4

Calculs algébriques

Au programme

- √ Développer la pratique du calcul numérique ou algébrique.
- √ Savoir développer et factoriser.
- √ Simplifier des fractions.
- √ Calculer avec des fractions.
- √ Maîtriser les puissances entières relatives d'un nombre réel non nul.
- √ Calculer avec des racines carrées.

Table des matières

Ce chapitre est absolument **essentiel**. La plupart des difficultés que vous rencontrerez éventuellement en maths proviennent de ce chapitre : le calcul, le calcul, le calcul. Pour progresser en maths, il faut progresser en calcul et pour progresser en calcul, il faut ... calculer. Donc, faites beaucoup de calculs et passez-vous de la calculatrice. C'est **vous** qui devez calculer et **pas elle**.

I Développements et factorisations

A Développements

On commence par redonner la formule de développement :

Théoreme 1

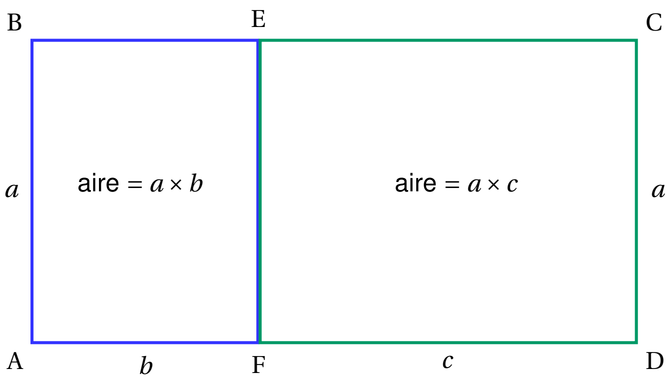
1) Pour tous réels a, b et c, $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$.

2) Pour tous réels a, b, c et d, $(a+b)\times(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$.

On a bien sûr aussi $a\times(b-c)=a\times b-a\times c$ car $a(b-c)=a(b+(-c))=ab+a(-c)=ab-ac$.

Démonstration :

1) On peut donner une démonstration géométrique de la formule de développement simple quand a, b et c sont des réels strictement positifs. $a\times b$ est l'aire du rectangle ABEF ci-dessous et $a\times c$ est l'aire du rectangle FECD. La somme des aires de ces deux rectangles est l'aire du rectangle ABCD, c'est-à-dire $a\times(b+c)$ (car la longueur AD est égale à $b+c$). Donc, $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$.



$a\times(b+c)$
$=$
aire de ABCD
$=$
$a\times b+a\times c$

Il faut ensuite envisager de très nombreux cas de figure concernant les signes de a, b et c. Nous ne détaillerons pas tous ces cas mais nous en envisagerons trois pour donner une idée du travail à effectuer :

• Si $a<0$, $b>0$ et $c>0$, alors $-a>0$ et donc $-a(b+c)=(-a)(b+c)=(-a)\times b+(-a)\times c=-ab-ac$. En prenant l'opposé, on obtient $a(b+c)=ab+ac$.

• Si $a>0$, $b=0$ et $c>0$, alors $a(b+c)=a(0+c)=ac=a\times 0+a\times c=ab+ac$.

• Si $a>0$, $b<0$ et $c>0$ et $b+c>0$, alors $-b>0$ puis $ac=a(b+c+(-b))=a(b+c)+a(-b)=a(b+c)-ab$ et donc, en faisant passer ab dans le premier membre de l'égalité, $ab+ac=a(b+c)$ ...

2) Soient a, b, c et d quatre réels. D'après la formule de développement du 1),

$$(a+b)\times(c+d)=a\times(c+d)+b\times(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d.$$

■

Ainsi, chacun des deux **termes** de la première parenthèse se **distribue** sur chacun des deux termes de la seconde :

$$(a\quad+\quad b)\times(c\quad+\quad d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d.$$

Le développement est constitué de quatre termes. Si la première parenthèse est constituée de trois termes et la deuxième de deux termes, le développement est constitué de $3\times 2=6$ termes :

$$(a+b+c)(d+e)=ad+ae+bd+be+cd+ce.$$

Exercice 1

Développer les expressions suivantes :

1) $(-3)(2x-5)$ où x est un réel.

2) $\dfrac{2}{3}(6a-9)$ où a est un réel.

Solution 1 :

1) Soit x un réel.

$(-3)(2x-5) = (-3)(2x+(-5)) = (-3)(2x)+(-3)\times(-5) = -6x+15$ ou aussi $(-3)(2x-5) = -3\times 2x+3\times 5 = -6x+15$.

2) Soit a un réel. $\dfrac{2}{3}(6a-9) = \dfrac{2}{3}\times 6a - \dfrac{2}{3}\times 9 = 2\times 2a - 2\times 3 = 4a-6$.

$\blacksquare$

Exercice 2

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes (où x est un réel donné) :

1) $(-2x+1)(x-3)$

2) $(1-3x)(2x+5)$

3) $(x-1)(x+2)(x-3)$

Solution 2 :

1) Soit x un réel. $(-2x+1)(x-3) = -(2x)\times x+(2x)\times 3+1\times x-1\times 3 = -2x^2+6x+x-3 = -2x^2+7x-3$.

2) Soit x un réel.

$$(1-3x)(2x+5) = 1\times(2x)+1\times 5-(3x)\times(2x)-(3x)\times 5 = 2x+5-6x^2-15x = 5-6x^2-13x = -6x^2-13x+5.$$

3) Soit x un réel.

$$\begin{aligned}(x-1)(x+2)(x-3) &= (x\times x+2\times x-1\times x-1\times 2)(x-3) = \left(x^2+x-2\right)(x-3)\\ &= x^2\times x-x^2\times 3+x\times x-x\times 3-2\times x-2\times(-3) = x^3-3x^2+x^2-3x-2x+6\\ &= x^3-2x^2-5x+6.\end{aligned}$$

$\blacksquare$

La règle de calcul du théorème 1 concerne la multiplication et l'addition. La règle $a\times(b+c) = a\times b+a\times c$ s'appelle la **distributivité de la multiplication sur l'addition**. Le facteur a se distribue sur chacun des deux termes b et c.

Par contre, la multiplication n'est pas distributive sur elle-même ou encore, en général, $a\times(b\times c)\neq(a\times b)\times(a\times c)$ mais $a\times(b\times c) = (a\times b)\times c = a\times b\times c$. Par exemple, $2\times(3\times 4) = 2\times 3\times 4 = 24$ alors que $(2\times 3)\times(2\times 4) = 6\times 8 = 48$.

Avec la même idée, on peut écrire $2(x-1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right) = (x-1)\times 2\left(x+\dfrac{1}{2}\right) = (x-1)(2x+1)$.

B Factorisations

La factorisation est le contraire du développement. On lit dans l'autre sens l'égalité permettant de développer :

Théoreme 2

Pour tous réels a, b et c, $a\times b+a\times c = a\times(b+c)$.

Il faut être attentif au vocabulaire. Le premier membre de l'égalité $ab+ac = a(b+c)$ est une **somme de deux termes**, chaque terme de la somme $ab+ac$ est un produit de deux facteurs et a est un **facteur commun** à chacun ces deux termes. Le second membre de l'égalité $ab+ac = a(b+c)$ est un **produit de deux facteurs**. La somme du premier membre est donc égale à un produit où a est l'un des facteurs : on a **mis a en facteur** et on a donc **factorisé**.

