Chapitre 4. Généralités sur les fonctions

I. Généralités

1) Domaine de définition

Définition 1. Soit f une fonction.
Le **domaine de définition** de la fonction f est l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe.

En rentrant en terminale S et avant d'avoir rencontré la fonction logarithme népérien, on a essentiellement deux problèmes de définition d'expressions mathématiques :

1) un dénominateur de fraction ne doit pas être nul,
2) une expression sous le symbole racine carrée doit être positive ou nulle.

Par exemple, le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $\mathbb{R}^*$ car tout réel non nul a un inverse mais 0 n'a pas d'inverse.

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :
1) $f_1 \; : \; x \mapsto \dfrac{x-1}{4x^2+4x+1}$.
2) $f_2 \; : \; x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$.
3) $f_3 \; : \; x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$.

Solution. **1)** Pour tout réel x, $f_1(x)$ existe si et seulement si $4x^2+4x+1 \neq 0$.
Le discriminant de l'équation $4x^2+4x+1=0$ est $\Delta = (-4)^2 - 4(-4) = 0$. L'équation $4x^2+4x+1=0$ admet une solution double à savoir $x_0 = \dfrac{-4}{2\times 4} = -\dfrac{1}{2}$ (ou bien $4x^2+4x+1=0 \Leftrightarrow (2x+1)^2=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$).
Ainsi, pour tout réel x, $f_1(x)$ existe si et seulement si $x \neq -\dfrac{1}{2}$.

Le domaine de définition de la fonction f_1 est donc $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\} = \left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.

2) Pour tout réel x, $f_2(x)$ existe si et seulement si $x^2+x+1 \geqslant 0$. Le discriminant du trinôme x^2+x+1 est $\Delta = 1^2 - 4\times 1\times 1 = -3$. Δ est strictement négatif. On sait alors que le trinôme x^2+x+1 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et est de signe constant sur $\mathbb{R}$, ce signe étant le signe du coefficient de x^2.
On en déduit que pour tout réel x, $x^2+x+1>0$. En particulier, pour tout réel x, $f_2(x)$ existe.

Le domaine de définition de la fonction f_2 est $\mathbb{R}$.

3) Pour tout réel x, $f_3(x)$ existe si et seulement si $-x^2+3x-2 \geqslant 0$ puis $\sqrt{-x^2+3x-2} \neq 0$ ce qui est équivalent à $-x^2+3x-2>0$.

Le discriminant du trinôme $-x^2+3x-2$ est $\Delta = 3^2 - 4\times(-1)\times(-2) = 1$. Δ est strictement positif. Le trinôme $-x^2+3x-2$ admet donc deux racines distinctes à savoir $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{1}}{-2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{1}}{-2} = 2$.
On sait que le trinôme $-x^2+3x-2$ est du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur de l'intervalle $[1,2]$ et du signe contraire à l'intérieur ce que l'on résume dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-x^2+3x-2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Par suite, pour tout réel x, $f_3(x)$ existe si et seulement si $1<x<2$.

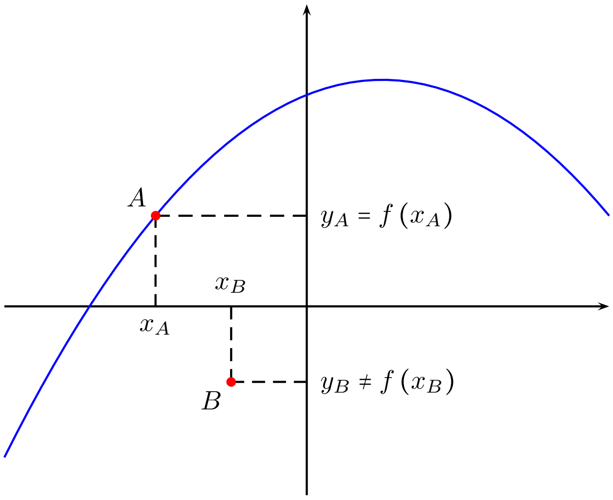
Le domaine de définition de la fonction f_3 est $]1,2[$.

---

2) Représentation graphique

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

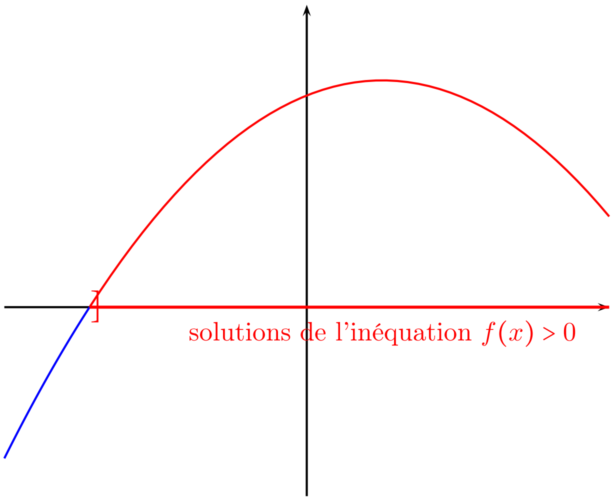
Définition 2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
La **courbe représentative** de f ou plus simplement le **graphe** de f est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ où x est un réel de l'intervalle I.
Une **équation** de ce graphe est $y=f(x)$, $x\in I$.



