants :

◇ en bornes du symbole Σ, on voit que k varie de 1 à n et on a donc en évidence **le nombre de termes de la somme**, à savoir n, ce qui était peut-être moins évident dans la notation utilisant des pointillés ;

◇ dans l'expression $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)$, nous avons fait l'effort de donner une écriture commune à chacun des termes de la somme et donc de comprendre cette somme, ce qui n'est pas le cas dans l'expression $1+3+5+\ldots+(2n-1)$;

◇ $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)$ est une expression compréhensible même quand $n=2$ ou $n=1$. Dans ce dernier cas, la somme est constituée d'un seul terme et on parle donc d'une somme de un terme. Cette phrase a un sens conventionnel.

◇ la somme obtenue est une fonction de n, mais n'est pas une fonction de k, ce qui est explicite dans la notation S_n (et non pas $S_{n,k}$) ou encore, on ne retrouve pas la lettre k dans le résultat final. Ainsi, on peut écrire une phrase du genre

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2},$$

mais par contre, la phrase $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n}k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ n'a aucun sens. Pour cette raison, la variable k est dite **muette** et on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre sans que cela ne modifie le résultat final :

$$\sum_{i=1}^{n}i = \sum_{k=1}^{n}k = \sum_{k'=1}^{n}k' = \ldots = \frac{n(n+1)}{2}.$$

◇ l'écriture de S_n n'est absolument pas unique, et par exemple, on pourrait tout à fait considérer que les entiers 1, 3,..., $2n-1$ sont de la forme $2k+1$ où k varie cette fois-ci de 0 à $n-1$ et écrire $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)$, mais aussi que ces entiers sont de la forme $2k-3$ où k prend les valeurs 2, 3,..., $n+1$ et écrire dans ce cas $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n+1}(2k-3)$; l'essentiel est d'obtenir 1 pour la première valeur de k considérée, 3 pour la deuxième,... et $2n-1$ pour la dernière.

Que signifie calculer une somme ? Calculons maintenant la somme proposée et pour cela, posons nous d'abord la question : que signifie la phrase « calculer la somme S_n » ? Calculer $1+3+5$ consiste à effectuer les deux additions pour obtenir 9. De même, calculer $1+3+\ldots+(2n-1)$ consiste à effectuer les $n-1$ additions et donc à exprimer le résultat sous une forme n'utilisant plus de pointillés.

Dans les paragraphes suivants, on décrira quelques techniques de calculs de somme. Ici, en calculant les premiers termes, nous allons essayer de deviner une formule générale, formule que l'on **démontrera** ensuite par récurrence.

On trouve $S_1 = 1$ puis $S_2 = 1+3 = 4$ puis $S_3 = 1+3+5 = 9$ puis $S_4 = 1+3+5+7 = 16$ puis $S_5 = S_4+9 = 16+9 = 25$. Il apparaît, semble-t-il, la suite des carrés des nombres entiers, mais cette constatation est insuffisante. Nous ne savons toujours pas ce que vaut S_6 avant de l'avoir calculé, et pour savoir si nous avons vu juste, il faut se diriger vers un raisonnement de portée générale : si au k-ème carré parfait, à savoir k^2, on ajoute le $(k+1)$-ème nombre impair, à savoir $2k+1$, on obtient $k^2+2k+1 = (k+1)^2$ qui est bien le $(k+1)$-ème carré parfait. Tout semble coller et nous pouvons donc **démontrer** par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

- Pour $n = 1$, $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 = 1^2$ et la formule proposée est exacte.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right) + (2n+1) = n^2+2n+1 \quad \text{(par hypothèse de récurrence)}\\ &= (n+1)^2.\end{aligned}$$

Nous avons montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

Les $n-1$ additions ont été effectuées. Maintenant il est certain qu'il persiste dans le résultat final une multiplication $(n^2 = n \times n)$, mais on peut estimer que la somme, elle, a été calculée.

1.2 Définition

On se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels (ou plus généralement de nombres complexes).

Pour p et n entiers naturels donnés tels que $p \leqslant n$, la somme des nombres u_p, u_{p+1},..., u_n est notée $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k$.

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + \ldots + u_n \ (*).$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} u_k = u_0$, $\displaystyle\sum_{k=3}^{5} u_k = u_3+u_4+u_5$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} u_{2k+1} = u_3+u_5+u_7$ et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k = u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{2n-1}+u_{2n}$.

On peut donner une définition plus méticuleuse de $\sum_{k=p}^{n} u_k$, évitant l'utilisation de pointillés. On pose

$$\sum_{k=p}^{p} u_k = u_p \text{ et } \forall n \geqslant p,\ \sum_{k=p}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=p}^{n} u_k\right) + u_{n+1} \text{ (definition par récurrence).}$$

La variable de sommation k est **muette**, ce qui signifie que la valeur de la somme n'est pas une fonction de k et que cette variable peut donc être remplacée par n'importe quelle autre variable, à l'exception des variables utilisées en bornes (ici les variables n et p), sans modification du résultat.

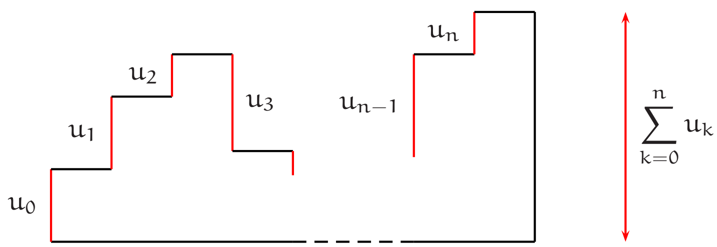
Analysons maintenant le nombre de termes de la somme $(*)$. On commence par le cas particulier où $1 < p < n$. L'idée est de tout rapporter à l'entier 1.

$$\overbrace{\underbrace{1 \ \ldots \ (p-1)}_{p-1 \text{ entiers}} \ \underbrace{p \ \ldots \ n}_{n-(p-1) \text{ entiers}}}^{n \text{ entiers}}.$$

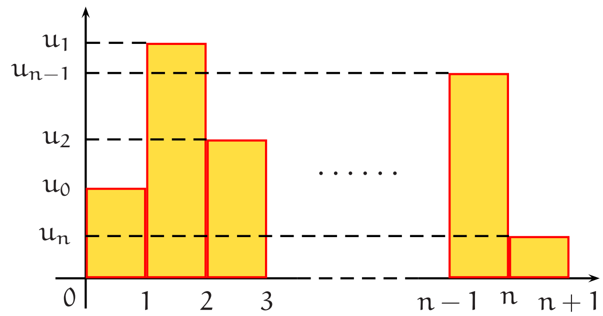
Il y a ainsi $n-p+1$ entiers entre les entiers p et n, p et n compris. Ce résultat reste clair quand $p = n$ (dans ce cas, $n-p+1 = 1$) ou $p = 1$ ou $p = 0$ (dans ce cas, $n-p+1 = n+1$). Donc, si n et p sont deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{entre } p \text{ et } n, \ (p \text{ et } n \text{ compris}), \text{ il y a } n-p+1 \text{ entiers,}\\ \text{la somme } \displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k \text{ est constituée de } n-p+1 \text{ termes.}\end{array}}$$

Donnons maintenant différentes interprétations possibles d'une telle somme. Dans le cas d'une suite réelle, on peut interpréter $\sum_{k=0}^{n} u_k$ comme la hauteur totale d'un escalier dont la hauteur de la marche n° 0 est u_0, la hauteur de la marche n° 1 est u_1,..., et la hauteur de la marche n° n est u_n, étant entendu que si $u_k > 0$, la marche est montante et si $u_k < 0$, la marche est descendante (et de même pour l'escalier tout entier si $\sum_{k=0}^{n} u_k < 0$).



Dans le cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, on dispose d'une autre interprétation graphique. En abscisse, on place les nombres 0, 1,..., n, $n+1$, et en ordonnée, les nombres u_0, u_1,..., u_n.



Si on note A_k le point de coordonnées $(k, 0)$ et B_k le point de coordonnées (k, u_k) alors, puisque la distance de 0 à 1 est 1, $u_0 = u_0 \times 1$ est l'aire du rectangle $(A_0A_1B_1B_0)$, et plus généralement, puisque entre les deux entiers consécutifs k et $k+1$, il y a 1 d'écart, $u_k = u_k \times (k+1-k)$ est l'aire du rectangle $(A_kA_{k+1}B_{k+1}B_k)$. Par suite, $\sum_{k=0}^{n} u_k$ est la somme des aires des rectangles ci-dessus.

1.3 Règles de calculs

On commence par des résultats évidents qui ont besoin d'être énoncés mais nul besoin d'être démontrés.

> $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite réelle (❄ ou complexe), pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
>
> **1)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$, et donc aussi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - S_{n-1}$.
>
> **2)** Pour n et p tels que $0 \leqslant p < n$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$ (relation de Chasles).

En 1), la première formule fait comprendre comment on passe de la somme n° n à la somme n° $(n+1)$ (on rajoute u_{n+1}), et la deuxième formule permet de récupérer u_n en fonction de S_n. Par exemple, si on sait que pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n(n+1)}{2}$, on peut connaître la valeur du n-ème terme de la suite u :

$$\text{pour } n \geqslant 1,\ u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n((n+1)-(n-1))}{2} = n.$$

On peut noter que puisque l'on désirait obtenir la valeur de u_n, on n'a pas écrit $u_{n+1} = S_{n+1} - S_n = ...$, mais on a écrit $u_n = S_n - S_{n-1} = ...$

En 2), on doit simplement mettre en garde contre une trop grande analogie avec les intégrales. La relation de Chasles pour les intégrales est $\int_a^c + \int_c^b = \int_a^b$. La deuxième intégrale « démarre » où « finit » la première. Avec le symbole Σ, la première somme finit à p et la deuxième commence à l'entier suivant $p+1$. Pour ne pas commettre l'erreur de faire redémarrer la deuxième somme à p et ainsi répéter deux fois le terme u_p, il ne faut pas hésiter à se redétailler les différentes sommes à l'aide de pointillés en explicitant les débuts et les fins de sommes :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n = (u_0 + \ldots + u_p) + (u_{p+1} + \ldots + u_n).$$

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels (❄ ou complexes).

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k$.

2) $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k$.

3) $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \mu \sum_{k=0}^{n} v_k$ (linéarité de Σ).

Ces résultats sont clairs. 1) signifie que $(u_0+v_0)+(u_1+v_1)+\ldots+(u_n+v_n) = (u_0+u_1+\ldots+u_n)+(v_0+v_1+\ldots+v_n)$, 2) signifie que $\lambda u_0 + \lambda u_1 + \lambda u_n = \lambda(u_0 + u_1 + \ldots + u_n)$ et 3) est un cumul des résultats de 1) et 2) (le mot *linéarité* sera correctement défini dans les différents chapitres d'algèbre linéaire). D'autre part, ces résultats restent bien sûr valables en changeant les bornes du Σ.