Exercice 3

Factoriser les expressions suivantes (où x et a sont des réels) :

1) $12x - 18$.

2) $35\sqrt{2} - 15$.

3) $15a^2 - 10a$.

4) $15a^2 - 15a$.

Solution 3 :

1) Soit x un réel. $12x - 18 = 6 \times 2x - 6 \times 3 = 6(2x-3)$.

2) $35\sqrt{2} - 15 = 5 \times 7\sqrt{2} - 5 \times 3 = 5\left(7\sqrt{2} - 3\right)$.

3) Soit a un réel. $15a^2 - 10a = 5a \times 3a - 5a \times 2 = 5a(3a-2)$.

4) Soit a un réel. $15a^2 - 15a = 15a \times a - 15a \times 1 = 15a(a-1)$.

■

Exercice 4

Factoriser les expressions suivantes (où x est un réel) :

1) $(x-1)(2x+3)+(x-1)(3x+5)$.

2) $(x-1)(2x+3)-(x-1)(3x+5)$.

3) $x(x-1)-(x-1)(2x+2)+4(x-1)$.

Solution 4 :

1) Soit x un réel.

$$(x-1)(2x+3)+(x-1)(3x+5) = (x-1)((2x+3)+(3x+5)) = (x-1)(2x+3+3x+5) = (x-1)(5x+8).$$

2) Soit x un réel.

$$\begin{aligned}(x-1)(2x+3)-(x-1)(3x+5) &= (x-1)((2x+3)-(3x+5)) = (x-1)(2x+3-3x-5) = (x-1)(-x-2) \\ &= -(x-1)(x+2).\end{aligned}$$

3) Soit x un réel.

$$x(x-1)-(x-1)(2x+2)+4(x-1) = (x-1)(x-(2x+2)+4) = (x-1)(x-2x-2+4) = (x-1)(-x+2).$$

■

Exercice 5

Factoriser les expressions suivantes (où x est un réel) :

1) $(2x-4)(2x+3)-3(x-2)^2+4x-8$

2) $(x-1)^2(x+1)+(x+1)^2(x-1)+(x-1)(x+1)$

Solution 5 :

1) Soit x un réel.

$$\begin{aligned}(2x-4)(2x+3)-3(x-2)^2+4x-8 &= 2(x-2)(2x+3)-3(x-2)^2+4(x-2) \\ &= (x-2)\times 2(2x+3)-(x-2)\times 3(x-2)+(x-2)\times 4 \\ &= (x-2)[2(2x+3)-3(x-2)+4] = (x-2)(4x+6-3x+6+4) \\ &= (x-2)(x+16).\end{aligned}$$

2) Soit x un réel.

$$\begin{aligned}(x-1)^2(x+1)+(x+1)^2(x-1)+(x-1)(x+1) &= (x-1)(x+1)\times(x-1)+(x-1)(x+1)\times(x+1)+(x-1)(x+1)\times 1\\ &= (x-1)(x+1)((x-1)+(x+1)+1) = (x-1)(x+1)(2x+1).\end{aligned}$$

■

C Identités remarquables

On commence par énoncer les identités remarquables usuelles dans le sens du développement.

Théoreme 3

Pour tous réels a et b,

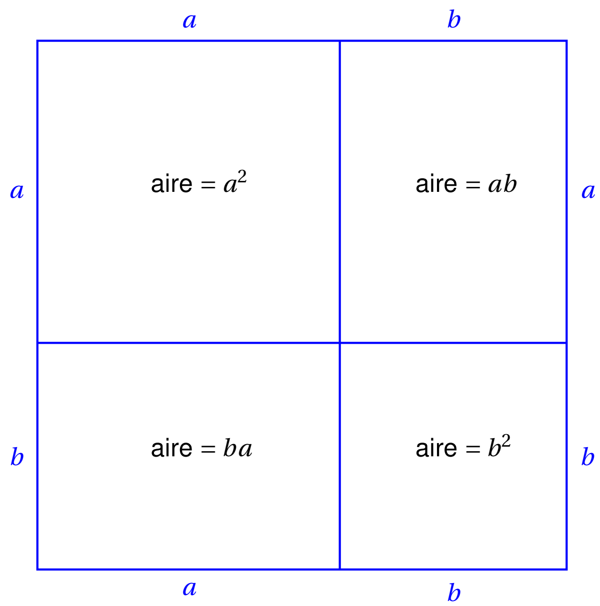
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \qquad (a-b)(a+b) = a^2-b^2$$

Démonstration : Soient a et b deux réels.

$(a+b)^2 = (a+b)\times(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2$.
Ensuite, $(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2+2a(-b)+(-b)^2 = a^2-2ab+b^2$.
Enfin, $(a-b)(a+b) = a^2+ab-ba-b^2 = a^2-b^2$.

■

Quand a et b sont des réels strictement positifs, l'identité $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ peut se visualiser sur le graphique suivant : l'aire du grand carré (de côté de longueur $a+b$) est $(a+b)^2$ et cette aire est la somme de quatre aires.



Exercice 6

Développer les expressions suivantes (où x est un réel) :

1) $(2x+3)^2$.

2) $(x+1)^2$.

3) $(3x-4)^2$.

4) $(-5x+1)^2$.

5) $(-x-2)^2$.

6) $(2x-3)(2x+3)$.

7) $(x+4)(4-x)$.

Solution 6 :

1) Soit x un réel. $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2\times(2x)\times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$.

2) Soit x un réel. $(x+1)^2 = x^2 + 2\times x \times 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$.

3) Soit x un réel. $(3x-4)^2 = (3x)^2 - 2\times(3x)\times 4 + 4^2 = 9x^2 - 24x + 16$.

4) Soit x un réel. $(-5x+1)^2 = (-5x)^2 + 2\times(-5x)\times 1 + 1^2 = 25x^2 - 10x + 1$.

5) Soit x un réel. $(-x-2)^2 = (-x)^2 - 2\times(-x)\times 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$ ou aussi $(-x-2)^2 = (-(x+2))^2 = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$.

6) Soit x un réel. $(2x-3)(2x+3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$.

7) Soit x un réel. $(x+4)(4-x) = (4+x)(4-x) = 4^2 - x^2 = -x^2 + 16$.

■

Les deux exercices qui suivent font partie des approfondissements prévus par le programme officiel.

Exercice 7

1) Pour tous réels a, b et c, développer $(a+b+c)^2$.

2) En déduire le développement de $\left(x^2+x+1\right)^2$ pour tout réel x.

Solution 7 :

1) Soient a, b et c trois réels.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b+c)\times(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.\end{aligned}$$

2) Soit x un réel.

$$\begin{aligned}\left(x^2+x+1\right)^2 &= \left(x^2\right)^2 + x^2 + 1^2 + 2\times x^2\times x + 2\times x^2\times 1 + 2\times x\times 1 = x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x \\ &= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1.\end{aligned}$$

■

Exercice 8

1) Pour tous réels a et b, développer $(a+b)^3$.

2) En déduire le développement de $(x+1)^3$ pour tout réel x.

