Planche n° 3.
Intervalles de $\mathbb{R}$, valeur absolue. Corrigés.

I Intervalles

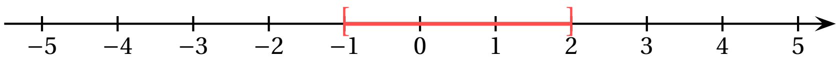
Exercice 1

Représenter sur la droite numérique chacun des ensembles suivants :

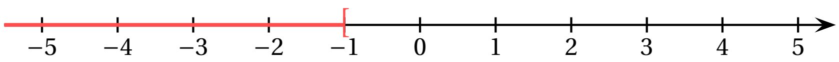
1) $[-1,2]$ **2)** $]-\infty,-1[$ **3)** $[-2,+\infty[$ **4)** $[-5,-2[$ **5)** $]-\infty,-1[\cup[3,4]$

Solution 1

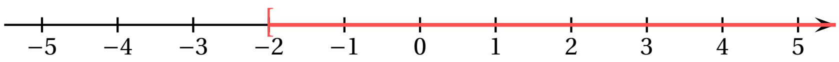
1) $[-1,2]$ est l'ensemble des réels x tels que $-1 \leqslant x \leqslant 2$.



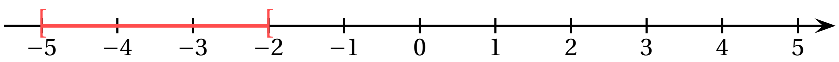
2) $]-\infty,-1[$ est l'ensemble des réels x tels que $x < -1$.



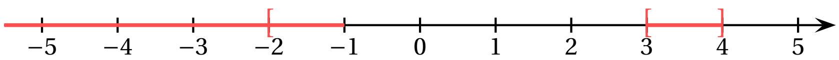
3) $[-2,+\infty[$ est l'ensemble des réels x tels que $x \geqslant -2$.



4) $[-5,-2[$ est l'ensemble des réels x tels que $-5 \leqslant x < -2$.



5) $]-\infty,-1[\cup[3,4]$ est l'ensemble des réels x tels que $x < -1$ ou $3 \leqslant x \leqslant 4$.



Exercice 2

Décrire à l'aide d'intervalles l'ensemble des réels x tels que :

1) $x \geqslant 3$ **2)** $-2 \leqslant x < 7$ **3)** $x < -1$ **4)** $x \geqslant 3$ ou $x \leqslant 1$

Solution 2

1) L'ensemble des réels x tels que $x \geqslant 3$ est $[3,+\infty[$.

2) L'ensemble des réels x tels que $-2 \leqslant x < 7$ est $[-2,7[$.

3) L'ensemble des réels x tels que $x < -1$ est $]-\infty,-1[$.

4) L'ensemble des réels x tels que $x \geqslant 3$ ou $x \leqslant 1$ est $]-\infty,1] \cup [3,+\infty[$.

Exercice 3

Compléter en utilisant l'un des symboles $\in$ ou $\notin$:

1) $2\ldots]-2,4]$ **2)** $10^{-2}\ldots]-\infty,0[$ **3)** $\pi \in]3,1;3,2[$ **4)** $\pi \in [3,1;3,2]$ **5)** $3 \in]-3,3]$ **5)** $3 \in [-3,3[$

Solution 3

1) Puisque $-2 < 2 \leqslant 4$, on a $2 \in]-2,4]$.

2) Puisque $10^{-2} \geqslant 0$, on n'a pas $10^{-2} < 0$ et donc $10^{-2} \notin]-\infty,0[$.

3) Puisque $3,1 < \pi < 3,2$ (car $\pi = 3,14\ldots$), $\pi \in]3,1;3,2[$.

4) Puisque $3,1 \leqslant \pi \leqslant 3,2$, $\pi \in [3,1;3,2]$.

5) 3 n'est pas strictement inférieur à 3 et donc $3 \notin [-3,3[$.

Rappels de cours et/ou commentaires.

• *10^{-2} n'est pas -10^2 mais $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2}$ et en particulier, 10^{-2} est un réel positif. Donc, $10^{-2} \in [0,+\infty[$ ou aussi $10^{-2} \notin]-\infty,0[$.*

• *L'inégalité large $a \leqslant b$ est vraie si et seulement si au moins une des deux affirmations suivantes est vraie : « a est strictement inférieur à b » ou « $a = b$ ». Puisque $3,1 < \pi < 3,2$, on a donc aussi $3,1 \leqslant \pi \leqslant 3,2$.* ■

Exercice 4

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1) $\dfrac{2}{3} \in \left[\dfrac{4}{7},\dfrac{9}{11}\right]$ **2)** $-3 \in [-2,-1]$ **3)** $3 \in [-1,3]$ **4)** $-50 \notin]-\infty,-15[$

Solution 4

1) VRAI. $2 \times 7 \geqslant 3 \times 4$ puis $\dfrac{2}{3} \geqslant \dfrac{4}{7}$. De même, $2 \times 11 \leqslant 3 \times 9$ puis $\dfrac{2}{3} \leqslant \dfrac{9}{11}$. Finalement, $\dfrac{4}{7} \leqslant \dfrac{2}{3} \leqslant \dfrac{9}{11}$ puis $\dfrac{2}{3} \in \left[\dfrac{4}{7},\dfrac{9}{11}\right]$.