Ainsi, on peut par exemple écrire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$ ou aussi que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(2k^2 - 3k + 1\right) = 2\sum_{k=1}^{n}k^2 - 3\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$. Il faut noter au passage la signification de la dernière somme :

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ fois}} = n.$$

On a additionné les termes d'une suite constante.

La règle 2) est source d'erreurs classiques. Elle signifie que l'on peut mettre en facteur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$ toute expression **indépendante** de k. Ainsi, dans $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3n(\cos\theta)k2^k$, on peut mettre en facteur 3, n et $\cos\theta$, mais pas k ou 2^k :

$$\sum_{k=1}^{n} 3n(\cos\theta)k2^k = 3n(\cos\theta)\sum_{k=1}^{n} k2^k.$$

❄ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{Re}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{Re}(u_k)$ et $\mathrm{Im}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{Im}(u_k)$.

2) $\forall n \in \mathbb{N},\ \overline{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k} = \sum_{k=0}^{n}\overline{u_k}$.

❄ Ici, on a simplement rappelé que la partie réelle (resp. la partie imaginaire ou le conjugué) d'une somme est la somme des parties réelles (resp. des parties imaginaires ou des conjugués). Grâce à ces résultats, on peut par exemple écrire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{Re}\left(e^{ik\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right)$.

1.4 Changement de variable

On veut calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$. Cette somme rentre dans le cadre général des sommes télescopiques qui sera détaillé plus loin. Ici, nous allons la calculer grâce à un changement de variable. La linéarité du symbole Σ permet d'écrire :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right).$$

Dans la deuxième somme, on peut considérer que $k+1$ est un entier k' prenant toutes les valeurs de 2 à $n+1$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k'=2}^{n+1} \frac{1}{k'}.$$

Le changement de variable permet de mieux comprendre que la somme considérée était la somme des inverses des entiers 2, 3,..., $n+1$. Pendant le changement de variable, on avait besoin de deux lettres : la lettre k désignant un entier variant de 1 à n et la lettre k' désignant un entier variant de 2 à $n+1$. Mais une fois que le changement de variable a eu lieu, **un nouvel exercice commence** avec la somme $\displaystyle\sum_{k'=2}^{n+1} \frac{1}{k'}$. La lettre k' apparaît alors comme une complication inutile de l'expression et il est largement préférable de réécrire $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$ la somme précédente, cette écriture représentant aussi la somme $\dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n+1}$. On rappelle à ce sujet que la variable de sommation est **muette** (voir page 3). Ainsi, en fin de parcours, nous réutilisons la même lettre k, pour désigner un nouvel objet, mais quoi de plus normal (heureusement que depuis le début de votre scolarité, vous vous êtes permis de réutiliser plusieurs fois la lettre x et on a du mal à imaginer ce qui se serait passé dans le cas contraire).

On peut alors terminer le calcul pour $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

En pratique, on utilise deux types de changement de variable et **deux seulement** :

- Translation : on pose ; $k' = k + p$ où p est un entier relatif donné.
- Symétries : on pose $k' = p - k$ où p est un entier relatif donné.

Ces deux changements de variable ont en commun d'associer de manière **bijective** un ensemble de nombres entiers **consécutifs** à un autre. La translation est un changement de variable strictement croissant et la symétrie est un changement de variable strictement décroissant. Rappelons à ce sujet que le symétrique d'un réel x par rapport à un réel a est $2a - x$. En effet, le milieu des deux nombres x et $2a - x$ est $\dfrac{1}{2}(x + (2a - x)) = a$.

Par exemple, dans $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$, posons $k' = n + 1 - k$ (symétrie par rapport au nombre rationnel $\dfrac{n+1}{2}$) ou ce qui revient au même $k = n + 1 - k'$. A priori, l'entier k' varie en décroissant de $n + 1 - 1 = n$ à $n + 1 - n = 1$. Néanmoins, un Σ est toujours pensé avec une variable croissante et la borne du bas est toujours inférieure ou égale à la borne du haut. Un changement de variable décroissant permet donc de parcourir la somme en sens inverse :

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k'=1}^{n} (n + 1 - k') = \sum_{k=1}^{n} (n + 1 - k) = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1.$$

On doit noter que pour passer d'une variable k à une variable k', on a besoin d'avoir k' en fonction de k ($k' = f(k)$) pour trouver les nouvelles bornes du Σ mais aussi k en fonction de k' ($k = f^{-1}(k')$) pour pouvoir remplacer dans l'expression à sommer.

Exercice 1. Pour $n \geqslant 2$, on considère la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n+1} k2^{2k+1}$. Faire une translation d'indices où la nouvelle variable varie de 0 à $n-2$ et une symétrie d'indices où la nouvelle variable varie de 3 à $n+1$.

Solution 1. Soit $n \geqslant 2$. On pose $k' = k - 3$ ou encore $k = k' + 3$. On obtient

$$S_n = \sum_{k=3}^{n+1} k2^{2k+1} = \sum_{k'=0}^{n-2} (k'+3)2^{2(k'+3)+1} = \sum_{k=0}^{n-2} (k+3)2^{2k+7}.$$

De même, effectuons une symétrie par rapport au milieu de 3 et $n+1$, à savoir $\dfrac{3+n+1}{2} = \dfrac{n+4}{2}$.
On pose donc $k'' = n + 4 - k$. On obtient

$$S_n = \sum_{k''=3}^{n+1} (n + 4 - k'')2^{2(n+4-k'')+1} = \sum_{k=3}^{n+1} (n + 4 - k)2^{2n+9-2k}.$$

Exercice 2. Pour $n \geqslant 2$, montrer à l'aide d'un changement d'indices que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n-1} \ln\left(\sin\frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\sin\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Solution 2. Soit $n \geqslant 2$. Pour $k \in \{n+1, \ldots, 2n-1\}$, posons $k' = 2n - k$ ou encore $k = 2n - k'$. Quand k décrit $\{n+1, \ldots, 2n-1\}$, k' varie de $2n - (2n-1) = 1$ à $2n - (n+1) = n - 1$ et donc,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n} \ln\left(\sin\frac{k\pi}{2n}\right) &= \sum_{k'=1}^{n-1} \ln\left(\sin\frac{(2n-k')\pi}{2n}\right) = \sum_{k'=1}^{n-1} \ln\left(\sin\left(\pi - \frac{k'\pi}{2n}\right)\right) = \sum_{k'=1}^{n-1} \ln\left(\sin\left(\frac{k'\pi}{2n}\right)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right).\end{aligned}$$

1.5 Sommes télescopiques

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels (❄ ou complexes).

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0.}$$

Pour s'en convaincre, il suffit d'écrire la somme non pas sous sa forme initiale $(u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \ldots + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_n - u_{n-1})$, mais sous la forme $-u_0 + (u_1 - u_1) + (u_2 - u_2) + \ldots + (u_{n-1} - u_{n-1}) + u_n$ et on voit les termes intermédiaires se simplifier **par télescopage**. On dit que la somme considérée est **télescopique**. Ce calcul se visualise :

$$\begin{array}{cccc} & u_1 & - & u_0\\ + & u_2 & - & u_1\\ + & u_3 & - & u_2\\ + & u_4 & - & u_3\\ & \vdots & & \vdots\\ + & u_{n-1} & - & u_{n-2}\\ + & u_n & - & u_{n-1}\\ \hline & & ? & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & - & u_0\\ + & u_1 & - & u_1\\ + & u_2 & - & u_2\\ + & u_3 & - & u_3\\ & \vdots & & \vdots\\ + & u_{n-2} & - & u_{n-2}\\ + & u_{n-1} & - & u_{n-1}\\ + & u_n & & \\ \hline & u_n & - & u_0 \end{array}$$

Le calcul ci-dessus peut être traité de manière synthétique à l'aide du symbole Σ. Pour $n \geqslant 2$, on a :

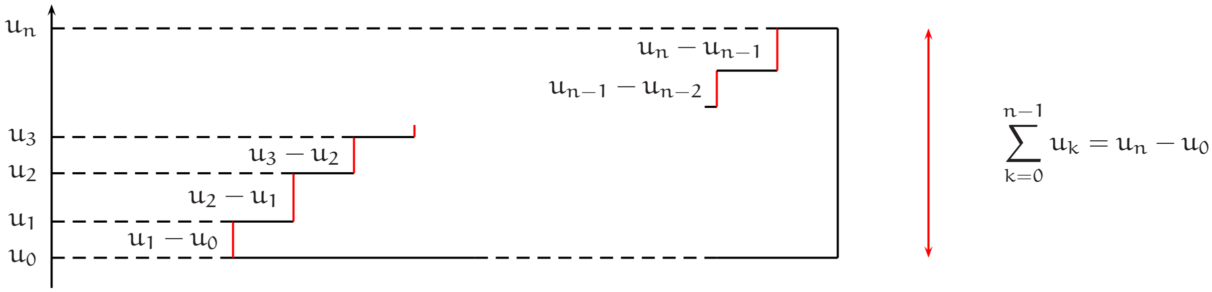
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k'=1}^{n} u_{k'} - \sum_{k=0}^{n-1} u_k\\ &= \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n + \sum_{k=1}^{n-1} u_k - \sum_{k=1}^{n-1} u_k - u_0 = u_n - u_0.\end{aligned}$$

On a d'autres lectures possibles du résultat encadré plus haut. La différence $u_{k+1} - u_k$ visualisée sur une droite muni d'un repère $(0, \overrightarrow{i})$ s'identifie au vecteur $\overrightarrow{u_k u_{k+1}}$. La formule écrite s'interprète alors comme la relation de Chasles usuelle pour les vecteurs :

$$(u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_n - u_{n-1}) \text{ " = " } \overrightarrow{u_0u_1} + \overrightarrow{u_1u_2} + \ldots + \overrightarrow{u_{n-2}u_{n-1}} + \overrightarrow{u_{n-1}u_n} = \overrightarrow{u_0u_n} \text{ " = " } u_n - u_0.$$

C'est la bonne vieille formule « extrémité - origine ».

On peut aussi réutiliser un escalier où cette fois-ci les marches ont pour hauteur $(u_1 - u_0)$, $(u_2 - u_1)$,..., $(u_n - u_{n-1})$. Dans ce cas, u_k ne désigne pas la hauteur d'une marche mais désigne l'altitude à laquelle se trouve le bas de la marche n° $k+1$: le bas de cette marche est à l'altitude u_k et le haut à l'altitude u_{k+1} de sorte que la hauteur de cette marche est égale à $u_{k+1} - u_k$. La hauteur totale de l'escalier est alors la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$. Ayant démarré à l'altitude u_0 et terminé à l'altitude u_n, la hauteur cherchée est $u_n - u_0$. Représentons ce calcul dans le cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle croissante (de sorte que chaque différence $u_{k+1} - u_k$ est positive).