Solution 8 :

1) Soient a et b deux réels.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2\times(a+b) = \left(a^2+2ab+b^2\right)(a+b) = a^2\times a + a^2\times b + 2ab\times a + 2ab\times b + b^2\times a + b^2\times b \\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

2) Soit x un réel.

$$(x+1)^3 = x^3 + 3\times x^2\times 1 + 3\times x\times 1^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

■

Calcul mental : L'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ permet de donner très rapidement le carré de nombres dont le chiffre des unités est 5. Un tel nombre a est égal à 5 auquel on ajoute un certain nombre de dizaines. On pose donc $a = 10n + 5$ où n est un entier naturel. On élève au carré et on obtient :

$$a^2 = (10n+5)^2 = (10n)^2 + 2\times 10n\times 5 + 5^2 = 100n^2 + 100n + 25 = 100n(n+1) + 25.$$

On interprète le résultat obtenu. a^2 est égal à 25 auquel on ajoute un certain nombre de centaines. Donc, les deux derniers chiffres de a^2 sont 25. D'autre part, le nombre de centaines de a^2 est égal à $n(n+1)$ où n est le nombre de dizaines de a. Sur des exemples plus concrets, cela donne

$25^2 = 625$ (ici, $n = 2$ puis $n(n+1) = 2 \times 3 = 6$).
$35^2 = 1\,225$ (ici, $n = 3$ puis $n(n+1) = 3 \times 4 = 12$).
$45^2 = 2\,025$ puis $55^2 = 3\,025$ puis $85^2 = 7225$ puis $105^2 = 11\,025 \ldots$

On peut ensuite calculer de tête des nombres comme 34^2 ou 36^2 : $36^2 = (35+1)^2 = 1225+70+1 = 1296$ et $34^2 = (35-1)^2 = 1225-70+1 = 1156$.

En s'appuyant sur l'identité $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, on peut aussi calculer mentalement des nombres comme 34×36 ou 33×37 : $34 \times 36 = (35-1)(35+1) = 1225-1 = 1224$ et $33 \times 37 = (35-2)(35+2) = 1225-4 = 1221$.

On donne maintenant les identités remarquables dans le sens de la factorisation.

Théoreme 4

Pour tous réels a et b,

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \qquad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Exercice 9

Factoriser les expressions suivantes (où x est un réel) :

1) $9x^2 + 30x + 25$.

2) $4x^2 - 4x + 1$.

3) $2x^2 - 18$.

Solution 9 :

1) Soit x un réel. $9x^2 + 30x + 25 = (3x)^2 + 2 \times (3x) \times 5 + 5^2 = (3x+5)^2$.

2) Soit x un réel. $4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2 \times (2x) \times 1 + 1^2 = (2x-1)^2$.

3) Soit x un réel. $2x^2 - 18 = 2\left(x^2 - 9\right) = 2\left(x^2 - 3^2\right) = 2(x+3)(x-3)$.

■

Exercice 10

Factoriser les expressions suivantes (où x est un réel) :

1) $1 - (4x+1)^2$.

2) $(-x+3)^2 - 4(x-7)^2$.

3) $9x^2 - 4 - 4(x+1)(3x-2) + 4 - 6x$.

Solution 10 :

1) Soit x un réel. $1-(4x+1)^2 = 1^2-(4x+1)^2 = (1-(4x+1))(1+(4x+1)) = (1-4x-1)(1+4x+1) = -4x(4x+2) = -8x(2x+1)$.

2) Soit x un réel.

$$\begin{aligned}(-x+3)^2 - 4(x-7)^2 &= (-x+3)^2 - (2(x-7))^2 = ((-x+3) - 2(x-7))((-x+3) + 2(x-7)) \\ &= (-x+3-2x+14)(-x+3+2x-14) = (-3x+17)(x-11).\end{aligned}$$

3) Soit x un réel.

$$\begin{aligned}9x^2 - 4 - 4(x+1)(3x-2) + 4 - 6x &= (3x-2)(3x+2) - 4(x+1)(3x-2) - 2(3x-2) \\ &= (3x-2)((3x+2) - 4(x+1) - 2) = (3x-2)(3x+2-4x-4-2) \\ &= (3x-2)(-x-4) = -(3x-2)(x+4).\end{aligned}$$

■

II Calculs sur les fractions

A Simplification des fractions

On commence par la règle qui permet de tester si oui ou non deux fractions sont égales.

Théoreme 5

Soient a, b, c et d quatre réels tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$.
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $a \times d = b \times c$.

Démonstration : Soient a, b, c et d quatre réels tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

Au collège, le nombre $\frac{a}{b}$ a d'abord été pensé comme le résultat de la division de a par b puis le nombre $\frac{a}{b}$ a petit à petit eu pour signification : $\frac{a}{b}$ est le nombre tel que $b \times \frac{a}{b} = a$ (ou encore $\frac{a}{b}$ est la solution de l'équation $bx = a$).

Par suite, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $b \times \frac{a}{b} = b \times \frac{c}{d}$ puis $a = \frac{bc}{d}$. De même, en multipliant les deux membres de la dernière égalité par d, on obtient $ad = bc$.

Inversement, en multipliant les deux membres de l'égalité $ad = bc$ par $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{d}$, on revient à $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

■

Plus généralement, face à une égalité de fractions entre autre, on peut « faire passer un facteur de l'autre côté pour la multiplication en suivant le **produit en croix** » :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Par exemple, de l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, on peut déduire les égalités $ad = bc$ ou aussi $\frac{ad}{b} = c$ ou aussi $\frac{1}{b} = \frac{c}{ad}$ ou aussi $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \dots$

Cette règle de calcul sera par exemple utilisée dans la résolution de certaines équations : l'équation $\frac{2x+1}{3} = \frac{5x-3}{2}$ est équivalente à l'équation $2(2x+1) = 3(5x+3)$.

On utilise beaucoup cette règle dans des calculs littéraux. Par exemple, l'égalité reliant la vitesse v, la distance parcourue d et le temps t pris pour parcourir cette distance est

$$v = \frac{d}{t}.$$

Si on connaît la vitesse v d'un véhicule et la distance d à parcourir et que l'on veut le temps pris pour parcourir cette distance, on écrira

$$t = \frac{d}{v}.$$

La règle de simplification des fractions se déduit du théorème 5 :

Théoreme 6

Soient a, b et c trois réels tels que $b \neq 0$ et $c \neq 0$. Alors $\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$.

Démonstration : Puisque $(a \times c) \times b = (b \times c) \times a$, on en déduit que $\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$.

■

Exercice 11

Simplifier la fraction $\frac{72}{48}$.

Solution 11 : On commence par décomposer 72 et 48 en produit de facteurs premiers.
$72 = 2\times 36 = 2^2\times 18 = 2^3\times 9 = 2^3\times 3^2$ et $48 = 2\times 24 = 2^2\times 12 = 2^3\times 6 = 2^4\times 3$. Donc

$$\frac{72}{48} = \frac{2^3\times 3^2}{2^4\times 3} = \frac{2\times 2\times 2\times 3\times 3}{2\times 2\times 2\times 2\times 3} = \frac{3}{2}.$$

■

On recommencera et on améliorera plus loin ce type de simplification après avoir exposé les différentes règles de calcul sur les exposants.

Exercice 12

1) Pour tout réel x différent de 2 et de -2, simplifier la fraction $\mathrm{A} = \dfrac{\left(x^2-4\right)(x+2)}{(x-2)\left(x^2+4x+4\right)}$.