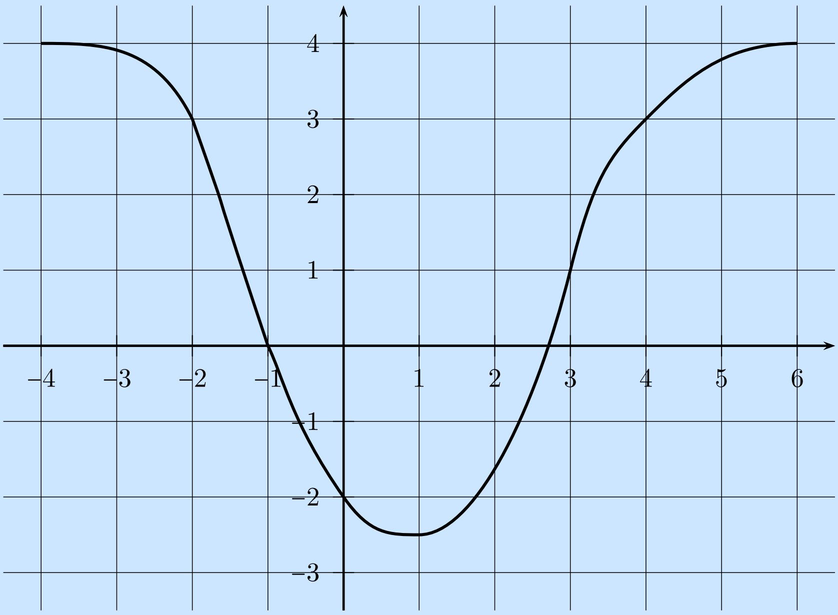
Si 0 appartient à I, l'ordonnée du point d'intersection de la courbe représentative de f et de l'axe (Oy) est $f(0)$.

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f et de l'axe (Ox).

Les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de f situés strictement au-dessus de l'axe (Ox).



Exercice 2. On donne le graphe d'une certaine fonction f définie sur $[-4, 6]$:



Résoudre graphiquement :

1) l'équation $f(x) = 0$, **2)** l'inéquation $f(x) > 0$, **3)** l'équation $f(x) = 3$,

4) le système d'inéquations $3 < f(x) \leqslant 4$.

Solution. **1)** Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f et de l'axe des abscisses ou encore les abscisses des points de la courbe représentative de f dont l'ordonnée est nulle. On lit sur le graphique : l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions, l'une des deux solutions est -1 et l'autre, notée x_0, est environ égale à $2,7$.

2) Les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de f qui sont situés strictement au-dessus de l'axe des abscisses. On lit sur le graphique : l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ est $[-4,-1[\cup]x_0,6]$.

3) Les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = 3$ ou encore les abscisses des points de la courbe représentative de f dont l'ordonnée est égale à 3. On lit sur le graphique : l'équation $f(x) = 3$ a deux solutions, les nombres -2 et 4.

4) Pour tout réel x de $[-4,6]$, $3 < f(x) \leqslant 4 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3 < f(x) \\ \text{et} \\ f(x) \leqslant 4 \end{array}\right.$.
Les solutions du système d'inéquations $3 < f(x) \leqslant 4$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de f dont l'ordonnée est strictement supérieure à 3 et est inférieure ou égale à 4. On lit sur le graphique : l'ensemble des solutions du système d'inéquations $3 < f(x) \leqslant 4$ est $[-4,-2[\cup]4,6]$.

---

3) Composée de fonctions

Définition 3. Soient I et J deux intervalles.
Soit f une fonction définie sur I telle que pour tout x de I, $f(x)$ appartient à J.
Soit g une fonction définie sur J.
La **composée de f suivie de g** est la fonction notée $g \circ f$, définie sur J par :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } I,\ g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Par exemple, soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ (f est définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout réel x, on a $x^2 + 1 \geqslant 0$). f est une composée de deux fonctions.
Pour tout réel x, posons $g(x) = x^2 + 1$ et pour tout réel positif y, posons $h(y) = \sqrt{y}$.
La fonction g est définie sur $I = \mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g(x) \geqslant 0$ ou encore pour tout réel x, $g(x)$ appartient à $J = [0,+\infty[$ intervalle sur lequel la fonction h est définie.
Pour tout réel x de $I = \mathbb{R}$, on a alors $f(x) = h(g(x))$ ou encore $f = h \circ g$ est la composée de g suivie de h.

Exercice 3. Déterminer $g \circ f$ dans chacun des cas suivants.
1) Pour tout réel x, $f(x) = 2x + 3$ et pour tout réel x, $g(x) = x^2$.
2) Pour tout réel x, $f(x) = x^2$ et pour tout réel x, $g(x) = 2x + 3$.
3) Pour tout réel x, $f(x) = x^2$ et pour tout réel positif x, $g(x) = \sqrt{x}$.
4) Pour tout réel positif x, $f(x) = \sqrt{x}$ et pour tout réel x, $g(x) = x^2$.