Le résultat sur les sommes télescopiques est l'outil de base permettant de calculer différentes sommes. On veut calculer une somme du type $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. On cherche (mais on ne trouve pas toujours) une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier k, on ait $u_k = v_{k+1} - v_k$ (de même que pour calculer une intégrale, on peut chercher des primitives de la fonction à intégrer). Si on trouve une telle « suite primitive », alors on peut calculer la somme :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0.}$$

En prenant l'opposé des deux membres, on a aussi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}.}$$

Exercice 3. Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$,

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ (où $k! = 1 \times 2 \times \ldots \times k$),

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)$, ❋

4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+2)2^k$ (chercher une suite primitive sous la forme $(ak+b)2^k$)).

Solution 3.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ et

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+2)-k}{2k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$
$$= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1-1) \times k! = \sum_{k=1}^{n} ((k+1) \times k! - 1 \times k!) = \sum_{k=1}^{n} ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1.$

3) ❋ Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sin\left(\frac{x}{2} + kx\right) + \sin\left(\frac{x}{2} - kx\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right)\right)$$
$$= \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(-\frac{1}{2}x\right) = \sin\frac{(2n+1)x}{2} + \sin\frac{x}{2}.$$

4) Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $u_k = (ak+b)2^k$ et cherchons a et b tels que, pour tout entier k, $u_{k+1} - u_k = (k+2)2^k$.

$$u_{k+1} - u_k = (a(k+1)+b)2^{k+1} - (ak+b)2^k = 2^k(2(a(k+1)+b) - (ak+b)) = (ak+2a+b)2^k.$$

En prenant $a = 1$ puis $b = 0$ (de sorte que $2a+b = 2$), ou encore, en posant $u_k = k2^k$ pour tout entier k, on a bien $u_{k+1} - u_k = (k+2)2^k$. Mais alors,

$$\sum_{k=0}^{n} (k+2)2^k = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0 = (n+1)2^{n+1}.$$

⇨ **Commentaire**. *En 1)a),* $\dfrac{1}{k(k+1)}$ *résulte bien sûr de la réduction au même dénominateur d'une fraction de dénominateur* k *et d'une fraction de dénominateur* $k+1$ *et il ne faut pas longtemps pour que l'on essaie de calculer la différence* $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$*. En b), on essaie de généraliser l'idée. Le seul écueil à éviter est de calculer* $\dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{k(k+2)}$ *car la deuxième fraction n'est pas obtenue en remplaçant* k *par* $k+1$ *dans la première.*

Exercice 4. ❄

1) Montrer que pour a et b réels strictement positifs donnés, on a $\text{Arctan}\, a - \text{Arctan}\, b = \text{Arctan}\left(\dfrac{a-b}{1+ab}\right)$ (la fonction Arctangente est définie dans le chapitre « Fonctions de référence » et la fonction tangente est étudiée dans le chapitre « Trigonométrie »).

2) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$.

Solution 4. ❄

1) Soient a et b deux réels strictement positifs. $\text{Arctan}\, a \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\text{Arctan}\, b \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Par suite, $\text{Arctan}\, a - \text{Arctan}\, b \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Mais alors, $\tan(\text{Arctan}\, a - \text{Arctan}\, b)$ existe et

$$\tan(\text{Arctan}\, a - \text{Arctan}\, b) = \frac{\tan(\text{Arctan}\, a) - \tan(\text{Arctan}\, b)}{1 + \tan(\text{Arctan}\, a)\tan(\text{Arctan}\, b)} = \frac{a-b}{1+ab} = \tan\left(\text{Arctan}\, \frac{a-b}{1+ab}\right).$$

Ainsi, les deux nombres $\text{Arctan}\, a - \text{Arctan}\, b$ et $\text{Arctan}\left(\dfrac{a-b}{1+ab}\right)$ sont dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et ont même tangente. On en déduit que ces deux nombres sont égaux.

2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{k^2+k+1} = \frac{1}{k(k+1)+1} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)+1},$$

et donc, puisque k et $k+1$ sont des réels strictement positifs, le 1) permet d'écrire

$$\text{Arctan}\, \frac{1}{k^2+k+1} = \text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}(k).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par télescopage, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\, \frac{1}{k^2+k+1} = \sum_{k=1}^{n} (\text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}(k)) = \text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan}(1) = \text{Arctan}(n+1) - \frac{\pi}{4},$$

et immédiatement,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\, \frac{1}{k^2+k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Il se peut dans certains cas, que l'on ne connaisse d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que son premier terme u_0 et les différences successives $u_{k+1} - u_k$. On peut alors récupérer les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une variante de la formule précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k).$$

On peut de nouveau noter que, puisque l'on désire la valeur de u_n, on n'a pas écrit $u_{n+1} = u_0 + \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k)$, mais on a écrit $u_n = \ldots$ On utilise ce résultat dans l'exercice suivant (déjà posé dans le chapitre « Ensembles, relations, applications ») :

Exercice 5. On se donne un entier n supérieur ou égal à 2. Dans le plan, on trace n droites telles que deux quelconques de ces droites ne soient pas parallèles et trois quelconques de ces droites ne soient pas concourrantes.

Déterminer le nombre $P(n)$ des régions du plan définies par ces n droites.

Solution 5. Il est clair que $P(1) = 2$. Soit $n \geqslant 1$. Supposons connaître le nombre $P(n)$ de régions du plan déterminées par n droites vérifiant les conditions de l'énoncé. On trace une $(n+1)$-ème droite (D_{n+1}). D'après les hypothèses de l'énoncé, (D_{n+1}) coupe les n premières droites en n points deux à deux distincts. Ces points définissent sur (D_{n+1}) $(n+1)$ intervalles (dont deux sont non bornés). Chacun de ces intervalles coupe l'une des $P(n)$ régions en deux nouvelles régions, rajoutant ainsi une nouvelle région aux $P(n)$ régions préexistantes. On a donc :

$$\forall n \geqslant 1,\ P(n+1) = P(n) + (n+1).$$

On peut alors calculer $P(n)$. Soit $n \geqslant 2$.

$$P(n) = P(1) + \sum_{k=1}^{n-1}(P(k+1) - P(k)) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = 2 + \sum_{k=2}^{n} k = 1 + \sum_{k=1}^{n} k = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

ce qui reste vrai pour $n = 1$.

⇨ **Commentaire** . *Pour résoudre cet exercice, il faut commencer par tracer patiemment une droite, puis deux droites, puis trois droites, puis quatre droites en comptant à chaque fois, puis en traçant lentement une cinquième droite, il faut essayer de comprendre ce qui se passe ...*

1.6 Plusieurs calculs de la somme des n premiers entiers, de leurs carrés et de leurs cubes

Pour $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose $S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p$. On se propose de calculer $S_p(n)$ quand $p \in \{1, 2, 3\}$. Chacune des techniques de calcul ci-dessous est digne d'intérêt. On peut déjà énoncer les résultats suivants qui sont à apprendre et à connaître :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

Commençons par calculer de différentes manières $S_1(n)$.

Premier calcul. Au lycée, on démontre le résultat ci-dessus, soit par récurrence, soit de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & \ldots & + & k & + & \ldots & + & (n-1) & + & n \\ n & + & (n-1) & + & \ldots & + & n+1-k & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

et donc $S_1(n) + S_1(n) = (1 + 2 + \ldots + n) + (n + \ldots + 2 + 1) = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)}_{n \text{ termes}} = n(n+1)$, ce qui fournit le résultat. Il est intéressant de voir ce que donne cette démonstration en utilisant le symbole Σ :

$$2S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}(n+1-k) = \sum_{k=1}^{n}(n+1) = n(n+1).$$

L'idée de ce premier calcul est l'utilisation d'une propriété particulière des suites arithmétiques : on passe de 1 à 2 en ajoutant 1 et de n à $n-1$ en retranchant 1, de sorte que les sommes $1 + n$ et $2 + (n-1)$ sont égales. . .

Deuxième calcul. On cherche une suite primitive de la suite à sommer, c'est-à-dire une suite (v_n) telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ v_{k+1} - v_k = k$. On pense immédiatement à du degré 2 et on calcule : $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^2 - k^2) = \sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 2S_1(n) + n.$$

Par télescopage, on obtient

$$S_1(n) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}((k+1)^2 - k^2) - n\right] = \frac{1}{2}((n+1)^2 - 1 - n) = \frac{(n+1)((n+1)-1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Ici, l'idée était de faire de la somme à calculer une somme télescopique, et on y est approximativement parvenu. On pourra généraliser cette idée à $S_2(n)$, $S_3(n)$,... en calculant $(k+1)^3 - k^3$, $(k+1)^4 - k^4$...

Troisième calcul. C'est une variante du calcul précédent. La différence $(k+1)^2 - k^2$ n'a pas fourni k mais $2k+1$. Le triangle de Pascal fournit une suite (w_n) telle que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $w_{k+1} - w_k = k$. En effet, la relation de Pascal, réexposée plus loin, permet d'écrire pour $k \geqslant 2$,

$$k = \binom{k}{1} = \binom{k+1}{2} - \binom{k}{2} \left(= \frac{k(k+1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2}\right),$$

et donc, pour $n \geqslant 2$,

$$S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\binom{k+1}{2} - \binom{k}{2}\right) = 1 + \left(\binom{n+1}{2} - \binom{2}{2}\right) = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La recherche systématique de polynômes B_p tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ B_p(k+1) - B_p(k) = k^p$ conduit à la découverte des **polynômes de Bernoulli** qui seront étudiés dans le chapitre « Polynômes » et dans le cours de deuxième année.

Quatrième calcul. Comme souvent, représenter graphiquement un objet permet de comprendre cet objet.

$$n\ \begin{array}{ccccc} * & & & & \\ * & * & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ * & & & * & \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ & & n & & \end{array} + \begin{array}{ccccc} & & n & & \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ & * & * & & * \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & * & * \\ & & & & * \end{array}\ n = \begin{array}{ccccc} & & n+1 & & \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & & & * \\ \vdots & & & & \vdots \\ * & * & & & * \\ * & * & \cdots & \cdots & * \end{array}\ n$$

Ainsi, $\sum_{k=1}^{n} k$ est le nombre de points d'un triangle isocèle ayant n points de côté. Pour cette raison les nombres $\frac{n(n+1)}{2}$ sont appelés **nombres triangulaires** (vous connaissiez déjà les nombres carrés : n^2 est le nombre de points d'un carré ayant n points de côté). Comme d'habitude, deux triangles font un rectangle, et on lit directement $2S_1(n) = n(n+1)$.

Nombres triangulaires
1 3 6 10 15 21 28 36 45 55....

On peut aussi définir les nombres pentagonaux, hexagonaux,..., voire pyramidaux,... mais nous n'en parlerons pas ici.

Passons maintenant au calcul de $S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$ et $S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3$. Nous traiterons ce calcul à travers un exercice.