2) Pour tout réel x différent de 1 et -1, simplifier la fraction $\mathrm{B} = \dfrac{(x-1)(x+5)-(x-1)(2x+3)}{x^2-1}$.

Solution 12 :

1) Soit x un réel différent de -2 et de 2. $\left(x^2-4\right)(x+2) = (x-2)(x+2)(x+2) = (x-2)(x+2)^2$ puis
$x^2+4x+4 = x^2+2\times 2x\times 1+2^2 = (x+2)^2$ et donc $(x-2)\left(x^2+4x+4\right) = (x-2)(x+2)^2$. Par suite,

$$\mathrm{A} = \frac{(x-2)(x+2)^2}{(x-2)(x+2)^2} = \frac{1}{1} = 1.$$

2) Soit x un réel différent de -1 et de 1.
$(x-1)(x+5)-(x-1)(2x+3) = (x-1)((x+5)-(2x+3)) = (x-1)(x+5-2x-3) = (x-1)(-x+2)$ et d'autre part,
$x^2-1 = x^2-1^2 = (x-1)(x+1)$. Par suite,

$$\mathrm{B} = \frac{(x-1)(-x+2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-x+2}{x+1}.$$

■

Des expressions comme $\dfrac{2x+1}{3x}$ sont piégeuses. **Il n'est pas question de simplifier le** x car x n'est pas un facteur commun au numérateur et au dénominateur. Tout ce que l'on peut faire est

$$\frac{2x+1}{3x} = \frac{2x}{3x} + \frac{1}{3x} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3x}.$$

Par contre, dans l'expression $\dfrac{x(2x+1)}{3x}$, on peut simplifier le x car x est un facteur commun au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{x(2x+1)}{3x} = \frac{2x+1}{3}.$$

B Multiplication et division des fractions

La multiplication des fractions est définie par :

Définition 1

Soient a, b, c et d quatre réels tels que $b\neq 0$ et $d\neq 0$. On pose $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d} = \dfrac{a\times c}{b\times d}$.

On en déduit un certain nombre de résultats sur les produits et quotient de fractions :

Théoreme 7

Soient a et b deux réels non nuls.

L'inverse de la fraction $\dfrac{a}{b}$ est la fraction $\dfrac{b}{a}$ ou encore $\dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$.

Démonstration : Soient a et b deux réels non nuls. $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = \frac{ab}{ab} = 1$ et donc l'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ est la fraction $\frac{b}{a}$.

■

Théoreme 8

Soient a, b et c trois réels tels que $b \neq 0$. $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$.

Démonstration : Soient a, b et c trois réels tels que $b \neq 0$. $\frac{a}{b} \times c = \frac{a}{b} \times \frac{c}{1} = \frac{a \times c}{b \times 1} = \frac{ac}{b}$.

■

Théoreme 9

Soient a, b, c et d quatre réels tels que $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad \text{ou aussi} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Démonstration : Soient a, b, c et d quatre réels tels que $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

■

On retiendra : **diviser par une fraction, c'est multiplier par l'inverse de cette fraction.**

Théoreme 10

Soient a, b et c trois réels tels que $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc} \quad \text{et} \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}.$$

Démonstration : Soient a, b et c trois réels tels que $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

et

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{1} \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}.$$

■

L'expression $\frac{a}{\frac{b}{c}}$ ne veut rien dire. Il faut absolument savoir qui divise qui. Si c divise la fraction $\frac{a}{b}$, cela s'écrit $\frac{\frac{a}{b}}{c}$ et si la fraction $\frac{b}{c}$ divise a, cela s'écrit $\frac{a}{\frac{b}{c}}$.

Exercice 13

Calculez :

1) $\dfrac{8}{3}\times 12$.

2) $\left(\dfrac{\frac{21}{5}}{4}\times\dfrac{15}{12}\right)\div 7$.

Solution 13 :

1) $\dfrac{8}{3}\times 12=\dfrac{8\times 12}{3}=8\times 4=32$ (on a d'abord simplifié $\dfrac{12}{4}$ avant d'effectuer le produit).

2) $\left(\dfrac{\frac{21}{5}}{4}\times\dfrac{15}{12}\right)\div 7=\dfrac{21}{5}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{15}{12}\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{21\times 15}{5\times 4\times 12\times 7}=\dfrac{3\times 7\times 3\times 5}{5\times 4\times 3\times 4\times 7}=\dfrac{3}{4\times 4}=\dfrac{3}{16}$.

■

Dans les deux calculs précédents, il y a une règle d'or qui a été mise en œuvre :

on doit toujours simplifier avant d'effectuer.

Il ne viendrai à l'idée de personne d'écrire $\dfrac{3\times 6\,097\,463}{2\times 6\,097\,463}=\dfrac{18\,292\,389}{12\,194\,926}$. Il faut bien sûr écrire en simplifiant avant d'effectuer : $\dfrac{3\times 6\,097\,463}{2\times 6\,097\,463}=\dfrac{3}{2}$. La même mentalité doit s'appliquer à une fraction comme $\dfrac{25\times 7}{10\times 21}$.

C Addition des fractions

On peut additionner des fractions de même dénominateur :

Définition 2

Soient a, b et c trois réels tels que $c\neq 0$. Alors,

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

Ainsi, $-\dfrac{7}{3}+\dfrac{5}{3}=\dfrac{-7+5}{3}=-\dfrac{2}{3}$ ou aussi, pour tout réel x différent de 1,

$$\frac{2x+3}{x-1}-\frac{x+5}{x-1}=\frac{(2x+3)-(x+5)}{x-1}=\frac{2x+3-x-5}{x-1}=\frac{x-2}{x-1}.$$

Si les dénominateurs ne sont pas les mêmes, on doit d'abord **réduire au même dénominateur** en utilisant la règle de simplification dans l'autre sens : $\dfrac{a}{b}=\dfrac{a\times c}{b\times c}$.

On veut calculer $\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{3}$. On met au même dénominateur :

$$\frac{3}{4}+\frac{4}{3}=\frac{3\times 3}{4\times 3}+\frac{4\times 4}{3\times 4}=\frac{9}{12}+\frac{16}{12}=\frac{25}{12}.$$

Le dénominateur commun que nous avons choisi est le produit des deux dénominateurs qui est effectivement un multiple commun aux deux dénominateurs. Il y a de nombreuses situations où cette démarche est très maladroite. Par exemple, on veut calculer $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}$. Le dénominateur $4\times 6=24$ est un dénominateur commun car il est à la fois multiple de 4 et multiple de 6 : $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{6}{4\times 6}+\dfrac{4}{6\times 4}=\dfrac{6+4}{24}=\dfrac{10}{24}=\dfrac{5}{12}$. Dans ce calcul, le choix du dénominateur commun est maladroit. On doit chercher le dénominateur commun le plus petit possible.

Les multiples (strictement positifs) de 4 sont 8, 12, 16, 20, 24, ... Dans cette liste, on trouve avant 24 un autre nombre qui est aussi multiple de 6 : le nombre 12. 12 est le plus petit multiple commun à 4 et 6. Le calcul devient :

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1\times 3}{4\times 3}+\frac{1\times 2}{6\times 2}=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{5}{12}.$$

Exercice 14

Calculez : **1)** $-\dfrac{5}{48}+\dfrac{7}{72}$. **2)** $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}$.