Solution. **1)** Pour tout réel x,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = (2x+3)^2,$$

ou aussi

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x+3) = (2x+3)^2.$$

2) Pour tout réel x,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 2f(x) + 3 = 2x^2 + 3,$$

ou aussi

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 + 3.$$

3) Pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$ puis

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

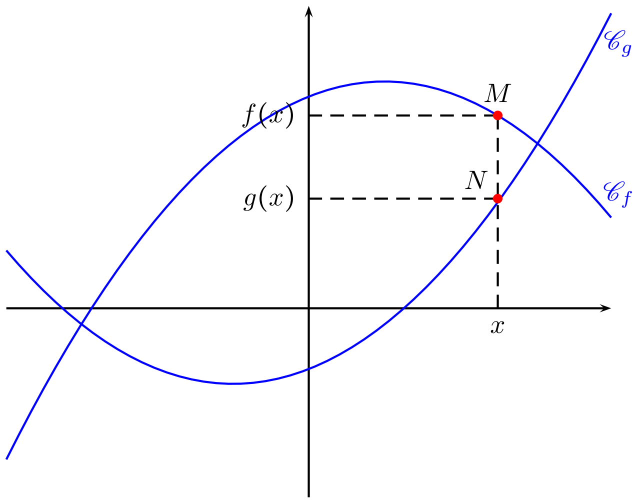
3) Pour tout réel positif x,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x.$$

---

4) Position relative de deux courbes

f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On veut étudier la position relative de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f et de la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de g ou encore, on veut savoir pour chaque réel x de I, si le point M de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x est au-dessus ou au-dessous du point N de $\mathscr{C}_g$ de même abscisse x.



La technique est

$$\text{on étudie le signe de } f(x) - g(x) \text{ suivant les valeurs de } x,$$

avec les résultats suivants :

- si pour tout réel x d'un intervalle J contenu dans I, on a $f(x) - g(x) > 0$, $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle J.
- si pour tout réel x d'un intervalle J contenu dans I, on a $f(x) - g(x) < 0$, $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle J.
- si pour un réel x_0 de I, on a $f(x_0) - g(x_0) = 0$, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en leur point d'abscisse x_0.

Exemple. Pour tout réel x, posons $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$. Pour tout réel x,

$$g(x) - f(x) = x^3 - x^2 = x^2(x - 1).$$

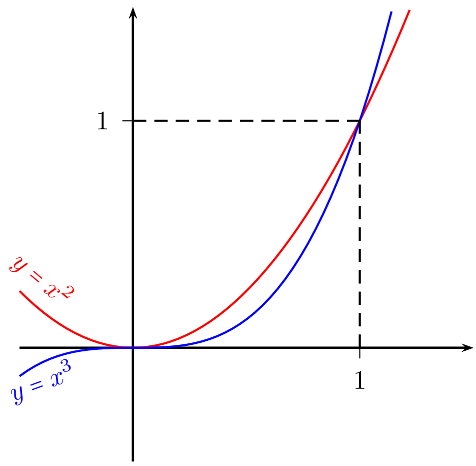
Détaillons alors le signe de $g(x) - f(x)$ dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$g(x)-f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que

- $\mathscr{C}_g$ est strictement au-dessous de $\mathscr{C}_f$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$,
- $\mathscr{C}_g$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur $]1, +\infty[$,
- $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en leurs points d'abscisses respectives 0 et 1 ou encore en les points de coordonnées respectives $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

En particulier, pour tout réel x de $]0, 1[$, $x^3 < x^2$ et pour tout réel x de $]1, +\infty[$, $x^3 > x^2$.



Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$\text{pour tout réel } x \text{ différent de } 2,\ f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}.$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x,\ g(x) = 2x - 2.$$

Etudier les positions relatives des courbes représentatives de f et g

Solution. Pour tout réel x différent de 2,

$$f(x) - g(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} - (2x - 2) = \frac{(x^2 - 2x + 1) - (x - 2)(2x - 2)}{x - 2} = \frac{(x^2 - 2x + 1) - (2x^2 - 4x - 2x + 4)}{x - 2}$$
$$= \frac{x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + 4x + 2x - 4}{x - 2} = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x - 2}.$$

Le discriminant du trinôme $-x^2 + 4x - 3$ est $\Delta = 4^2 - 4(-1)(-3) = 4 > 0$. Le trinôme $-x^2 + 4x - 3$ a deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-4 + 2}{-2} = 1$ et $x_2 = \frac{-4 - 2}{-2} = 3$. On sait alors que le trinôme $-x^2 + 4x - 3$ est du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur de l'intervalle $[1, 3]$.