Exercice 6. En utilisant les expressions développées de $(k+1)^3 - k^3$ et $(k+1)^4 - k^4$, calculer $S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$ et $S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

Solution 6. Nous vous laissons démontrer les identités $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ (en développant $(a+b)(a+b)^2$ puis $(a+b)(a+b)^3$) qui sont des cas particuliers de la formule du binôme de Newton exposée plus loin dans ce chapitre.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. En additionnant ces n égalités, on obtient :

$$(n+1)^3 - 1 = \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 3S_2(n) + 3S_1(n) + n,$$

et donc,

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n\right] = \frac{1}{6}\left[2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)\right] \\ &= \frac{n+1}{6}\left(2\left(n^2+2n+1\right) - 3n - 2\right) = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

De même, $(n+1)^4 - 1 = \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right) = 4S_3(n) + 6S_2(n) + 4S_1(n) + n$, et donc,

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \frac{1}{4}\left[(n+1)^4 - 1 - 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} - n\right] = \frac{n+1}{4}\left[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1\right] \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}\left((n+1)^2 - (2n+1)\right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

1.7 Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique

1.7.1 Suites arithmétiques

On rappelle le résultat suivant :

> Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique complexe et n et p deux entiers naturels tels que $n \neq p$,
> $$\sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{(u_p+u_n)(n-p+1)}{2} = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times (\text{nombre de termes})}{2}.$$

Pour démontrer ce résultat, on utilise le fait que les sommes $u_p + u_n$, $u_{p+1} + u_{n-1} = u_p + r + u_n - r = u_p + u_n$, $u_{p+2} + u_{n-2} = u_p + 2r + u_n - 2r = u_p + u_n$,..., et plus généralement $u_k + u_{n+p-k} = u_p + (k-p)r + u_n + (p-k)r = u_p + u_n$ sont égales. Cela donne

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=p}^{n} u_k &= \sum_{k=p}^{n} u_k + \sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=p}^{n} u_k + \sum_{k'=p}^{n} u_{n+p-k'} = \sum_{k=p}^{n} u_k + \sum_{k=p}^{n} u_{n+p-k} = \sum_{k=p}^{n} (u_k + u_{n+p-k}) \\ &= \sum_{k=p}^{n} (u_p + u_n) = (n-p+1)(u_p+u_n). \end{aligned}$$

Exercice 7. Calculer les sommes : **1)** $\sum_{k=3}^{n+1} k$, **2)** $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)$.

Solution 7.

1) Pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+1} k = \frac{(3+(n+1))((n+1)-2)}{2} = \frac{(n-1)(n+4)}{2}$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = \frac{(1+(2n-1))n}{2} = n^2$.

⇨ **Commentaire** . *Rappelons que les suites arithmétiques sont les suites de la forme $u_n = an + b$ (où a et b sont indépendants de n). Ainsi, dans les deux cas nous devions calculer une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique. En 1), il aurait été très maladroit d'écrire $\sum_{k=3}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - 1 - 2 + (n+1)$ et de même en 2), il aurait été un peu maladroit d'écrire $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1$. Dans les deux cas, nous avons utilisé la formule (premier terme+ dernier terme)×(nombre de termes)/2.*

1.7.2 Suites géométriques

On rappelle les résultats suivants :

Soient q un nombre réel (❋ ou complexe) et n un entier naturel

Si $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, et si $q = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = n+1$,

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique réelle (❋ ou complexe) de raison $q \neq 1$ et n et p deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$,

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}.$$

Notons que si q est un réel strictement supérieur à 1, il faut avoir comme réflexe d'écrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, écriture dans laquelle numérateur et dénominateur sont strictement positifs.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \times \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$.

Démontrons les résultats ci-dessus. Pour n dans $\mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

On suppose que q est différent de 1 (le résultat est clair quand $q = 1$). Alors

$$S_n - qS_n = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} (q^k - q^{k+1}) = 1 - q^{n+1} \text{ (somme télescopique)},$$

d'où le résultat. Plus généralement, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q \neq 1$,

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=p}^{n} u_p q^{k-p} = u_p \sum_{k=0}^{n-p} q^k = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

Exercice 8. Calculer

1) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n-1} 2^k$,

2) ❋ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\pi)$,

3) ❋ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \cos\frac{2k\pi}{3}$,

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Solution 8.

1) Pour $n \geqslant 4$, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n-1} 2^k = 2^3 \frac{2^{n-3}-1}{2-1} = 2^n - 8$.

2) ❋ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\pi) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = \frac{1}{2}(1+(-1)^n) = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair}\end{array}\right.$.

3) ❋ En posant $j = e^{2i\pi/3}$ (voir le chapitre « Nombres complexes »),

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \cos\frac{2k\pi}{3} = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k e^{2ik\pi/3}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} (2j)^k\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{2^{n+1}j^{n+1}-1}{2j-1}\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left(\frac{\left(2^{n+1}j^{n+1}-1\right)\left(2j^2-1\right)}{(2j-1)\left(2j^2-1\right)}\right)$$
$$= \frac{1}{7}\mathrm{Re}\left(2^{n+2}e^{2i(n+3)\pi/3} - 2^{n+1}e^{2i(n+1)\pi/3} - 2e^{4i\pi/3} + 1\right) \text{ (car } j^3 = 1 \text{ et } j^2 + j = -1)$$
$$= \frac{1}{7}\left(2^{n+2}\cos\frac{2(n+3)\pi}{3} - 2^{n+1}\cos\frac{2(n+1)\pi}{3} + 2\right).$$

4) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ et $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k$. Alors,

$$xf_n'(x) = x\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} kx^k = S_n(x).$$

Si $x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$, $f_n(x) = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$ et donc

$$S_n(x) = xf_n'(x) = x\frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = x\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Si $x = 1$, on a directement $S_n(1) = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1.8 L'identité $a^n - b^n$

Théorème 1. Soient a et b deux nombres réels (❋ ou complexes) et n un entier naturel non nul.

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k.}$$

Démonstration . Par télescopage, on obtient

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = a\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k - b\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^{k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{n-k}b^k - a^{n-(k+1)}b^{k+1}\right) = a^n - b^n.$$

❏

Ainsi,

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2),\ a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3).}$$

Cette identité est liée au paragraphe précédent : quand $a = 1$ et $b = q$, on obtient $1 - q^n = (1-q)\sum_{k=0}^{n-1} q^k$.

Quand n est **impair**, on a $-b^n = +(-b)^n$ et on obtient une nouvelle identité :

Théorème 2. Soient a et b deux nombres réels (❋ ou complexes) et n un entier naturel **impair**.

$$\boxed{a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}\right) = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a^{n-1-k}b^k.}$$

Ainsi,

$$\boxed{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),\ a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4).}$$

1.9 Sommes trigonométriques ❋

Les différents résultats sur les sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique et sur les sommes télescopiques ont une application dans le calcul de certaines sommes trigonométriques.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$. On se propose de calculer $S_n(\theta)$ par deux méthodes différentes (la somme précédente a une grande importance dans la théorie des séries de FOURIER par exemple (les séries de FOURIER sont au programme de certains BTS mais ne sont plus abordées en mathématiques spéciales depuis le dernier changement de programme)).

Première méthode. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. $S_n(\theta) = \mathrm{Re}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k\right)$.

Maintenant, $e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. Deux cas se dégagent.

- Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{i\theta} \neq 1$ et

$$\begin{aligned}S_n(\theta) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1-\left(e^{i\theta}\right)^{n+1}}{1-e^{i\theta}}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\left(\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\right)\theta}\frac{e^{-i(n+1)\theta/2}-e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{in\theta/2}\frac{-2i\sin((n+1)\theta/2)}{-2i\sin(\theta/2)}\right)\\ &= \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\mathrm{Re}(e^{in\theta/2}) = \frac{\cos(n\theta/2)\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.\end{aligned}$$

- Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, on trouve directement $S_n(\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

Première méthode (variante). Pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=-n}^{-1} e^{ik\theta} + 1 + \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}\right) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta) = 1+2(S_n(\theta)-1) = 2S_n(\theta)-1.$$

Par suite,

$$2S_n(\theta)-1 = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta} = e^{-in\theta}\frac{1-e^{i(2n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} = e^{i(-n+(2n+1)/2-1/2)\theta}\frac{\sin((2n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \frac{\sin((2n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

Ainsi, $S_n(\theta) = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\sin((2n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right) = \dfrac{\sin(\theta/2)+\sin((2n+1)\theta/2)}{2\sin(\theta/2)} = \dfrac{\cos(n\theta/2)\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$.

Deuxième méthode. Par télescopage, on obtient

$$\begin{aligned}2\sin\frac{\theta}{2}S_n(\theta) &= \sum_{k=0}^{n} 2\sin\frac{\theta}{2}\cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sin\left(k\theta+\frac{\theta}{2}\right)-\sin\left(k\theta-\frac{\theta}{2}\right)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sin\left(\left(k+1-\frac{1}{2}\right)\theta\right)-\sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta\right)\right) = \sin\left(\left(n+1-\frac{1}{2}\right)\theta\right)-\sin\left(-\frac{1}{2}\theta\right)\\ &= \sin\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right).\end{aligned}$$

De plus, si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\dfrac{\theta}{2} \notin \pi\mathbb{Z}$ et donc $\sin\dfrac{\theta}{2} \neq 0$. On réobtient alors $S_n(\theta) = \dfrac{\cos(n\theta/2)\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$.

Exercice 9. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes suivantes : **1)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$, 2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos^2(k\theta)$.

Solution 9. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1) Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \text{Im}\left(\frac{1-\left(e^{i\theta}\right)^{n+1}}{1-e^{i\theta}}\right) = \text{Im}\left(e^{i((n+1)/2-1/2)\theta}\,\frac{e^{-i(n+1)\theta/2}-e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}}\right)$$
$$= \frac{\sin(n\theta/2)\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = 0$.