Solution 14 :

1) $-\dfrac{5}{48}+\dfrac{7}{72}=-\dfrac{5}{2\times 24}+\dfrac{7}{3\times 24}=-\dfrac{5\times 3}{2\times 24\times 3}+\dfrac{7\times 2}{3\times 24\times 2}=-\dfrac{15}{144}+\dfrac{14}{144}=-\dfrac{1}{144}$.

2) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{4}{12}-\dfrac{3}{12}+\dfrac{2}{12}=\dfrac{4-3+2}{12}=\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}$.

■

Exercice 15

Calculez :

1) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}$ pour tout réel x différent de -1 et 1.

2) $\dfrac{2x+3}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{x}{x^2-4}$ pour tout réel x différent de -2 et 2.

Solution 15 :

1) Soit x un réel x différent de -1 et 1.

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}&=\frac{(x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}\\&=\frac{\left(x^2+2x+1\right)-\left(x^2-2x+1\right)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)}\\&=\frac{4x}{(x-1)(x+1)}.\end{aligned}$$

2) Soit x un réel x différent de -2 et 2.

$$\begin{aligned}\frac{2x+3}{x-2}-\frac{1}{x+2}+\frac{x}{x^2-4}&=\frac{2x+3}{x-2}-\frac{1}{x+2}+\frac{x}{(x-2)(x+2)}=\frac{(2x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)}-\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}+\frac{x}{(x-2)(x+2)}\\&=\frac{(2x+3)(x+2)-(x-2)+x}{(x-2)(x+2)}=\frac{2x^2+4x+3x+6-x+2+x}{(x-2)(x+2)}\\&=\frac{2x^2+7x+8}{(x-2)(x+2)}.\end{aligned}$$

■

III Puissances

A Définition

Définition 3

Soit a un réel non nul. On pose

$a^0=1$ et $a^1=a$ puis, pour tout entier $n\geqslant 2$, $a^n=\underbrace{a\times\ldots\times a}_{n\text{ facteurs}}$.

Ensuite, pour tout n entier naturel strictement négatif, on pose $a^n=\dfrac{1}{a^{-n}}$.

• Ainsi, par exemple, $3^3=3\times 3\times 3=27$ et $3^{-2}=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9}$ et $3^0=1$.

• Si $a=0$, on n'accepte pas les exposants n négatifs ou nuls. Si $n\in\mathbb{N}^*$, $0^n=0$ ($0^1=0^2=0^3=\ldots=0$) mais tout autre exposant (et en particulier $n=0$) est interdit.

B Règles de calcul

Théoreme 11

Soit a un réel non nul.

1) Pour tous entiers relatifs n et p, $a^n \times a^p = a^{n+p}$.

2) a) Pour tout entier relatif n, $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$.

b) Pour tous entiers relatifs n et p, $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$.

3) Pour tous entiers relatifs n et p, $(a^n)^p = a^{n\times p}$.

Démonstration : **1)** Soit a un réel non nul. Soient n et p deux entiers relatifs.

• Si $n = 0$, $a^n \times a^p = a^0 \times a^p = 1 \times a^p = a^p = a^{0+p}$. La formule est donc vraie quand l'un des exposants est nul.

• Si $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$. $a^n \times a^p = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}} \times \underbrace{a \times \ldots \times a}_{p \text{ facteurs}} = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n+p \text{ facteurs}} = a^{n+p}$. La formule est donc vraie quand n et p sont tous deux strictement positifs.

• Si $n \leqslant -1$ et $p \leqslant -1$, on pose $n' = -n$ et $p' = -p$ de sorte que $n' \geqslant 1$ et $p' \geqslant 1$. On a alors

$$a^n \times a^p = \frac{1}{a^{n'}} \times \frac{1}{a^{p'}} = \frac{1}{a^{n'} \times a^{p'}} = \frac{1}{a^{n'+p'}} = \frac{1}{a^{-n-p}} = \frac{1}{a^{-(n+p)}} = a^{n+p}.$$

La formule est donc vraie quand n et p sont tous deux strictement négatifs.

• Si $n \leqslant -1$ et $p \geqslant 1$, on pose $n' = -n$. On a $n' \geqslant 1$ puis $a^n \times a^p = a^{-n'} \times a^p = \dfrac{a^p}{a^{n'}}$. Si $p > n'$, on obtient

$$a^n \times a^p = \frac{\overbrace{a \times \ldots \times a}^{p \text{ fracteurs}}}{\underbrace{a \times \ldots \times a}_{n' \text{ fracteurs}}} = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{p-n' \text{ fracteurs}} = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n+p \text{ fracteurs}} = a^{n+p}.$$

Si $p < n'$, on obtient

$$a^n \times a^p = \frac{\overbrace{a \times \ldots \times a}^{p \text{ fracteurs}}}{\underbrace{a \times \ldots \times a}_{n' \text{ fracteurs}}} = \frac{1}{\underbrace{a \times \ldots \times a}_{n'-p \text{ fracteurs}}} = \frac{1}{a^{n'-p}} = a^{-(n'-p)} = a^{-n'+p} = a^{n+p}.$$

Si $p = n' = -n$, alors $a^n \times a^p = a^{-p} \times a^p = 1 = a^0 = a^{n+p}$.

La formule est démontrée dans tous les cas.

2) a) Soient a un réel non nul et n un entier relatif. $a^n \times a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$ et donc $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$.

b) Soient a un réel non nul et n et p deux entiers relatifs. $a^{n-p} \times a^p = a^{n-p+p} = a^n$ et donc $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$.

3) Soient a un réel non nul et n et p deux entiers relatifs.

Si $p \geqslant 1$, $(a^n)^p = \underbrace{a^n \times a^n \times \ldots \times a^n}_{p \text{ facteurs}} = a^{\overbrace{n+n+\ldots+n}^{p \text{ termes}}} = a^{n\times p}$.

Si $p \leqslant -1$, alors $-p \geqslant 1$ puis $(a^n)^p = \dfrac{1}{(a^n)^{-p}} = \dfrac{1}{a^{n\times(-p)}} = \dfrac{1}{a^{-np}} = a^{np}$.

Si $p = 0$, $(a^n)^p = (a^n)^0 = 1 = a^0 = a^{n\times 0}$.

La formule est démontrée dans tous les cas.

■

Théoreme 12

Soient a et b des réels non nuls. Pour tout entier relatif n, $(ab)^n = a^n b^n$ et $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Démonstration : Soient a et b deux réels non nuls. Soit n un entier relatif.

• Si $n \geqslant 1$,

$$(ab)^n = \underbrace{(ab) \times \ldots \times (ab)}_{n \text{ facteurs}} = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}} \times \underbrace{b \times \ldots \times b}_{n \text{ facteurs}} = a^n \times b^n,$$

et

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \times \ldots \times \frac{a}{b}}_{n \text{ facteurs}} = \frac{\overbrace{a \times \ldots \times a}^{n \text{ facteurs}}}{\underbrace{b \times \ldots \times b}_{n \text{ facteurs}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

• Si $n = 0$, $(ab)^0 = 1 = 1 \times 1 = a^0 b^0$ et $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{a^0}{b^0}$.