Etudions maintenant le signe de $\frac{-x^2 + 4x - 3}{x - 2}$ dans un tableau de signes.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$-x^2 + 4x - 3$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x - 2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

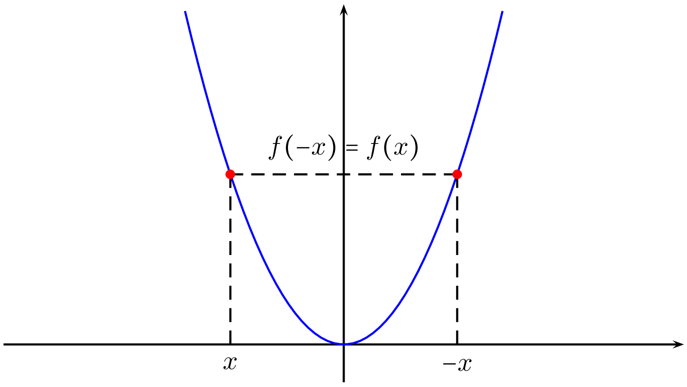
$\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty, 1[\cup]2, 3[$, strictement au-dessous sur $]1, 2[\cup]3, +\infty[$ et enfin, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points $A(1, 0)$ et $B(3, 4)$.

---

5) Fonctions paires, fonctions impaires

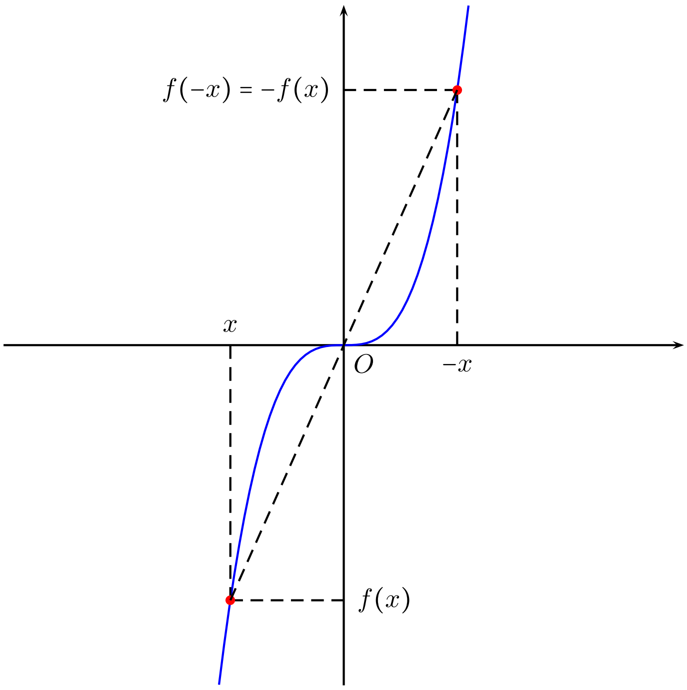
Dans ce paragraphe, on déborde un peu le programme officiel de terminale S qui ne prévoit aucun développement sur la notion de fonction paire ou impaire. La notion de fonction paire ou impaire ne doit être considérée qu'au moment de l'étude des fonctions sinus et cosinus.

Soit $f : x \mapsto x^2$. Pour tout réel x, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Ainsi, deux réels opposés ont même image par f ou encore les points du graphe de f d'abscisses respectives x et $-x$ ont la même ordonnée. Graphiquement, cela se traduit par la symétrie du graphe de f par rapport à l'axe des ordonnées.



Plus généralement, les fonctions $x \mapsto x^4$, $x \mapsto x^6$ ..., $x \mapsto x^{2n}$ où n est un entier naturel c'est-à-dire x à un exposant un entier pair, vérifient l'égalité : pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$.

Soit $f : x \mapsto x^3$. Pour tout réel x, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Ainsi, deux réels opposés ont des images opposées par f ou encore les points du graphe de f d'abscisses respectives x et $-x$ ont des ordonnées opposées. Graphiquement, cela se traduit par la symétrie du graphe de f par rapport à l'origine O.



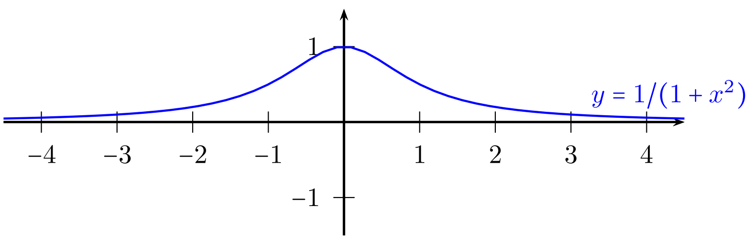
Plus généralement, les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^5$, ..., $x \mapsto x^{2n+1}$ où n est un entier naturel c'est-à-dire x à un exposant un entier impair, vérifient l'égalité : pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$.

Ces considérations motivent la définition suivante :

Définition 4. Soit D un domaine de $\mathbb{R}$ tel que pour tout réel x de D, on a $-x$ appartient à D (le domaine D est dit **symétrique par rapport à** 0). Soit f une fonction définie sur D.

1) f est **paire** si et seulement si pour tout x de D, $f(-x) = f(x)$.
Dans ce cas, l'axe (Oy) est un axe de symétrie de la courbe représentative de f.

2) f est **impaire** si et seulement si pour tout x de D, $f(-x) = -f(x)$.
Dans ce cas, l'origine O est un centre de symétrie de la courbe représentative de f.