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}(1+\cos(2k\theta)) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} 1 + \sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta)\right) = \frac{1}{2}(n+1+\sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta))$. Puis, si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta)) = \text{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{2ik\theta}\right) = \text{Re}\left(\frac{1-e^{2i(n+1)\theta}}{1-e^{2i\theta}}\right) = \text{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)\theta}}{e^{i\theta}} \times \frac{-2i\sin((n+1)\theta)}{-2i\sin(\theta)}\right)$$
$$= \frac{\cos(n\theta)\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)},$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta) = \frac{1}{2}\left(n+1+\frac{\cos(n\theta)\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}\right).$$

Si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

⇨ **Commentaire** . *Dans la solution ci-dessus, nous n'avons supposé acquise aucune formule et nous avons redémarré les calculs à zéro. En 2), une variante était* $\sum_{k=0}^{n}\cos^2\theta + \sum_{k=0}^{n}\sin^2\theta = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$ *et* $\sum_{k=0}^{n}\cos^2\theta - \sum_{k=0}^{n}\sin^2\theta = \sum_{k=0}^{n}\cos(2\theta) = \dots$ *Puis on obtient* $\sum_{k=0}^{n}\cos^2\theta$ *ou* $\sum_{k=0}^{n}\sin^2\theta$ *en ajoutant ou en retranchant membre à membre.*

1.10 Sommes doubles

Quand on développe l'expression $(a_1+a_2)(b_1+b_2+b_3)$, on obtient $a_1b_1+a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_2+a_2b_3$. Si les deux parenthèses avaient contenu respectivement 6 et 9 termes au lieu de 2 et 3, l'expression développée aurait été constituée de $6\times 9 = 54$ termes et serait ingérable. On a de nouveau besoin d'une notation synthétique. Le même développement peut s'écrire

$$\left(\sum_{i=1}^{2} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{3} b_j\right) = \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3} a_ib_j\right) = \sum_{1\leqslant i\leqslant 2,\ 1\leqslant j\leqslant 3} a_ib_j = \sum_{(i,j)\in[\![1,2]\!]\times[\![1,3]\!]} a_ib_j.$$

La première égalité est obtenue en distribuant chacun des termes de la première parenthèse sur la deuxième. Dans l'avant-dernière expression, les encadrements $1\leqslant i\leqslant 2$, $1\leqslant j\leqslant 3$ signifient que les deux indices i et j varient respectivement de 1 à 2 et de 1 à 3, **indépendamment l'un de l'autre**, ou encore que le couple (i,j) prend les $2\times 3 = 6$ valeurs suivantes : $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$. Par ailleurs, la suite $(a_ib_j)_{1\leqslant i\leqslant 2,\ 1\leqslant j\leqslant 3}$ est un exemple de suite double (on dit aussi suite à double entrée). Il faut deux indices pour décrire son terme général et l'on pourrait décider de le noter $u_{i,j}$ ($u_{i,j} = a_i \times b_j$), insistant ainsi sur le fait que deux numéros sont nécessaires pour décrire un terme. Ceci nous amène à la définition suivante :

Définition 1. Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double réelle (❋ ou complexe). Pour n, p, q et r entiers naturels donnés tels que $n\leqslant p$ et $q\leqslant r$, on pose

$$\sum_{n\leqslant i\leqslant p,\ q\leqslant j\leqslant r} u_{i,j} = \sum_{i=n}^{p}\left(\sum_{j=q}^{r} u_{i,j}\right).$$

On a maintenant une définition générale qui mérite d'être analysée. L'expression $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3} u_{i,j}\right)$ contient 6 termes, additionnés dans un ordre très précis. On commence à donner la valeur 1 à i puis on fait varier j de 1 à 3, puis on donne à i la valeur 2 et on fait de nouveau varier j de 1 à 3. La signification exacte de $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3}u_{i,j}\right)$ est donc $(u_{1,1}+u_{1,2}+u_{1,3})+(u_{2,1}+u_{2,2}+u_{2,3})$. Mais, l'addition des complexes étant commutative (et associative), cette somme peut tout autant s'écrire $u_{2,1}+u_{2,2}+u_{1,3}+u_{1,1}+u_{2,3}+u_{1,2}$. On a là la signification la plus exacte de l'expression $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq 2,\ 1\leq j\leq 3}u_{i,j}$: on veut additionner les 6 termes $u_{i,j}$, « en vrac ». Pour ce faire, on peut décider d'ordonner les calculs en faisant varier j à i fixé, puis en faisant varier i, c'est-à-dire en sommant sur j d'abord puis sur i ensuite. Ceci correspond à l'écriture $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3}u_{i,j}\right)$. Mais on peut aussi décider de fixer d'abord j, c'est-à-dire de sommer sur i à j fixé puis de sommer sur j, ce qui correspond à l'écriture $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{2}u_{i,j}\right)$. Cette dernière somme s'écrit explicitement : $(u_{1,1}+u_{2,1})+(u_{1,2}+u_{2,2})+(u_{1,3}+u_{2,3})$. De manière générale :

Théorème 3. Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double réelle (❋ ou complexe). Pour n et p entiers naturels donnés,

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{p}u_{i,j}\right)=\sum_{j=0}^{p}\left(\sum_{i=0}^{n}u_{i,j}\right).$$

Démonstration . On présente les nombres $u_{i,j}$ dans un tableau à double entrée où le numéro i est un numéro de ligne (horizontale) et le numéro j est un numéro de colonne (verticale) :

	0	1	$\dots$	j	$\dots$	p
0	$u_{0,0}$	$u_{0,1}$	$\dots$	$u_{0,j}$	$\dots$	$u_{0,p}$
1	$u_{1,0}$	$u_{1,1}$		$u_{1,j}$		$u_{1,p}$
$\vdots$	$\vdots$					$\vdots$
i	$u_{i,0}$	$u_{i,1}$		$u_{i,j}$		$u_{i,p}$
$\vdots$	$\vdots$					$\vdots$
n	$u_{n,0}$	$u_{n,1}$	$\dots$	$u_{n,j}$	$\dots$	$u_{n,p}$

	0	1	$\dots$	j	$\dots$	p
0	$u_{0,0}$	$u_{0,1}$	$\dots$	$u_{0,j}$	$\dots$	$u_{0,p}$
1	$u_{1,0}$	$u_{1,1}$		$u_{1,j}$		$u_{1,p}$
$\vdots$	$\vdots$					$\vdots$
i	$u_{i,0}$	$u_{i,1}$		$u_{i,j}$		$u_{i,p}$
$\vdots$	$\vdots$					$\vdots$
n	$u_{n,0}$	$u_{n,1}$	$\dots$	$u_{n,j}$	$\dots$	$u_{n,p}$

Le tableau de gauche représente $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{p}u_{i,j}\right)$ et le tableau de droite représente $\displaystyle\sum_{j=0}^{p}\left(\sum_{i=0}^{n}u_{i,j}\right)$. Dans le premier cas, on a additionné tous les termes d'une même ligne puis on est passé à la ligne suivante et dans le deuxième, on a additionné tous les termes d'une colonne puis on est passé à la colonne suivante. Dans les deux cas, on additionné tous les $u_{i,j}$.

❏

En référence aux tableaux précédents, **additionner en ligne** les nombres $u_{i,j}$, c'est calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{p}u_{i,j}\right)$ et **additionner en colonne** les nombres $u_{i,j}$, c'est calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{p}\left(\sum_{i=0}^{n}u_{i,j}\right)$. A i fixé, $\displaystyle\sum_{j=0}^{p}u_{i,j}$ est la somme des termes de la ligne i et à j fixé, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}u_{i,j}$ est la somme des termes de la colonne j.

Développement d'un produit de deux sommes.

On se donne n nombres réels (❋ ou complexes) a_1,..., a_n puis p autres nombres réels (❋ ou complexes) b_1,..., b_p. Immédiatement, on a

$$1)\ \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\times\left(\sum_{j=1}^{p}b_j\right)=\sum_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}a_ib_j$$

$$2)\ \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_ia_j=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j.$$

En 1), on doit noter que lorsqu'on développe le produit d'une parenthèse à n termes par une parenthèse à p termes, on obtient $n \times p$ termes (chacun des n nombres a_i est multiplié par chacun des p nombres b_j). La première égalité de 2) est un cas particulier de 1) ($p = n$ et pour tout i, $b_i = a_i$). Dans la deuxième égalité, on a isolé les n termes $a_i \times a_i$, ce qui permet déjà d'écrire

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i a_j,$$

puis on a regroupé les termes égaux ($a_1a_2 + a_2a_1 = 2a_1a_2$ et plus généralement, en imposant $i < j$, $a_ia_j + a_ja_i = 2a_ia_j$). Ainsi, par exemple,

$$\boxed{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc).}$$

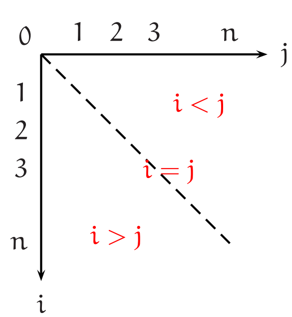
Si on veut calculer directement $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ en l'écrivant comme un produit de deux parenthèses, on doit prendre garde aux indices utilisés. Il est tout à fait exact que $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$ mais cette écriture ne permet pas vraiment de comprendre que dans les deux sommes, les indices de sommation sont complètement indépendants l'un de l'autre. Pour bien comprendre le développement, il faut utiliser **deux indices différents** :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} a_i a_j.$$

Le développement est alors mécanique : chacun des a_i de la première somme se distribue sur chacun des a_j de la deuxième. N'utiliser qu'une seule lettre pour indice de sommation a tendance à faire commettre une erreur de clacul usuelle $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$ ce qui est **totalement faux** (il manque les termes a_1a_2, a_1a_3, ...).

Généralisation.
Dans ce qui précède, on a fait varier le couple (i,j) dans le rectangle $R = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 /\ 0 \leqslant i \leqslant n,\ 0 \leqslant j \leqslant p\}$ et on a noté $\sum_{0 \leqslant i \leqslant n,\ 0 \leqslant j \leqslant p}$ la somme correspondante. Quand $p = n$, au lieu de $\sum_{0 \leqslant i \leqslant n,\ 0 \leqslant j \leqslant n}$, on écrit plus simplement $\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$. Ainsi, $\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant 1} u_{i,j} = u_{0,0} + u_{1,0} + u_{0,1} + u_{1,1}$.
Plus généralement, on peut faire varier le couple d'indices (i,j) dans un sous-ensemble D de l'ensemble des couples d'entiers compris entre 0 et n. La somme correspondante se note alors $\sum_{(i,j) \in D} u_{i,j}$.

Les situations les plus fréquentes sont $\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$, $\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n}$ et $\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n,\ i \neq j}$ (souvent notée plus simplement $\sum_{i \neq j}$). Dans chacun des cas, il est indispensable de se représenter l'ensemble des couples (i,j) considérés, par exemple en visualisant un repère :



Exercice 10. Ecrire les sommes suivantes en sommant en lignes et de même en sommant en colonnes

1) $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$, **2)** $\sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} ij$.

Solution 10. Soit $n \geqslant 2$. En sommant en lignes, on obtient

1) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} ij\right) = \sum_{i=1}^{n-1}\left(i\sum_{j=i+1}^{n} j\right)$, et

2) $\displaystyle\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} ij = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} ij\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i\sum_{j=1}^{i} j\right)$.

En sommant en colonnes, on obtient

1) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} ij\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j-1} i\right)$, et

2) $\displaystyle\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} ij = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n} ij\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{j=i}^{n} i\right)$.

Par exemple, pour écrire correctement la première somme, on a visualisé dans un tableau ou un repère l'ensemble des couples (i,j) tels que $1\leqslant i<j\leqslant n$ (ce qui se détaille en $1\leqslant i$ et $i<j$ et $j\leqslant n$), on a fixé un i entre 1 et $n-1$ (ces deux nombres sont obtenus en **projetant** sur l'axe des i le domaine considéré) puis on a fait varier j de $i+1$ à n (ces nombres sont lus sur une « verticale »).