2) FAUX. -3 est strictement inférieur à -2 et donc $-3 \notin [-2,-1]$.

3) VRAI. 3 est inférieur ou égal à 3 et donc $3 \notin [-1,3]$.

4) FAUX. -50 est strictement inférieur à -15 et donc $-50 \in]-\infty,-15[$

Rappels de cours et/ou commentaires.

Pour comparer deux fractions $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ (où a, b, c et d sont strictement positifs), on peut chercher à comparer ad et bc. ■

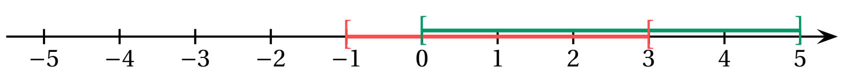
Exercice 5

Déterminer $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$ et $\mathrm{I} \cup \mathrm{J}$ dans chacun des cas suivants :

1) $\mathrm{I} = [-1,3[$ et $\mathrm{J} = [0,5]$ **2)** $\mathrm{I} =]-5,-2]$ et $\mathrm{J} = [2,+\infty[$ **3)** $\mathrm{I} = [1,2[$ et $\mathrm{J} = [2,3[$ **4)** $\mathrm{I} =]-\infty,0]$ et $\mathrm{J} = [0,+\infty[$
5) $\mathrm{I} =]-\infty,0]$ et $\mathrm{J} =]0,+\infty[$.

Solution 5

1) Représentons les ensembles $\mathrm{I} = [-1,3[$ et $\mathrm{J} = [0,5]$.



$\mathrm{I} \cup \mathrm{J}$ est l'ensemble des réels x qui appartiennent à au moins un des deux intervalles I ou J, c'est-à-dire l'ensemble des réels x coloriés au moins une fois. Donc, $\mathrm{I} \cup \mathrm{J} = [-1,5]$
$\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$ est l'ensemble des réels x qui appartiennent aux deux intervalles I et J, c'est-à-dire l'ensemble des réels x coloriés deux fois. Donc, $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} = [0,3[$.

2) $\mathrm{I} \cup \mathrm{J} =]-5,-2] \cup [2,+\infty[$ ce qui ne peut pas s'écrire plus simplement. $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} = \varnothing$.

3) $\mathrm{I} \cup \mathrm{J} = [1,3[$ et $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} = \varnothing$.

4) $\mathrm{I} \cup \mathrm{J} = [1,3[$ et $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} = \{0\}$.

5) $\mathrm{I} \cup \mathrm{J} =]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$ et $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} = \varnothing$.

Exercice 6

Compléter en utilisant l'un des symboles $\subset$ ou $\not\subset$:

1) $\{2\}\dots]-2,4]$ **2)** $]-1,1[\dots]-\infty,0]$ **3)** $[4,5]\dots[1;4,5]\cup[2,3]$ **4)** $[4,5]\dots[1;4,5]\cap[2,3]$ **5)** $]-1,1[\cap\mathbb{Z}\dots]-\infty,0]$

Solution 6

1) $-2<2\leqslant 4$ ou encore $2\in]-2,4]$ ou enfin $\{2\}\subset]-2,4]$.

2) Le nombre $0,5$ est élément de $]-1,1[$ et pas de $]-\infty,0]$. Donc, $]-1,1[\not\subset]-\infty,0]$.

3) $[1;4,5]\cup[2,3]=[1;4,5]$. Le nombre 5 est élément de $[4;5]$ et n'est pas élément de $[1;4,5]\cup[2,3]$. Donc $[4,5]\not\subset[1;4,5]\cup[2,3]$.

4) $[1;4,5]\cap[2,3]=[2,3]$. Le nombre 5 est élément de $[4;5]$ et n'est pas élément de $[1;4,5]\cap[2,3]$. Donc $[4,5]\not\subset[1;4,5]\cap[2,3]$.

5) Il y a un et un seul entier relatif qui appartient à $]-1,1[$, à savoir 0. Donc, $]-1,1[\cap\mathbb{Z}=\{0\}$. 0 est élément de $]-\infty,0]$ et donc $]-1,1[\cap\mathbb{Z}\subset]-\infty,0]$.

Rappels de cours et/ou commentaires.