• Si $n \leqslant -1$, alors $-n \geqslant 1$ puis $(ab)^n = \frac{1}{(ab)^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}} \times \frac{1}{b^{-n}} = a^n b^n$ et $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n} = \frac{b^{-n}}{a^{-n}} = \frac{a^n}{b^n}$.

■

Une fois les règles de calcul mises en place, revenons sur la simplification des fractions d'entiers. On veut simplifier la fraction $\frac{3528}{5292}$.

La décomposition en produit de facteurs premiers des deux entiers 3528 et 5292 est : $3528 = 2^3 \times 3^2 \times 7^2$ et $5292 = 2^2 \times 3^3 \times 7^2$. On a alors

$$\frac{3528}{5292} = \frac{2^3 \times 3^2 \times 7^2}{2^2 \times 3^3 \times 7^2} = 2^{3-2} \times 3^{2-3} \times 7^{2-2} = 2 \times 3^{-1} \times 7^0 = \frac{2}{3}.$$

Exercice 16

Simplifier $\frac{7^4 \times (7^2)^{-3} \times 7^3}{7^{-2} \times (7^2)^2}$.

Solution 16 : $\frac{7^4 \times (7^2)^{-3} \times 7^3}{7^{-2} \times (7^2)^2} = \frac{7^4 \times 7^{-6} \times 7^3}{7^{-2} \times 7^4} = 7^{4-6+3-(-2)-4} = 7^{-1} = \frac{1}{7}$.

■

IV Racines carrées

A Définition

On prépare la définition de la racine carrée par le théorème qui suit.

Théoreme 13

Deux nombres positifs sont égaux si et seulement si les carrés de ces réels sont égaux.

Démonstration : Soient a et b deux réels positifs.

Si $a = b$, alors $a^2 = b^2$.

Inversement, supposons que $a^2 = b^2$. Alors, $a^2 - b^2 = 0$ puis $(a-b)(a+b) = 0$ puis $a - b = 0$ ou $a + b = 0$. L'égalité $a - b = 0$ entraine $a = b$. L'égalité $a + b = 0$ entraine $a = b = 0$ car si l'un des deux réels a ou b est non nul, il est strictement positif puis $a + b$ est strictement positif et en particulier non nul. Ainsi, dans tous les cas, l'égalité $a^2 = b^2$ entraine l'égalité $a = b$.

On a montré que pour tout réels positifs a et b, $a^2 = b^2$ équivaut à $a = b$.

■

Définition 4

Soit a un réel positif. La racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$, est l'unique réel positif dont le carré vaut a.

Dans cette définition, on admet l'existence d'un réel positif dont le carré vaut a. L'unicité d'un tel réel est assurée par le théorème qui précède la définition.

Par exemple, $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{4}=2$ et $\sqrt{9}=3$. $\sqrt{3}$ est un nombre plus mystérieux. C'est un irrationnel. Sa partie décimale est infinie et non périodique : $\sqrt{3}=1,732\,050\,808\ldots$ En particulier, $1,732<\sqrt{3}<1,733$.

La définition de la racine carrée contient deux résultats qu'il convient d'énoncer explicitement :

Pour tout réel positif a, $\sqrt{a}\geqslant 0$ et pour tout réel positif a, $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$.

B Règles de calcul

Théoreme 14

1) Pour tous réels positifs a et b, $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$.

2) a) Pour tout réel strictement positif a, $\sqrt{\dfrac{1}{a}}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

b) Pour tout réel positif a et tout réel strictement positif b, $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Démonstration : (au programme)

1) Soient a et b deux réels positifs. $\left(\sqrt{ab}\right)^2=ab$ et $\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2\times\left(\sqrt{b}\right)^2=ab$. Ainsi, les deux réels positifs $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ ont le même carré. Ces deux nombres sont donc égaux d'après le théorème 13.

2) a) Soit a un réel strictement positif. $\left(\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)^2=\dfrac{1}{a}$ et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=\dfrac{1^2}{\left(\sqrt{a}\right)^2}=\dfrac{1}{a}$. Les deux réels positifs $\sqrt{\dfrac{1}{a}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ ont le même carré. Ces deux réels sont donc égaux.

b) Soient a un réel positif et b un réel strictement positif. D'après 1) et 2)a),

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{a\times\frac{1}{b}}=\sqrt{a}\times\sqrt{\frac{1}{b}}=\sqrt{a}\times\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

■

En b), on aurait aussi pu montrer directement l'égalité $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ en montrant que ces deux nombres positifs ont le même carré, à savoir $\dfrac{a}{b}$.

Les règles de calcul précédentes permettent par exemple d'écrire $\sqrt{32}=\sqrt{16\times 2}=\sqrt{16}\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ ou aussi $\sqrt{45}\times\sqrt{20}=\sqrt{45\times 20}=\sqrt{900}=30$.

Théoreme 15

Pour tout réel positif a, $\sqrt{a^2}=a$. Plus généralement, pour tout nombre réel a, $\sqrt{a^2}=|a|$.

Démonstration : Soit a un réel positif. Alors, $\sqrt{a^2}=\sqrt{a\times a}=\sqrt{a}\times\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}\right)^2=a$.

Soit maintenant a un réel strictement négatif. Alors, $-a$ est un réel strictement positif puis $\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=-a$.

Ainsi, pour tout réel a, $\sqrt{a^2}=\left\{\begin{array}{l} a \text{ si } a\geqslant 0\\ -a \text{ si } a<0\end{array}\right.=|a|$.

■

Exercice 17

Simplifier les nombres suivants :

1) $\sqrt{45}$ **2)** $\sqrt{72}$ **3)** $\sqrt{300}$ **4)** $\sqrt{8820}$.

Solution 17 :

1) $\sqrt{45}=\sqrt{9\times 5}=\sqrt{9}\times\sqrt{5}=3\sqrt{5}$.

2) $\sqrt{72} = \sqrt{9 \times 8} = \sqrt{3^2 \times 2^2 \times 2} = \sqrt{6^2 \times 2} = \sqrt{6^2} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

3) $\sqrt{300} = \sqrt{100 \times 3} = \sqrt{100} \times \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$.

4) $8820 = 2 \times 4410 = 2^2 \times 2205 = 2^2 \times 3 \times 735 = 2^2 \times 3^2 \times 245 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 49 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$. Donc

$$\sqrt{8820} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{7^2} \times \sqrt{5} = 2 \times 3 \times 7 \times \sqrt{5} = 42\sqrt{5}.$$

■

Exercice 18

Calculer $\left(2\sqrt{2}+1\right)^2$ et $\left(2-\sqrt{5}\right)^2$. En déduire une écriture plus simple de chacun des deux réels $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$ et $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$.