II. Sens de variation d'une fonction

1) Définition

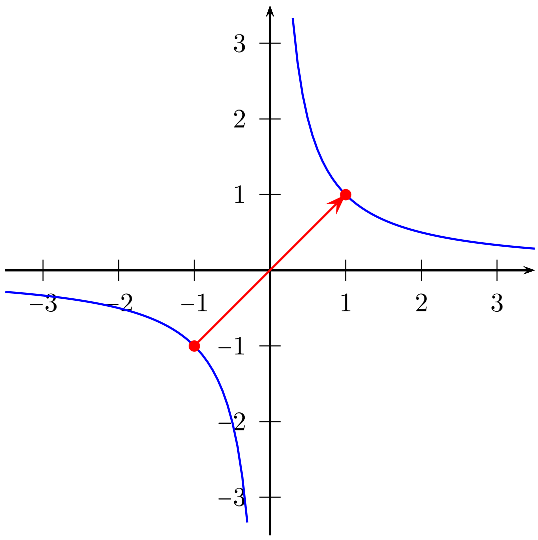
Définition 5. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
1) a) f est croissante sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, si $a \leqslant b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$.
b) f est décroissante sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, si $a \leqslant b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$.

2) a) f est strictement croissante sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.
b) f est strictement décroissante sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

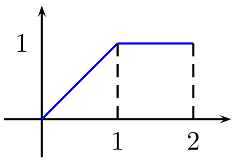
3) f est constante sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, $f(a) = f(b)$ ou encore f est constante sur I si et seulement si f est à la fois croissante sur I et décroissante sur I.

4) a) f est monotone sur I si et seulement si ou bien f est croissante sur I, ou bien f est décroissante sur I.
b) f est strictement monotone sur I si et seulement si ou bien f est strictement croissante sur I, ou bien f est strictement décroissante sur I.

Si f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle I et f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle J, f n'est pas nécessairement croissante (respectivement décroissante) sur la réunion de I et de J.
Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ et aussi sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
Pourtant la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. En effet, on a par exemple $-1 \leqslant 1$ et aussi $\dfrac{1}{-1} \leqslant \dfrac{1}{1}$. Pour aller du point de coordonnées $(-1, f(-1))$ au point de coordonnées $(1, f(1))$, « on monte » (quand on lit le dessin de gauche à droite).



Remarque. Revenons sur la définition d'une fonction croissante : f est croissante sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, si $a \leqslant b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$. Cette implication n'est pas une équivalence ou encore ce n'est pas parce que $f(a) \leqslant f(b)$ que l'on aura obligatoirement $a \leqslant b$.
En effet, considérons par exemple la fonction f définie sur $[0, 2]$ dont la représentation graphique est :



(Pour tout réel x de $[0, 2]$, $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in [0, 1] \\ 1 \text{ si } x \in [1, 2] \end{cases}$).
La fonction f est croissante sur $[0, 2]$ ou encore si a et b sont deux réels de I tels que $a \leqslant b$, on a obligatoirement $f(a) \leqslant f(b)$.

Prenons maintenant $a = 2$ et $b = 1$. On a $f(a) = 1 = f(b)$ et en particulier $f(a) \leqslant f(b)$ mais malheureusement on a $a > b$. Par contre

Théorème 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
1) f est strictement croissante sur I si et seulement si
$$\text{pour tous réels } a \text{ et } b \text{ de } I, \ (a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b)).$$
2) f est strictement décroissante sur I si et seulement si
$$\text{pour tous réels } a \text{ et } b \text{ de } I, \ (a < b \Leftrightarrow f(a) > f(b)).$$

Démonstration. Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I. Par définition, pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.

Réciproquement, soient a et b deux réels de I tels que $f(a) < f(b)$. Il y a trois possibilités pour les réels a et b : ou bien $a < b$, ou bien $a > b$, ou bien $a = b$.

Mais si $a > b$ ou encore $b < a$, alors $f(b) < f(a)$ ce qui n'est pas et si $a = b$ alors $f(a) = f(b)$ ce qui n'est pas. Il ne reste donc que la possibilité $a < b$.

On a montré que pour tous réels a et b de I, si $f(a) < f(b)$ alors $a < b$ et finalement que

$$\text{pour tous réels } a \text{ et } b\text{, si } a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b).$$

Réciproquement, si f est une fonction elle que pour tous réels a et b de I, $a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b)$, alors en particulier, pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$ et donc f est strictement croissante sur I.

La démonstration est analogue pour les fonctions strictement décroissantes.

---

2) Sens de variation et opérations

Théorème 2. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
1) a) Si f et g sont croissantes sur I, alors $f + g$ est croissante sur I.
b) Si f et g sont strictement croissantes sur I, alors $f + g$ est strictement croissante sur I.
2) a) Si f et g sont décroissantes sur I, alors $f + g$ est décroissante sur I.
b) Si f et g sont strictement décroissantes sur I, alors $f + g$ est strictement décroissante sur I.

Démonstration. • Soient f et g deux fonctions croissantes sur un intervalle I.

Soient a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$. Puisque f est croissante sur I, on a $f(a) \leqslant f(b)$ et puisque g est croissante sur I, on a $g(a) \leqslant g(b)$.
En additionnant membre à membre ces deux inégalités, on obtient $f(a) + g(a) \leqslant f(b) + g(b)$.