Exercice 11. Calculer les sommes suivantes : **1)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij$, **2)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i$, **3)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$

Solution 11. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1)

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(i\sum_{j=i+1}^{n} j\right) = \sum_{i=1}^{n-1} i\frac{(i+1+n)(n-i)}{2} = \frac{1}{2}\left(-\sum_{i=1}^{n-1} i^3 - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + n(n+1)\sum_{i=1}^{n-1} i\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{(n-1)^2n^2}{4} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n^2(n+1)}{2}\right)\\ &= \frac{(n-1)n}{24}(-3(n-1)n-2(2n-1)+6n(n+1)) = \frac{(n-1)n(3n^2+5n+2)}{24}\\ &= \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}.\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(i\sum_{j=i+1}^{n} 1\right) = \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) = n\sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\\ &= \frac{n(n-1)(3n-(2n-1))}{6} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}.\end{aligned}$$

3) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

⇨ **Commentaire** .

◇ *En 2), il faut comprendre que pour* i *et* j *donnés,* $u_{i,j}=i$*. Ainsi, on a placé le nombre* 1 *dans toutes les cases de la première ligne du tableau, le nombre* 2 *dans toutes les cases de la deuxième ligne...*

◇ *En 1), on aurait pu être plus astucieux. On a*

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} ij + \sum_{i=j} ij = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2.$$

Mais bien sûr, $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij = \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} ij$ *et donc*

$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij+\sum_{i=1}^{n} i^2=\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2\ldots.$$

◇ *En 1) toujours, à la première étape, nous avons écrit* $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij=\sum_{i=1}^{n-1}\left(i\sum_{j=i+1}^{n} j\right)$ *ce qui peut se détailler en* $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} ij\right)=\sum_{i=1}^{n-1}\left(i\sum_{j=i+1}^{n} j\right)$. *Maintenant, dans* $\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} ij$, *la variable de sommation est* j. *On peut donc mettre* i *en facteurs mais pas* j.

Ensuite, nous avons écrit $\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} j=\frac{(i+1+n)(n-i)}{2}$ *et pour ce faire, nous avons utilisé la formule fournissant une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique donnée page 12.*

2 Le binome de Newton

2.1 Les coefficients binomiaux

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $n!=1\times2\times\ldots\times n$, et par convention, $0!=1$. $n!$ est la *factorielle* de l'entier n. On peut également définir $n!$ par récurrence : $0!=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)!=(n+1)\times n!$. On doit connaître les premières factorielles :

$$0!=1\quad 1!=1\quad 2!=2\quad 3!=6\quad 4!=24\quad 5!=120\quad 6!=720\quad 7!=5040\ \ldots$$

Maintenant, pour n et p entiers naturels donnés, on définit le symbole $\binom{n}{p}$ (qui se lit « p parmi n »), aussi noté C_n^p (la lettre C étant l'initiale du mot « combinaisons ») par

$$\boxed{\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}\text{ si } p\leqslant n \text{ et } \binom{n}{p}=0 \text{ si } p>n \text{ ou si } p<0.}$$

Les définitions précédentes sont péremptoires et non motivées. Ce problème sera réglé dans le chapitre « Dénombrements » où l'on donnera la signification du coefficient $\binom{n}{p}$. La manipulation de ces coefficients appartient à une branche des mathématiques appelée *analyse combinatoire*, qui est l'ensemble des techniques qui servent à dénombrer (ou plus simplement compter).

Les coefficients binomiaux sont appelés ainsi car ce sont les coefficients qui apparaissent dans la formule du binôme de Newton exposée un peu plus loin. On doit déjà connaître en tant que telles les valeurs usuelles suivantes :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n,\ \forall n\geqslant 2,\ \binom{n}{2}=\binom{n}{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}.}$$

Sinon, les différentes propriétés de calculs des coefficients binomiaux sont regroupés dans l'encadré suivant :

Théorème 4.

1) Pour n et p entiers naturels donnés tels que $1\leqslant p\leqslant n$, $\displaystyle\binom{n}{p}=\frac{\overbrace{n(n-1)\ldots(n-p+1)}^{p\text{ facteurs}}}{p!}$.

2) Pour n et p entiers naturels donnés tels que $0\leqslant p\leqslant n$, $\displaystyle\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$.

3) Pour n et p entiers naturels donnés tels que $1\leqslant p\leqslant n-1$, $\displaystyle\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n}{p}$.

4) Pour n et p entiers naturels donnés tels que $1\leqslant p\leqslant n$, $\displaystyle\binom{n}{p}=\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$,

et donc aussi $\displaystyle p\binom{n}{p}=n\binom{n-1}{p-1}$.

Démonstration .

1) $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n\times\ldots\times(n-p+1)\times(n-p)\ldots\times 1}{p!(n-p)!} = \frac{n\ldots(n-p+1)\times(n-p)!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}$.

2) $\displaystyle\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$.

3)

$$\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}+\frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} = \frac{p\times(n-1)!}{p\times(p-1)!(n-p)!}+\frac{(n-p)\times(n-1)!}{p!(n-p)\times(n-1-p)!}$$
$$= \frac{p\times(n-1)!+(n-p)\times(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n\times(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.$$

4) $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n\times(n-1)!}{p\times(p-1)!((n-1)-(p-1))!} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$. ❑

⇨ **Commentaire** .

◇ *La relation 1) fournit une écriture simplifiée du coefficient* $\binom{n}{p}$. *Cette écriture de* $\binom{n}{p}$ *est fréquement meilleure que la première fournie car la fraction est* ***simplifiée****. On l'utilise systématiquement quand* p *prend une valeur précise petite. Par exemple,* $\binom{8}{2} = \frac{8\times 7}{2} = 28$ *et non pas* $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!}$, *ou aussi* $\binom{n}{2} = \frac{\overbrace{n(n-1)}^{2\ facteurs}}{2}$ *et non pas* $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$. *D'autre part, seule cette expression de* $\binom{n}{p}$ *pourra se généraliser au cas où* n *n'est pas entier. Ainsi, on verra que* $\binom{1/2}{3} = \frac{\overbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}^{3\ facteurs}}{3\times 2}$ *(alors que bien sûr, l'écriture* $\frac{\frac{1}{2}!}{3!(\frac{1}{2}-3)!}$ *n'a aucun sens).*

◇ *La relation 2) montre la symétrie des coefficients binômiaux. Par exemple,* $\binom{8}{2} = \binom{8}{6}$ *ou* $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$. *Les entiers* p *et* $n-p$ *sont symétriques par rapport au nombre rationnel* $\frac{n}{2}$ *car leur somme vaut* $p+(n-p) = n$.

◇ *Les relations 3) et 4) permettent l'une ou l'autre de calculer les coeffcients binomiaux par récurrence. Dans les deux cas, si on connaît les coefficients de la ligne n°* $(n-1)$ *du triangle de* Pascal, *on peut en déduire ceux de la ligne n°* n. *La relation 3) est la relation de* Pascal *qui fournit la construction usuelle du triangle de* Pascal *(voir ci-dessous). Elle a un mérite supplémentaire par rapport à la relation 4) : elle n'utilise qu'une addition, cette opération étant réalisée plus rapidement par une machine qu'une multiplication et une division, opérations utilisées quant à elles en 4).*

◇ *La relation 3) permet de montrer (par récurrence) que* ***les coefficients binomiaux sont des entiers*** *ce qui ne saute pas aux yeux a priori.*

◇ *On a donné une variante de 4). La nuance entre les deux égalités est que la deuxième ne fait apparaître que des nombres entiers alors que la première fait apparaître des fractions. La deuxième égalité,* ***sans fraction****, se révèlera pratique à utiliser en arithmétique.*

◇ *On doit aussi noter que la relation 3) reste valable pour* $p \geqslant n$ *ou si* $p \leqslant 0$. *En effet, si* $p = n$, $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p} = 1 = \binom{n}{p}$, *et si* $p > n$, $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p} = 0 = \binom{n}{p}$.

Triangle de Pascal

On représente dans un tableau les nombres $\binom{n}{p}$, n étant un numéro de ligne et p un numéro de colonne. On démarre la construction de ce tableau infini en plaçant des 1 dans les cases $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$,..., $(k,0)$... et aussi $(1,1)$, $(2,2)$,..., (k,k). Puis on remplit le triangle ainsi formé grâce à la relation de Pascal. Le nombre $\binom{n}{p}$ est la somme de $\binom{n-1}{p}$ et $\binom{n-1}{p-1}$ ou encore la somme des deux nombres de la ligne précédente situés juste au-dessus et au-dessus et à gauche.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1			$\binom{n-1}{p-1}$	$+$	$\binom{n-1}{p}$
3	1	3	3	1			$=$	$\binom{n}{p}$
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Ce tableau que Blaise Pascal nommait *le triangle arithmétique*, n'a pas été découvert par Pascal lui-même mais, c'est le premier à l'avoir étudié de manière systématique. Il est d'une richesse infinie. Par exemple,

- la somme des termes d'une ligne est une puissance de 2 ($1 + 1 = 2$, $1 + 2 + 1 = 4$, $1 + 3 + 3 + 1 = 8$,...). Ceci sera démontré plus loin.
- dans les lignes dont le numéro est un nombre premier ($n = 2$, $n = 3$, $n = 5$, $n = 7$, $\ldots$) tous les coefficients à l'exception du premier et du dernier sont divisibles par n (par exemple dans la ligne n° 7, les nombres 7, 21 et 35 sont divisibles par 7). Ce résultat constitue un exercice classique d'arithmétique.
- Quand on additionne les nombres d'une colonne jusqu'à une certaine ligne, on trouve le coefficient situé à la ligne et à la colonne suivante. Par exemple, en descendant le long de la colonne n° 2 et en s'arrêtant à la ligne n° 5, on trouve $1 + 3 + 6 + 10 = 20$ qui est le coefficient situé à la colonne n° 3 et à la ligne n° 6. Ce résultat est un exercice classique d'analyse combinatoire ...

2.2 La formule du binôme de Newton

Théorème 5 (formule du binôme de Newton). Soient a et b deux nombres réels (ou complexes). Pour tout entier naturel n, on a

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.}$$

⇨ **Commentaire** .

◇ *La formule ci-dessus appelle plusieurs commentaires. Tout d'abord, l'entier k varie de 0 à n (et non pas de 1 à n), et cette somme est donc constituée de $n+1$ termes et non pas de n termes ($(a+b)^1$ contient deux termes, $(a+b)^2$ contient trois termes...). Ensuite, les premiers et derniers termes sont $\binom{n}{0}a^n b^0 = a^n b^0$ et $\binom{n}{n}a^0 b^n = a^0 b^n$. Ces termes devant par ailleurs être a^n et b^n, on décide conventionnellement que pour tout nombre réel x, on a $x^0 = 1$, y compris quand $x = 0$. Cette convention permet d'une part de donner du terme général de la somme une écriture unique : $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ et d'autre part, permet que la formule écrite soit valable dans les cas particuliers $a = 0$ ou $b = 0$. Par exemple, quand $b = 0$, l'expression b^k vaut 0 quand $k \geqslant 1$ et 1 quand $k = 0$ de sorte que $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ vaut 0 quand $k \geqslant 1$ et a^n quand $k = 0$. Néanmoins, la convention $z^0 = 1$ est très dangereuse quand $z = 0$ (car cette convention est tout simplement fausse) et source d'erreurs dans certaines situations, et on doit énormément s'en méfier.*

◇ *La formule du binôme de Newton sera valable à l'identique dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Celles et ceux qui ont suivi l'enseignement « maths expertes » peuvent d'ores et déjà le considérer comme acquis.*

Démonstration . Le résultat est conventionnel quand $n = 0$. On le démontre par récurrence quand $n \geqslant 1$.