Solution 18 : $\left(2\sqrt{2}+1\right)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 2 \times \left(2\sqrt{2}\right) \times 1 + 1^2 = 4 \times 2 + 4\sqrt{2} + 1 = 9 + 4\sqrt{2}$. Le réel positif dont le carré est égal à $9+4\sqrt{2}$ est $2\sqrt{2}+1$. Donc,

$$\sqrt{9+4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}+1.$$

$\left(2-\sqrt{5}\right)^2 = 2^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = 9 - 4\sqrt{5}$. Donc, en tenant compte de $\sqrt{5} > 2$,

$$\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} = \left|2-\sqrt{5}\right| = -\left(2-\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}-2.$$

■

Théoreme 16

Pour tous réels strictement positifs a et b, on a $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Démonstration : (au programme)

Commençons par vérifier que si A et B sont deux réels strictement positifs, $\mathrm{A}^2 < \mathrm{B}^2$ équivaut à $\mathrm{A} < \mathrm{B}$. On a

$$\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^2 = (\mathrm{B}-\mathrm{A})(\mathrm{B}+\mathrm{A}).$$

Le réel $\mathrm{B}+\mathrm{A}$ est strictement positif et donc
• si $\mathrm{A} < \mathrm{B}$, alors $\mathrm{B}-\mathrm{A} > 0$ puis $(\mathrm{B}-\mathrm{A})(\mathrm{B}+\mathrm{A}) > 0$ et donc $\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^2 > 0$ ou encore $\mathrm{A}^2 < \mathrm{B}^2$
• si $\mathrm{A}^2 < \mathrm{B}^2$, alors $\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^2 > 0$ puis $(\mathrm{B}-\mathrm{A})(\mathrm{B}+\mathrm{A}) > 0$ et donc $\mathrm{B}-\mathrm{A} > 0$ (car $\mathrm{B}+\mathrm{A} > 0$) puis $\mathrm{A} < \mathrm{B}$.

Ainsi, pour touts réels strictement positifs A et B, $\mathrm{A}^2 < \mathrm{B}^2$ si et seulement si $\mathrm{A} < \mathrm{B}$.

Soient alors a et b deux réels strictement positifs. Le carré de $\sqrt{a+b}$ est $a+b$. D'autre part,

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + 2 \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab}.$$

Puisque a et b sont strictement positifs, on a encore $2\sqrt{ab} > 0$ puis $a+b < a+b+2\sqrt{ab}$ ou enfin $\left(\sqrt{a+b}\right)^2 < \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$. Mais alors $\sqrt{a+b} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$ d'après le début de la démonstration.

■

Par exemple, $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ et on a effectivement $\sqrt{9+16} < \sqrt{9} + \sqrt{16}$.

Il nous reste à analyser une activité classique sur des expressions contenant des racines carrées : l'activité qui consiste à **rendre rationnel un dénominateur**.

Considérons les deux nombres $\mathrm{A} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\mathrm{B} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$. Dans les deux cas, même si on sait que $\sqrt{2} = 1,414\ldots$, on a du mal à se faire une idée de ce que valent à peu près A ou B en raison de la présence de racines carrées au dénominateur. On va donc chercher à transformer ces expressions.

Pour le nombre $\mathrm{A} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, il y a une manière simple de faire disparaître la racine carrée au dénominateur, c'est de multiplier la racine carrée de 2 par elle-même en profitant du fait que $\sqrt{2}^2 = 2$. Cela donne

$$\mathrm{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Maintenant, on peut se faire une idée de la valeur de a car diviser par 2 est plus facile que diviser par $\sqrt{2}$.

$$\mathrm{A} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1,414\dots}{2} = 0,707\dots.$$

Pour $\mathrm{B} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$, c'est un peu plus compliqué. On dispose de l'identité $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Cette identité permet d'élever au carré isolément chacun des deux nombres a et b. Cela donne

$$\mathrm{B} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{1} = \sqrt{2}+1.$$

(On note alors qu'il devient clair que $\mathrm{B} = 1,414\dots + 1 = 2,414\dots$) On a multiplié le numérateur et le dénominateur de la fraction par $\sqrt{2}+1$ sans changer la valeur de cette fraction. $\sqrt{2}+1$ s'appelle la **quantité conjuguée** de $\sqrt{2}-1$ (et $\sqrt{2}-1$ est la quantité conjuguée de $\sqrt{2}+1$).

Exercice 19

Rendre rationnel le dénominateur des expressions suivantes : $\mathrm{A} = \dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$ et $\mathrm{B} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

Solution 19 : $\mathrm{A} = \dfrac{1}{3+2\sqrt{2}} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{9-2^2\left(\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{9-8} = 3-2\sqrt{2}.$

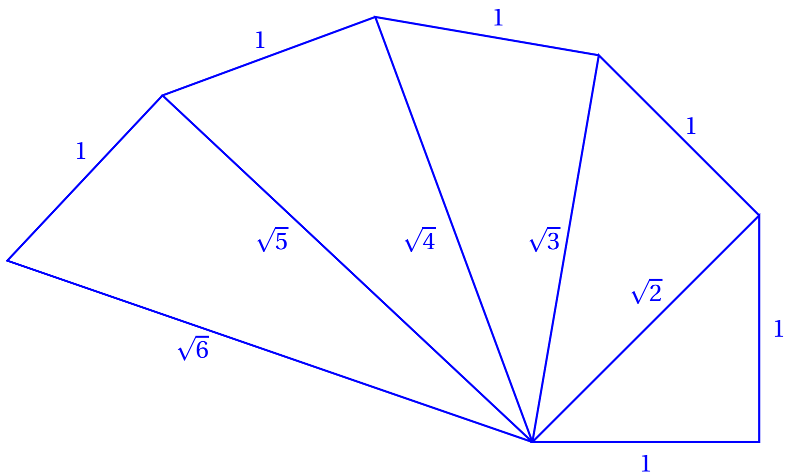
$$\mathrm{B} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\times\sqrt{3}\times 1 + 1^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

■

C Quelques constructions géométriques

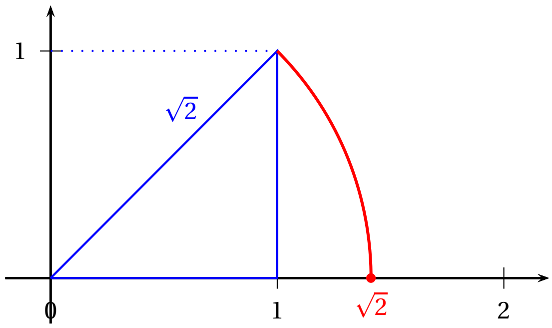
On commence par construire un triangle isocèle rectangle dont les côtés de même longueur ont pour longueur 1. D'après le théorème de PYTHAGORE, l'hypothénuse de ce triangle a une longueur égale à $\sqrt{1^2+1^2}$ ou encore $\sqrt{2}$. On construit un nouveau triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit a pour longueur $\sqrt{2}$ et l'autre a pour longueur 1. L'hypothénuse de ce nouveau triangle a pour longueur $\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}$ ou encore $\sqrt{3}$ ... et ainsi de suite.

On obtient ainsi les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, en spirale :

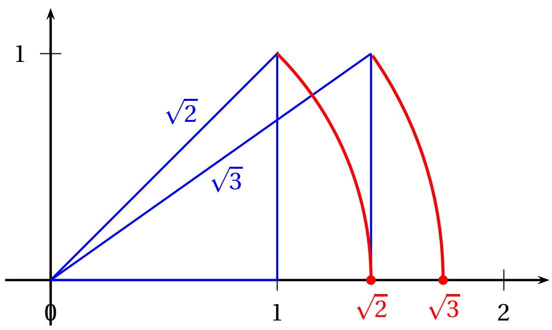


On peut aussi avoir envie d'obtenir ces nombres sur un des axes de coordonnées d'un repère. Par exemple, on peut vouloir placer exactement le point de coordonnées $\left(\sqrt{17}, \sqrt{10}\right)$.