On a montré que pour tous réels a et b de I, si $a \leqslant b$, alors $f(a) + g(a) \leqslant f(b) + g(b)$. Par suite, la fonction $f + g$ est croissante sur I.

• Soient f et g deux fonctions strictement croissantes sur un intervalle I.

Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. Puisque f est strictement croissante sur I, on a $f(a) < f(b)$ et puisque g est strictement croissante sur I, on a $g(a) < g(b)$.
En additionnant membre à membre ces deux inégalités strictes, on obtient $f(a) + g(a) < f(b) + g(b)$.

On a montré que pour tous réels a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) + g(a) < f(b) + g(b)$. Par suite, la fonction $f + g$ est strictement croissante sur I.

• Soient f et g deux fonctions décroissantes sur un intervalle I.

Soient a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$. Puisque f est décroissante sur I, on a $f(a) \geqslant f(b)$ et puisque g est décroissante sur I, on a $g(a) \geqslant g(b)$.
En additionnant membre à membre ces deux inégalités, on obtient $f(a) + g(a) \geqslant f(b) + g(b)$.

On a montré que pour tous réels a et b de I, si $a \geqslant b$, alors $f(a) + g(a) \geqslant f(b) + g(b)$. Par suite, la fonction $f + g$ est décroissante sur I.

• Soient f et g deux fonctions strictement décroissantes sur un intervalle I.

Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. Puisque f est strictement décroissante sur I, on a $f(a) > f(b)$ et puisque g est strictement décroissante sur I, on a $g(a) > g(b)$.
En additionnant membre à membre ces deux inégalités strictes, on obtient $f(a) + g(a) > f(b) + g(b)$.

On a montré que pour tous réels a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) + g(a) > f(b) + g(b)$. Par suite, la fonction $f + g$ est strictement décroissante sur I.

Théorème 3. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si f et g sont croissantes sur I **et positives** sur I, alors $f \times g$ est croissante sur I.
Si f et g sont strictement croissantes sur I **et strictement positives** sur I, alors $f \times g$ est strictement croissante sur I.
Si f et g sont décroissantes sur I **et positives** sur I, alors $f \times g$ est décroissante sur I.
Si f et g sont strictement décroissantes sur I **et strictement positives** sur I, alors $f \times g$ est strictement décroissante sur I.

Démonstration. • Soient f et g deux fonctions croissantes et positives sur un intervalle I.

Soient a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$. Puisque f est croissante sur I, on a $f(a) \leqslant f(b)$ et puisque g est croissante sur I, on a $g(a) \leqslant g(b)$.
Puisque les fonctions f et g sont positives sur I, on peut multiplier membre à membre les deux inégalités précédentes et on obtient $f(a) \times g(a) \leqslant f(b) \times g(b)$.

On a montré que pour tous réels a et b de I, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \times g(a) \leqslant f(b) \times g(b)$. Par suite, la fonction $f \times g$ est croissante sur I.

• Soient f et g deux fonctions strictement croissantes et strictement positives sur un intervalle I.

Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. Puisque f est strictement croissante sur I, on a $f(a) < f(b)$ et puisque g est strictement croissante sur I, on a $g(a) < g(b)$.
Puisque les fonctions f et g sont strictement positives sur I, on peut multiplier membre à membre les deux inégalités strictes précédentes et on obtient $f(a) \times g(a) < f(b) \times g(b)$.

On a montré que pour tous réels a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) \times g(a) < f(b) \times g(b)$. Par suite, la fonction $f \times g$ est strictement croissante sur I.

• Soient f et g deux fonctions décroissantes et positives sur un intervalle I.

Soient a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$. Puisque f est décroissante sur I, on a $f(a) \geqslant f(b)$ et puisque g est décroissante sur I, on a $g(a) \geqslant g(b)$.
Puisque les fonctions f et g sont positives sur I, on peut multiplier membre à membre les deux inégalités précédentes et on obtient $f(a) \times g(a) \geqslant f(b) \times g(b)$.

On a montré que pour tous réels a et b de I, si $a \geqslant b$, alors $f(a) \times g(a) \geqslant f(b) \times g(b)$. Par suite, la fonction $f \times g$ est décroissante sur I.

• Soient f et g deux fonctions strictement décroissantes et strictement positives sur un intervalle I.

Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. Puisque f est strictement décroissante sur I, on a $f(a) > f(b)$ et puisque g est strictement décroissante sur I, on a $g(a) > g(b)$.
Puisque les fonctions f et g sont strictement positives sur I, on peut multiplier membre à membre les deux inégalités strictes précédentes et on obtient $f(a) \times g(a) > f(b) \times g(b)$.

On a montré que pour tous réels a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) \times g(a) > f(b) \times g(b)$. Par suite, la fonction $f \times g$ est strictement décroissante sur I.

Théorème 4. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1) a) Si f est strictement positive et strictement croissante sur I, alors $\dfrac{1}{f}$ est strictement décroissante sur I.

b) Si f est strictement positive et strictement décroissante sur I, alors $\dfrac{1}{f}$ est strictement croissante sur I.

