Fiche n° 3. Valeur absolue. Distance entre deux réels. Intervalles de $\mathbb{R}$.

I Valeur absolue d'un réel

Définition 1

Soit x un nombre réel.

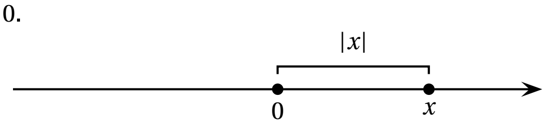
La **valeur absolue** de x, notée $|x|$, est égale à x si x est positif et à $-x$ si x est négatif ou encore

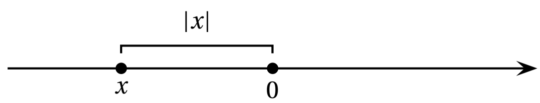
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Exemple. $|3| = 3$ et $|-3| = 3$ et $|0| = 0$ et aussi, puisque $\sqrt{2} - \sqrt{3} \leqslant 0$, $\left|\sqrt{2} - \sqrt{3}\right| = -\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

II Distance entre deux réels

La valeur absolue d'un réel x s'interprète géométriquement sur la droite numérique comme la distance du réel x au réel 0.





Plus généralement,

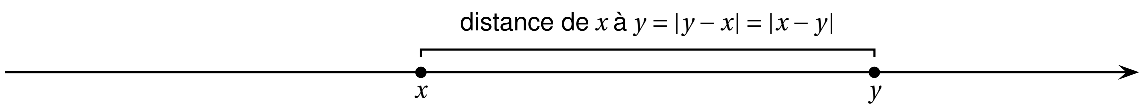
Théoreme 1

Soient x et y deux réels. La **distance** de x à y est $|y - x|$.

$|y - x|$ est égal à $y - x$ si $y \geqslant x$ et à $x - y$ si $x \geqslant y$ c'est-à-dire dans tous les cas, $|y - x|$ est égal à la différence entre le plus grand des deux nombres x et y et le plus petit ou encore

$$|y - x| = \begin{cases} y - x & \text{si } y \geqslant x \\ x - y & \text{si } x \geqslant y \end{cases}.$$

On peut noter que le nombre $|x - y|$ est aussi égal à la différence entre le plus grand des deux nombres x ou y et le plus petit et donc $|x - y| = |y - x|$.



III Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 2

Les **intervalles** de $\mathbb{R}$ sont les parties de $\mathbb{R}$ qui sont d'un seul tenant, sans trou.

Les différents types d'intervalles de $\mathbb{R}$ sont (a et b étant des nombres réels) :

Intervalle	Ensemble des réels x	Représentation graphique
$[a, b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
$[a, b[$	$a \leqslant x < b$	
$]a, b]$	$a < x \leqslant b$	
$]a, b[$	$a < x < b$	
$[a, +\infty[$	$x \geqslant a$	
$]a, +\infty[$	$x > a$	
$]-\infty, a]$	$x \leqslant a$	
$]-\infty, a[$	$x < a$	
$]-\infty, +\infty[$	$\mathbb{R}$	

L'intervalle $[a, b]$ est un intervalle **fermé**, ce qui signifie que les deux **bornes** a et b de l'intervalle appartiennent à l'intervalle (on dit aussi que les bornes sont comprises).

L'intervalle $]a, b[$ est un intervalle **ouvert**, ce qui signifie qu'aucune des deux bornes a et b de l'intervalle n'appartient à l'intervalle (on dit aussi que les bornes ne sont pas comprises).

L'intervalle $[a, b[$ est un intervalle **ouvert à droite et fermé à gauche**, ce qui signifie que la borne a appartient à l'intervalle et la borne b n'appartient pas à l'intervalle.

L'intervalle $]a, b]$ est un intervalle **ouvert à gauche et fermé à droite**, ce qui signifie que la borne a n'appartient pas à l'intervalle et la borne b appartient à l'intervalle.

Définition 3

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

La **réunion** de I et de J est l'ensemble des réels x tels que x appartient à I **ou** x appartient à J. Elle se note $\mathrm{I} \cup \mathrm{J}$.
L'**intersection** de I et de J est l'ensemble des réels x tels que x appartient à I **et** x appartient à J. Elle se note $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$.

Exemple. $[1, 2] \cup [2, 3] = [1, 3]$ et $[1, 2] \cap [2, 3] = \{2\}$.

Théorème 2

Soient a un réel et r un réel positif. L'ensemble des réels x tels $|x - a| \leqslant r$ est l'intervalle $[a - r, a + r]$.

Définition 4

Soient a un réel et r un réel positif.

L'intervalle $[a - r, a + r]$ est appelé l'**intervalle fermé de centre a et de rayon r**.