• Pour $n = 1$, $(a+b)^1 = a + b = \displaystyle\binom{1}{0}a^1 b^0 + \binom{1}{1}a^0 b^1 = \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^{1-k}b^k$. Le résultat est donc vrai pour $n = 1$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$. Alors,

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right) \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\
&= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k'=1}^{n+1}\binom{n}{k'-1}a^{n-(k'-1)}b^{k'} \text{ (en posant } k'=k+1)\\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k + b^{n+1}\\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)a^{n+1-k}b^k + b^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + b^{n+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k.
\end{aligned}
$$

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, le résultat restant vrai quand $n=0$. D'autre part, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}a^{n-(n-k)}b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$. ❑

En remplaçant b par $-b$, on obtient $(a-b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^ka^{n-k}b^k$. Dans la pratique, on aura souvent intérêt à ne pas utiliser cette formule. Par exemple, pour développer $(2-1)^n$, on écrira $(2-1)^n = (2+(-1))^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}(-1)^k$, évitant ainsi des problèmes de signes dûs à une mauvaise utilisation de la symétrie du binôme.

Exercice 12. Calculer les sommes suivantes : **1)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$, **2)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k2^{k-1}$, **3)** ❋ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\frac{k\pi}{2}$.

Solution 12.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k1^{n-k} = (1+2)^n = 3^n$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k2^{k-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}\binom{2n}{k}(-2)^k = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-2)^k - 1\right) = \frac{1}{2}\left((-2+1)^{2n}-1\right) = 0$ ($(-1)^{2n}=1$ car $2n$ est un entier pair).

3) ❋ Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\frac{k\pi}{2} &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{i\pi/2}\right)^k\right) = \mathrm{Re}\left(\left(1+e^{i\pi/2}\right)^n\right) = \mathrm{Re}\left(e^{in\pi/4}\left(e^{i\pi/4}+e^{-i\pi/4}\right)^n\right)\\
&= \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)2^n\cos^n\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 2^{n/2}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).
\end{aligned}
$$

⇨ **Commentaire** . *Dans les trois cas, il s'agit de repérer le développement d'un binôme. Le 2) est le moins clair. C'est le coefficient* $\binom{2n}{k}$ *qui nous guide et non pas les bornes du* Σ. *Ce coefficient nous dit de chercher un binôme d'exposant* $2n$.

Exercice 13. Quel est le coefficient de $a^4b^2c^3$ dans le développement de $(a-b+2c)^9$?

Solution 13. La formule du binôme de Newton fournit

$$(a-b+2c)^9 = \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}(a-b)^k(2c)^{9-k} = (a-b)^9 + \ldots + \binom{9}{6}(a-b)^6(2c)^3 + \ldots + (2c)^9.$$

Ensuite, $(a-b)^6 = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}a^k(-b)^{6-k} = a^6 - \ldots + \binom{6}{4}a^4b^2 - .. + b^6$.

Le coefficient cherché est donc $\binom{9}{6}\binom{6}{4}2^3 = \dfrac{9\times 8\times 7}{3\times 2}\times\dfrac{6\times 5}{2}\times 2^3 = 3\times 4\times 7\times 3\times 5\times 8 = 10080$.

⇨ **Commentaire** . *Cet exercice n'est pas anecdotique. Le moment venu, il faudra développer des expressions compliquées. Ceci sera fait en particulier dans les chapitres « Dénombrements », « Polynômes » et « Développements limités ».*

Théorème 6.

1) $\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$,

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}}\binom{n}{2k} = \sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$.

Démonstration .

1) Soit $n\in\mathbb{N}$. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $S_1 = \sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}}\binom{n}{2k}$ et $S_2 = \sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k+1}$. Alors, $S_1 - S_2 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$ (car $n\geqslant 1$), et donc $S_1 = S_2$. Puis $2S_1 = S_1 + S_2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$, et donc $S_1 = S_2 = 2^n/2 = 2^{n-1}$.

❑

⇨ **Commentaire** . *La démonstration du 2) est peut-être plus lisible en détaillant les sommes considérées. On a écrit que*

$$\left(\tbinom{n}{0}+\tbinom{n}{2}+\tbinom{n}{4}+\ldots\right)-\left(\tbinom{n}{1}+\tbinom{n}{3}+\tbinom{n}{5}+\ldots\right) = \tbinom{n}{0}-\tbinom{n}{1}+\tbinom{n}{2}-\tbinom{n}{3}+\tbinom{n}{4}-\tbinom{n}{5}+\ldots = (1-1)^n = 0$$

et que

$$\left(\tbinom{n}{0}+\tbinom{n}{2}+\tbinom{n}{4}+\ldots\right)+\left(\tbinom{n}{1}+\tbinom{n}{3}+\tbinom{n}{5}+\ldots\right) = \tbinom{n}{0}+\tbinom{n}{1}+\tbinom{n}{2}+\tbinom{n}{3}+\tbinom{n}{4}+\tbinom{n}{5}+\ldots = 2^n.$$

Détaillons l'écriture de la somme S_1. Il n'est pas possible de préciser le dernier terme sans préciser la parité de l'entier n. Le terme général de la somme S_1 s'écrit $\binom{n}{2k}$ où k est un entier naturel tel que $0\leqslant 2k\leqslant n$, ou encore $0\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}$. On a écrit ce dernier encadrement sous le symbole Σ ce qui signifie que k prend toutes les valeurs entières comprises entre 0 et $\frac{n}{2}$, sans nécessairement prendre la valeur $\frac{n}{2}$.

Exercice 14. (identités combinatoires)

1) ❄ Calculer les sommes $\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots$ et $\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\ldots$ pour $n\in\mathbb{N}$.

2) Calculer la somme $0\times\binom{n}{0}+1\times\binom{n}{1}+\ldots+n\times\binom{n}{n}$.

3) Montrer que $\binom{p}{p}+\binom{p+1}{p}\ldots+\binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ où $0\leqslant p\leqslant n$. Interprétation dans le triangle de Pascal ?

4) Montrer que $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$ (utiliser le polynôme $(1+x)^{2n}$ (on admettra que deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients)).

Solution 14.

1) ❄ Soit $n\in\mathbb{N}$. En posant $j = e^{2i\pi/3}$ (le nombre j est étudié dans le chapitre « Nombres complexes »), on a :

$$(1+1)^n+(1+j)^n+(1+j^2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+j^k+j^{2k}\right).$$

Maintenant, puisque $j^3 = 1$,

- si $k \in 3\mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3p$ et $1 + j^k + j^{2k} = 1 + \left(j^3\right)^p + \left(j^3\right)^{2p} = 3$;
- si $k \in 3\mathbb{N}+1$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3p+1$ et $1 + j^k + j^{2k} = 1 + j\left(j^3\right)^p + j^2\left(j^3\right)^{2p} = 1 + j + j^2 = 0$;
- si $k \in 3\mathbb{N}+2$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3p+2$ et $1 + j^k + j^{2k} = 1 + j^2\left(j^3\right)^p + j^4\left(j^3\right)^{2p} = 1 + j^2 + j = 0$.

Finalement, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1 + j^k + j^{2k}\right) = 3\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{3}}\binom{n}{3k}$. Par suite,

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{3}}\binom{n}{3k} = \frac{1}{3}\left(2^n + (1+j)^n + \left(1+j^2\right)^n\right) = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\mathrm{Re}\left((1+j)^n\right)\right) = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\mathrm{Re}\left(\left(-j^2\right)^n\right)\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right).$$

De même, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+1)^n + (1+i)^n + (1-1)^n + (1-i)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1^k + i^k + (-1)^k + (-i)^k\right) = 4\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{4}}\binom{n}{4k}$.
Par suite,

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{4}}\binom{n}{4k} = \frac{1}{4}\left(2^n + 2\mathrm{Re}\left((1+i)^n\right)\right) = \frac{1}{4}\left(2^n + 2\mathrm{Re}\left(\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^n\right)\right) = \frac{1}{4}\left(2^n + 2^{\frac{n}{2}+1}\mathrm{Re}\left(e^{in\pi/4}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(2^n + 2^{\frac{n}{2}+1}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right).$$

2) 1ère solution. Pour x réel, posons $P(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$. Pour x réel,

$$P(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right) = \frac{d}{dx}\left((1+x)^n\right) = n(1+x)^{n-1}.$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

2ème solution.

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

3) Pour $1 \leqslant k \leqslant n-p$, $\displaystyle\binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}$ (ce qui reste vrai pour $k = 0$ en tenant compte de $\displaystyle\binom{p}{p+1} = 0$).
Par télescopage, on obtient alors

$$\sum_{k=0}^{n-p}\binom{p+k}{p} = \sum_{k=0}^{n-p}\left(\binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}\right) = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Interprétation dans le triangle de Pascal : quand on descend dans le triangle de Pascal, le long de la colonne p, du coefficient $\displaystyle\binom{p}{p}$ (ligne p) au coefficient $\displaystyle\binom{p}{n}$ (ligne n), et que l'on additionne ces coefficients, on trouve $\displaystyle\binom{n+1}{p+1}$ qui se trouve une ligne plus bas et une colonne plus loin.