2) a) Si f est strictement négative et strictement croissante sur I, alors $\dfrac{1}{f}$ est strictement décroissante sur I.

b) Si f est strictement négative et strictement décroissante sur I, alors $\dfrac{1}{f}$ est strictement croissante sur I.

Démonstration. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

• Supposons f strictement positive et strictement croissante sur I.

Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. Puisque f est strictement croissante et strictement positive sur I, on a $0 < f(a) < f(b)$ et puisque la fonction $y \mapsto \dfrac{1}{y}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, on a $\dfrac{1}{f(a)} > \dfrac{1}{f(b)}$.

On a montré que pour tous réels a et b de I, si $a < b$, alors $\dfrac{1}{f(a)} > \dfrac{1}{f(b)}$. Par suite, la fonction $\dfrac{1}{f}$ est strictement décroissante sur I.

• Supposons f strictement négative et strictement croissante sur I.

Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. Puisque f est strictement croissante et strictement négative sur I, on a $f(a) < f(b) < 0$ et puisque la fonction $y \mapsto \dfrac{1}{y}$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$, on a $\dfrac{1}{f(a)} > \dfrac{1}{f(b)}$.

On a montré que pour tous réels a et b de I, si $a < b$, alors $\dfrac{1}{f(a)} > \dfrac{1}{f(b)}$. Par suite, la fonction $\dfrac{1}{f}$ est strictement décroissante sur I.

La démonstration est analogue dans le cas d'une fonction f strictement décroissante.

Théorème 5. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction définie sur I telle que pour tout x de I, $f(x)$ appartient à J.
Soit g une fonction définie sur J.
Si f est croissante sur I et g est croissante sur J, alors $g \circ f$ est croissante sur I.
Si f est croissante sur I et g est décroissante sur J, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.
Si f est décroissante sur I et g est croissante sur J, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.
Si f est décroissante sur I et g est décroissante sur J, alors $g \circ f$ est croissante sur I.

Remarque. Le théorème ci-dessus reste valable en remplaçant « croissante » par « strictement croissante » et « décroissante » par « strictement décroissante ».

Démonstration. Soit f une fonction définie sur l'intervalle I telle que pour tout réel x de I, $f(x)$ appartienne à l'intervalle J. Soit g une fonction définie sur J.

• Supposons f croissante sur I et g croissante sur J. Soient a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$.
Puisque f est croissante sur I, on a $f(a) \leqslant f(b)$. Puisque $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à J et que g est croissante sur J, on a $g(f(a)) \leqslant g(f(b))$.

On a montré que pour tous réels a et b de I, si $a \leqslant b$, alors $g(f(a)) \leqslant g(f(b))$. Donc, la fonction $g \circ f$ est croissante sur J.

• Supposons f croissante sur I et g décroissante sur J. Soient a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$.
Puisque f est croissante sur I, on a $f(a) \leqslant f(b)$. Puisque $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à J et que g est décroissante sur J, on a $g(f(a)) \geqslant g(f(b))$.

On a montré que pour tous réels a et b de I, si $a \leqslant b$, alors $g(f(a)) \geqslant g(f(b))$. Donc, la fonction $g \circ f$ est décroissante sur J.

• Supposons f décroissante sur I et g croissante sur J. Soient a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$.
Puisque f est décroissante sur I, on a $f(a) \geqslant f(b)$. Puisque $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à J et que g est croissante sur J, on a $g(f(a)) \geqslant g(f(b))$.

On a montré que pour tous réels a et b de I, si $a \leqslant b$, alors $g(f(a)) \geqslant g(f(b))$. Donc, la fonction $g \circ f$ est décroissante sur J.

• Supposons f décroissante sur I et g décroissante sur J. Soient a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$.
Puisque f est décroissante sur I, on a $f(a) \geqslant f(b)$. Puisque $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à J et que g est décroissante sur J, on a $g(f(a)) \leqslant g(f(b))$.

On a montré que pour tous réels a et b de I, si $a \leqslant b$, alors $g(f(a)) \leqslant g(f(b))$. Donc, la fonction $g \circ f$ est croissante sur J.

Ainsi, le sens de variation d'une composition de fonctions obéit à la « règles des signes ». Si on note + la croissance et − la décroissance alors :

$$\begin{array}{ccccc} + & \circ & + & = & + \\ + & \circ & - & = & - \\ - & \circ & + & = & - \\ - & \circ & - & = & + \end{array}$$

Exercice 5. Pour tout réel $x > -4$, on pose :

$$f(x) = 3 - \frac{2}{\sqrt{x+4}}.$$

Etudier le sens de variation de la fonction f sur $]-4,+\infty[$.

Solution.

1 ère solution. Pour $x > -4$, on pose $g(x) = x + 4$, pour $y > 0$, on pose $h(y) = \sqrt{y}$, pour $z > 0$, on pose $k(z) = \dfrac{1}{z}$, pour t réel, on pose $l(t) = -2t + 3$.

g est définie sur $]-4,+\infty[$ et pour tout réel x de $]-4,+\infty[$, $g(x)$ appartient à $]0,+\infty[$. Donc $h \circ g$ est définie sur $]-4,+\infty[$ et pour tout réel x de $]-4,+\infty[$, $h(g(x)) = \sqrt{x+4}$.