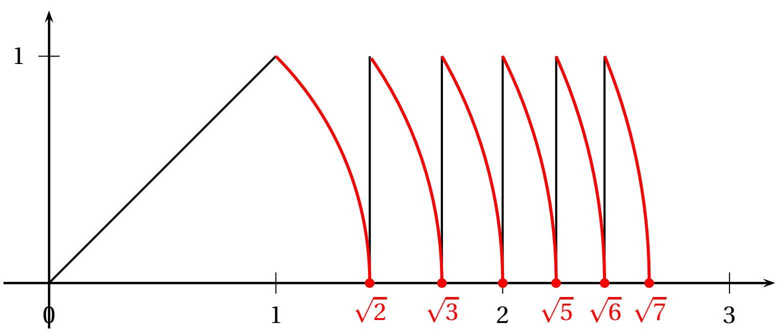
Commençons par le nombre $\sqrt{2}$ que l'on veut placer exactement sur l'axe des abscisses. C'est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1. On rabat ensuite cette longueur sur l'axe des abscisses : on plante le compas en $(0,0)$ avec une ouverture de $\sqrt{2}$.



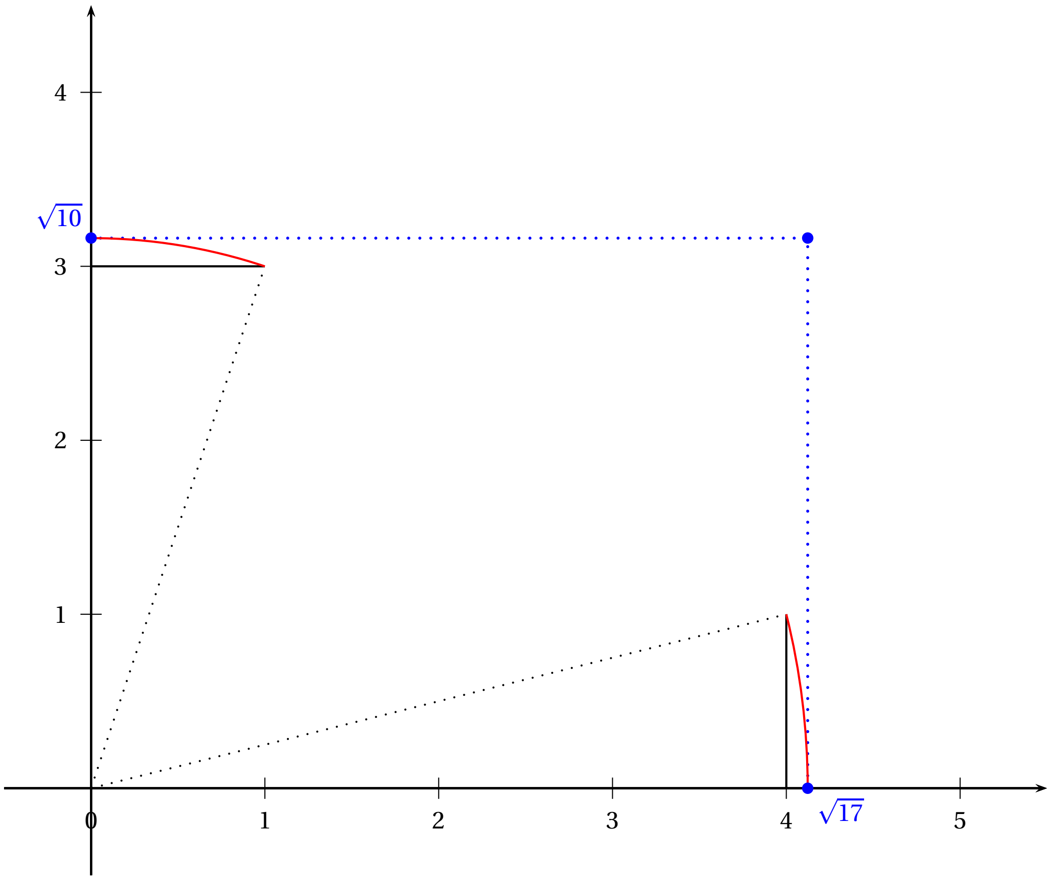
On poursuit. On veut maintenant $\sqrt{3}$ sur l'axe des abscisses. On remonte de 1 à partir du point de coordonnées $(\sqrt{2}, 0)$ pour arriver au point de coordonnées $(\sqrt{2}, 1)$. Ce point est à la distance $\sqrt{3}$ de l'origine, toujours d'après le théorème de PYTHAGORE, et on rabat au compas.



Et ainsi de suite ...



Enfin, si on veut construire précisément le point de coordonnées $(\sqrt{17}, \sqrt{10})$, on ne commence pas la construction à partir de $\sqrt{2}$ mais on commence à $\sqrt{16}$ c'est-à-dire 4 sur l'axe des abscisses et à $\sqrt{9}$ c'est-à-dire 3 sur l'axe des ordonnées.



V Montrer des égalités.

On met en place quelques techniques pour montrer que des nombres sont égaux ou des expressions algébriques sont égales.

Technique 1. On part d'une des deux expressions et on parvient à l'autre par égalités successives.

Exemple. Pour tout réel x différent de -1 et de 1, on pose $\mathrm{A} = \dfrac{3x^2+2x-5}{x^2-1}$ et $\mathrm{B} = \dfrac{3x+5}{x+1}$. On veut montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

$$\mathrm{B} = \frac{3x+5}{x+1} = \frac{(3x+5)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{3x^2-3x+5x-5}{x^2-1} = \frac{3x^2+2x-5}{x^2-1} = \mathrm{A}.$$

On a montré que $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

Technique 2. On calcule la différence des nombres et on vérifie que cette différence est nulle.

Exemple. Pour tout réel x différent de -1 et de 1, on pose $\mathrm{A} = \dfrac{3x^2+2x-5}{x^2-1}$ et $\mathrm{B} = \dfrac{3x+5}{x+1}$. On veut montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{A}-\mathrm{B} &= \frac{3x^2+2x-5}{x^2-1} - \frac{3x+5}{x+1} = \frac{3x^2+2x-5}{(x-1)(x+1)} - \frac{3x+5}{x+1} = \frac{3x^2+2x-5}{(x-1)(x+1)} - \frac{(3x+5)(x-1)}{(x-1)(x+1)}\\ &= \frac{\left(3x^2+2x-5\right)-(3x+5)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{\left(3x^2+2x-5\right)-\left(3x^2+5x-3x-5\right)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x^2+2x-5-3x^2-2x+5}{(x-1)(x+1)}\\ &= \frac{0}{(x-1)(x+1)} = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{A}-\mathrm{B} = 0$ puis $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

Technique 3. On vérifie que chacun des deux nombres est égal à un même troisième.

Exemple. Soient a, b, c et d quatre entiers relatifs. On pose $\mathrm{A} = \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$ et $\mathrm{B} = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$. On veut montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

D'une part, $\mathrm{A} = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$ et d'autre part,

$$\begin{aligned}\mathrm{B} &= (ac-bd)^2+(ad+bc)^2 = (ac)^2-2(ac)(bd)+(bd)^2+(ad)^2+2(ad)(bc)+(bc)^2\\ &= a^2c^2-2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2\\ &= a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{A} = a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$ et $\mathrm{B} = a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$. Donc, $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.