4) $\displaystyle\binom{2n}{n}$ est le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$. Mais d'autre part ,

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right).$$

Dans le développement de cette dernière expression, le coefficient de x^n vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ ou encore $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coefficients et donc $\displaystyle\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

⇨ **Commentaire** . *Le 1) est un prolongement du théorème qui précède cet exercice. On veut calculer la somme des coefficients binomiaux de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4... La connaissance des racines* k*-èmes de l'unité dans* $\mathbb{C}$ *est essentielle (voir chapitre « Nombres complexes »). Ces racines ont deux propriétés fondamentales. Tout d'abord,* $(-1)^2=1$, $j^3=(j^2)^3=1$, $i^4=(-1)^4=(-i)^4=1$*... et de manière générale, si* ω *est une racine* k*-ème de* 1, $\omega^k=1$*. Dans les développements de* $(1-1)^n$, $(1+j)^n$, $(1+i)^n$*, on retrouve donc écrit un coefficient* 1 *de* 2 *en* 2*, de* 3 *en* 3*... Mais de plus,* $1-1=0$, $1+j+j^2=0$, $1+i-1-i=0$ *ce qui a permis, par addition, d'éliminer les coefficients binomiaux indésirables.*

2.3 Application à la trigonométrie ❋

2.3.1 Linéarisation ❋

On reviendra, dans le chapitre « Nombres complexes », sur la notion de linéarisation. L'ordre dans lequel sont exposés les différents chapitres (. . . « Σ et binôme » puis ..., « Trigonométrie » puis « Nombres complexes » . . .) a ses avantages et ses inconvénients. Il faudrait en fait traiter tous les chapitres en même temps.
Soit $n\in\mathbb{N}$. Nous voulons **linéariser** l'expression $\cos^n x$ ou encore nous voulons une écriture de $\cos^n x$ où n'apparaisse plus aucun produit de fonctions non constantes. D'après les formules d'Euler (voir chapitre « Nombres complexes »),

$$\cos^n x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{ix}\right)^k\left(e^{-ix}\right)^{n-k}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)x}.$$

Si n est pair, on peut poser $n=2p$ où p est un entier naturel. En isolant le terme $k=p$ et en regroupant les termes conjugués, on obtient :

$$\begin{aligned}
\cos^{2p}x&=\frac{1}{2^{2p}}\left(\binom{2p}{p}+\sum_{k=p+1}^{2p}\binom{2p}{k}e^{2i(k-p)x}+\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}e^{2i(k-p)x}\right)\\
&=\frac{1}{2^{2p}}\left(\binom{2p}{p}+\sum_{k'=1}^{p}\binom{2p}{p+k'}e^{2ik'x}+\sum_{k''=1}^{p}\binom{2p}{p-k''}e^{-2ik''x}\right)\\
&\text{(en posant } k'=k-p \text{ dans la première somme et } k''=p-k \text{ dans la deuxième)}\\
&=\frac{1}{2^{2p}}\left(\binom{2p}{p}+\sum_{k=1}^{p}\binom{2p}{p+k}e^{2ikx}+\sum_{k=1}^{p}\binom{2p}{p-k}e^{-2ikx}\right)\\
&=\frac{1}{2^{2p}}\left(\binom{2p}{p}+\sum_{k=1}^{p}\binom{2p}{p+k}\left(e^{2ikx}+e^{-2ikx}\right)\right)\ \left(\binom{2p}{k+p}=\binom{2p}{p-k}\text{ car } p+k+p-k=2p\right)\\
&=\frac{1}{2^{2p}}\left(\binom{2p}{p}+2\sum_{k=1}^{p}\binom{2p}{p+k}\cos(2kx)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ \cos^{2p}x=\frac{1}{2^{2p}}\left(\binom{2p}{p}+2\sum_{k=1}^{p}\binom{2p}{p+k}\cos(2kx)\right).}$$

Pour comprendre complètement le calcul ci-dessus, il faut le refaire en écrivant explicitement beaucoup de termes du début, du milieu et de la fin.
Le cas où n est impair se traite de manière analogue (il n'est pas besoin dans ce cas d'isoler un terme), de même que la linéarisation de $\sin^n x$.
Il est indispensable de savoir linéariser pour savoir intégrer (et même dériver) correctement des expressions trigonométriques, le moment venu. La maîtrise parfaite de l'exercice ci-dessous est un objectif devant être atteint rapidement.

Exercice 15. Linéariser les expressions suivantes : **1)** $\cos^4 x$, **2)** $\sin^5 x$, **3)** $\cos^3 x \sin^4 x$, **4)** $\cos^3 x \sin^3 x$.

Solution 15. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(\left(e^{ix}\right)^4 + 4\left(e^{ix}\right)^3 e^{-ix} + 6\left(e^{ix}\right)^2\left(e^{-2ix}\right)^2 + 4e^{ix}\left(e^{-ix}\right)^3 + \left(e^{-ix}\right)^4\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}+4(e^{2ix}+e^{-2ix})+6\right) = \frac{1}{8}(\cos(4x)+4\cos(2x)+3).\end{aligned}$$

⇨ **Commentaire** . *A la première étape du calcul, on a* ***tout de suite*** *isolé* $\frac{1}{2^4}$ *et en même temps développé le binôme. A la deuxième étape, on a regroupé les termes conjugués. A la troisième étape, on a utilisé* $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$ *puis on a simplifié ce 2 et prenant garde au coefficient isolé, qui lui n'avait pas été doublé avant.*

$$\begin{aligned}\sin^5 x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{32i}\left((e^{5ix}-e^{-5ix}) - 5\left(e^{3ix}-e^{-3ix}\right) + 10\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right)\\ &= \frac{1}{16}(\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin(x)).\end{aligned}$$

⇨ **Commentaire** . *Ici, il ne faut pas oublier le nombre* i *:* $\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$ *et* $e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$.

$$\begin{aligned}\cos^3 x\sin^4 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{2^3}\frac{1}{(2i)^4}(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix})(e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix})\\ &= \frac{1}{2^7}\left(e^{7ix}+e^{-7ix}-\left(e^{5ix}+e^{-5ix}\right)-3\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)+3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right)\\ &= \frac{1}{64}(\cos(7x)-\cos(5x)-3\cos(3x)+3\cos(x)).\end{aligned}$$

⇨ **Commentaire** . *Ici, il faut développer* ***complètement*** *l'expression* ***avant*** *de repasser en sinus et cosinus.*

$$\begin{aligned}\cos^3 x\sin^3 x &= \left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3}\times\frac{1}{(2i)^3}\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)^3 = \frac{1}{2^3}\times\frac{1}{(2i)^3}\left(\left(e^{6ix}-e^{-6ix}\right)-3\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2^3}\times\frac{1}{(2i)^3}(2i\sin(6x)-3\times 2i\sin(2x)) = \frac{1}{32}(-\sin(6x)+3\sin(2x)).\end{aligned}$$

⇨ **Commentaire** . *Dans les quatre cas, la parité de la fonction était une aide précieuse dans les calculs. En 1) et 3), les fonctions considérées sont paires et on peut démontrer que le développement ne peut contenir que des cosinus. De même, les fonctions de 2) et 4) sont impaires et le développement ne peut contenir que des sinus.*

2.3.2 Polynômes de Tchebychev ❄

Pour n entier naturel donné, cherchons à exprimer $\cos(nx)$ comme une expression polynomiale en $\cos x$.

$$\begin{aligned}\cos(nx) &= \mathrm{Re}\left(e^{inx}\right) = \mathrm{Re}\left(\left(e^{ix}\right)^n\right) = \mathrm{Re}\left((\cos x + i\sin x)^n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}x(i\sin x)^k\right)\\ &= \sum_{0\leqslant l\leqslant \frac{n}{2}}\binom{n}{2l}\cos^{n-2l}x(i)^{2l}(\sin^2 x)^l = \sum_{0\leqslant l\leqslant \frac{n}{2}}(-1)^l\binom{n}{2l}\cos^{n-2l}x(1-\cos^2 x)^l.\end{aligned}$$

Ainsi, si pour tout réel X, on pose

$$\boxed{T_n(X) = \sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}}(-1)^k\binom{n}{2k}X^{n-2k}(1-X^2)^k,}$$

alors, pour tout réel x, on a $T_n(\cos x) = \cos(nx)$. T_n est le n-ème polynôme de TCHEBYCHEV de première espèce. Ceux-ci seront étudiés en détail dans le chapitre « Polynômes ».
Pour $0 \leqslant n \leqslant 3$, on obtient en particulier

$$\forall X \in \mathbb{R},\ T_0(X) = 1,\ \forall X \in \mathbb{R},\ T_1(X) = X,\ \forall X \in \mathbb{R},\ T_2(X) = 2X^2 - 1,\ \forall X \in \mathbb{R},\ T_3(X) = 4X^3 - 3X.$$

3 Le symbole $\prod$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels (❋ ou complexes), pour p et n entiers naturels tels que $p \leqslant n$, on note $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} u_k$ le produit $u_p \times u_{p+1} \times \ldots \times u_n$. Ainsi,

$$\prod_{k=p}^{p} u_k = u_p \text{ et } \forall n \geqslant p,\ \prod_{k=p}^{n+1} u_k = \left(\prod_{k=p}^{n} u_k\right) \times u_{n+1}.$$

Par exemple, pour $n \geqslant 1$, on peut écrire $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$ ou aussi, pour $n \geqslant 1$ et $a \in \mathbb{R}$ (❋ ou $\mathbb{C}$), $a^n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} a$. Les règles de calculs usuelles sont les suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{c} \textbf{1)}\ \displaystyle\prod_{k=p}^{n} u_k v_k = \left(\prod_{k=p}^{n} u_k\right)\left(\prod_{k=p}^{n} v_k\right) \text{ et } \prod_{k=p}^{n} (\lambda u_k) = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^{n} u_k. \\ \textbf{2)}\ \left(\displaystyle\prod_{k=p}^{n} u_k\right)^{\alpha} = \prod_{k=p}^{n} u_k^{\alpha}. \end{array}}$$

On dispose aussi d'une formule sur les produits télescopiques pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annulant pas :

$$\boxed{\prod_{k=p}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_n}{u_p} \left(= \frac{\text{« extrémité »}}{\text{« origine »}}\right).}$$

Enfin, les fonctions exponentielles et logarithmes permettent de relier les sommes et les produits (la première formule est valable pour une suite de réels strictement positifs uniquement) :

$$\boxed{\ln\left(\prod_{k=p}^{n} u_k\right) = \sum_{k=p}^{n} \ln(u_k) \text{ et } \prod_{k=p}^{n} e^{u_k} = e^{\sum_{k=p}^{n} u_k}.}$$

Exercice 16. Calculer :

1) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$

2) ❋ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos\frac{a}{2^k}\right)$ où a est un réel donné élément de $]0, \pi[$ puis déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos\frac{a}{2^k}\right)$.

Solution 16

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{1} = n+1$ (produit télescopique).

2) ❋ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in]0, \pi[$. Puisque $a \in]0, \pi[$, pour $k \geqslant 1$, $\dfrac{a}{2^k} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Par suite, pour tout k compris entre 1 et n, $\cos\dfrac{a}{2^k} > 0$. On en déduit que la somme proposée est parfaitement définie.
Ensuite, pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ et donc, $\cos x = \dfrac{\sin(2x)}{2\sin x}$ ($\sin x$ étant non nul). Pour $x = \dfrac{a}{2^k}$, on obtient en particulier $\cos\dfrac{a}{2^k} = \dfrac{\sin(a/2^{k-1})}{2\sin(a/2^k)}$ et donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos\frac{a}{2^k}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{a}{2^k}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(a/2^{k-1})}{2\sin(a/2^k)}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}\sin(a/2^{k-1})}{2^k\sin(a/2^k)}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{\sin a}{2^n\sin(a/2^n)}\right) \text{ (produit télescopique).}$$

Maintenant, on sait que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin(a/2^n)}{a/2^n} = 1$ et donc, quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{\sin a}{2^n\sin(a/2^n)} = \dfrac{\sin a}{a}\dfrac{1}{\dfrac{\sin(a/2^n)}{a/2^n}}$ tend vers $\dfrac{\sin a}{a}$. Finalement,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\frac{a}{2^k}\right) = \ln\left(\frac{\sin a}{a}\right).$$