$h \circ g$ est définie sur $]-4,+\infty[$ et pour tout réel x de $]-4,+\infty[$, $h(g(x))$ appartient à $]0,+\infty[$. Donc $k \circ h \circ g$ est définie sur $]-4,+\infty[$ et pour tout réel x de $]-4,+\infty[$, $k(h(g(x))) = \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$.

$k \circ h \circ g$ est définie sur $]-4,+\infty[$ et pour tout réel x de $]-4,+\infty[$, $k(h(g(x)))$ appartient à $\mathbb{R}$. Donc $l \circ k \circ h \circ g$ est définie sur $]-4,+\infty[$ et pour tout réel x de $]-4,+\infty[$, $l \circ k \circ h(g(x)) = -2 \times \dfrac{1}{\sqrt{x+4}} + 3 = f(x)$.

Ainsi, $f = l \circ k \circ h \circ g$. La fonction g est strictement croissante sur $]-4,+\infty[$, la fonction h est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, la fonction k est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et la fonction l est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $]-4,+\infty[$.

2 ème solution. Soient a et b deux réels de $]-4,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
a < b &\Rightarrow 0 < a+4 < b+4 \\
&\Rightarrow 0 < \sqrt{a+4} < \sqrt{b+4} \text{ (par stricte croissance de la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ sur}]0,+\infty[) \\
&\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a+4}} > \frac{1}{\sqrt{b+4}} \text{ (par stricte décroissance de la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur}]0,+\infty[) \\
&\Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{a+4}} < -\frac{2}{\sqrt{b+4}} \text{ (car } -2 < 0 \text{ ou par stricte décroissance de la fonction } x \mapsto -2x \text{ sur } \mathbb{R}) \\
&\Rightarrow 3 - \frac{2}{\sqrt{a+4}} < 3 - \frac{2}{\sqrt{b+4}} \\
&\Rightarrow f(a) < f(b).
\end{aligned}$$

Remarque. La deuxième solution est bien plus efficace et brève que la première. Mais il s'agit en fait d'une seule et même solution. Les calculs effectués dans la deuxième solution ne sont que la traduction des résultats de la première solution. Evidemment, la première solution est horrible à rédiger. Néanmoins, cette première solution est beaucoup plus rapide à penser qu'à écrire : on doit considérer que le sens de variation de la fonction f de l'exercice 5 « saute aux yeux » par composition d'opérations élémentaires successives. La raison fondamentale de ce fait est que dans l'expression de $f(x)$,

la lettre x apparaît une seule fois.

Dans la pratique, on pourra préférer dériver la fonction f (encore faut-il savoir la dériver) puis étudier le signe de cette dérivée. C'est le choix que l'on fera probablement dans une copie, surtout si l'énoncé l'impose. Le travail précédent ne sera pas inutile. Il interviendra dans la réflexion pour guider vers le résultat exact : la fonction f est strictement croissante sur $]-4,+\infty[$.

3) Extrema d'une fonction

Définition 6. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit x_0 un réel de I.
1) On dit que f admet un **maximum** en x_0 (ou encore que $f(x_0)$ est le maximum de la fonction f sur l'intervalle I) si et seulement si pour tout réel x de I, on a $f(x) \leqslant f(x_0)$.
2) On dit que f admet un **minimum** en x_0 (ou encore que $f(x_0)$ est le minimum de la fonction f sur l'intervalle I) si et seulement si pour tout réel x de I, on a $f(x) \geqslant f(x_0)$.
3) On dit que f admet un **maximum local** en x_0 (ou encore que $f(x_0)$ est un maximum local de la fonction f sur l'intervalle I) si et seulement si il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que, pour tout réel x de $I \cap J$, on a $f(x) \leqslant f(x_0)$.
4) On dit que f admet un **minimum local** en x_0 (ou encore que $f(x_0)$ est un minimum local de la fonction f sur l'intervalle I) si et seulement si il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que, pour tout réel x de $I \cap J$, on a $f(x) \geqslant f(x_0)$.
5) On dit que f admet un **extremum** en x_0 (ou encore que $f(x_0)$ est un extremum de la fonction f sur l'intervalle I) si et seulement si f admet un maximum en x_0 ou f admet un minimum en x_0.
6) On dit que f admet un **extremum local** en x_0 (ou encore que $f(x_0)$ est un extremum local de la fonction f sur l'intervalle I) si et seulement si f admet un maximum local en x_0 ou f admet un minimum local en x_0.

Exemple 1. Pour tout réel x de $[-1,2]$, posons $f(x) = x^2$.
- f admet un minimum en 0 égal à 0.
- f admet un maximum en 2 égal à 4.
- f admet un maximum local en 2 égal à 4 et ce maximum local est le maximum de f.
- f admet un maximum local en -1 égal à 1 qui n'est pas le maximum de f.

Exemple 2. Pour tout réel x de $]0,1[$, posons $f(x) = x^2$.
f n'admet ni minimum, ni maximum.