Un ensemble non vide A est inclus dans un ensemble B si et seulement si tous les éléments de A sont aussi des éléments de B. Pour montrer qu'un ensemble A n'est pas inclus dans un ensemble B, c'est-à-dire $A\not\subset B$, on fournit explicitement un élément de l'ensemble A qui n'appartient pas à l'ensemble B. Maintenant, quand $A\not\subset B$, il est possible que certains éléments de A soient aussi des éléments de B. ■

II Valeur absolue

Exercice 7

Donner la valeur absolue des réels suivants :

1) -3 **2)** π **3)** $\pi-4$ **4)** $\sqrt{3}-2$

Solution 7

1) $|-3|=3$ **2)** $|\pi|=\pi$
3) $\pi<4$ puis $\pi-4<0$. Donc $|\pi-4|=-(\pi-4)=4-\pi$
4) $\sqrt{3}<2$ (car $\sqrt{3}^2=3$ et $2^2=4$) puis $\sqrt{3}-2<0$. Donc, $\left|\sqrt{3}-2\right|=-\left(\sqrt{3}-2\right)=2-\sqrt{3}$.

Exercice 8

Sur la droite numérique, on considère les points A et B d'abscisses respectives a et b. Calculer la distance entre les points A et B dans chacun des cas suivants :

1) $a=5,2$ et $b=8,3$ **2)** $a=-5,3$ et $b=-11,7$ **3)** $a=\pi$ et $b=\dfrac{22}{7}$

Solution 8

1) $AB=|b-a|=|8,3-5,2|=|3,1|=3,1$.

2) $AB=|b-a|=|(-11,7)-(-5,3)|=|-6,4|=6,4$.

3) $\dfrac{22}{7}=3,142\dots$ et $\pi=3,141\dots$ Donc $\dfrac{22}{7}>\pi$. Par suite, $AB=\left|\dfrac{22}{7}-\pi\right|=\dfrac{22}{7}-\pi$.

Rappels de cours et/ou commentaires.

• *La distance de A à B est $AB=|x_B-x_A|$ où x_A et x_B sont les abscisses respectives des points A et B.*
• *Si a et b sont deux réels, le nombre $|a-b|$ est égal à la différence entre le plus grand des deux nombres a ou b et le plus petit de ces deux nombres.* ■

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1) $|x-4|=2$ **2)** $|x-7|=11$ **3)** $|x+5|=3$ **4)** $|x+4|=0$ **5)** $|x-2|=-1$ **6)** $|-x-1|=2$

Solution 9

1) Soit x un réel. $|x-4|$ est la distance du réel x au réel 4.
Donc, $|x-4|=2$ équivaut à $x=4+2$ ou $x=4-2$ c'est-à-dire à $x=6$ ou $x=2$. Les solutions de l'équation $|x-4|=2$ sont 2 et 6.

2) Soit x un réel. $|x-4|$ est la distance du réel x au réel 7.
Donc, $|x-7|=11$ équivaut à $x=7+11$ ou $x=7-11$ c'est-à-dire à $x=18$ ou $x=-4$. Les solutions de l'équation $|x-7|=11$ sont -4 et 18.

3) Soit x un réel. $|x+5|=3$ équivaut à $|x-(-5)|=3$ c'est-à-dire la distance de x à -5 est égale à 3. Donc, $|x+5|=3$ équivaut à $x=-5-3$ ou $x=-5+3$ ou encore à $x=-8$ ou $x=-2$. Les solutions de l'équation $|x+5|=3$ sont -8 et -2.

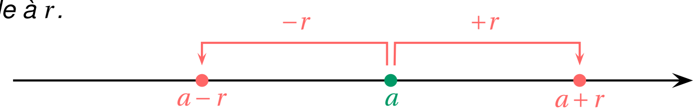
4) Soit x un réel. $|x+4|=0$ équivaut à la distance de x à -4 est égale à 0 c'est-à-dire à $x=-4$.

5) Soit x un réel. La valeur absolue d'un réel est toujours un réel positif. Donc, l'équation $|x-2|=-1$ n'a pas de solution.

6) Soit x un réel. Un réel et son opposé ont la même valeur absolue. Donc, $|-x-1|=|-(-x-1)|=|x+1|$. Par suite, $|-x-1|=2$ équivaut à $|x+1|=2$ ou encore à $x=-1-2$ ou $x=-1+2$ ou enfin à $x=-3$ ou $x=1$. Les solutions de l'équation $|-x-1|=2$ sont -3 et 1.

Rappels de cours et/ou commentaires.

Si x et a sont deux réels et r est un réel positif, $|x-a|=r$ équivaut à $x=a-r$ ou $x=a+r$ car $|x-a|=r$ signifie : la distance de x à a est égale à r.



■

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

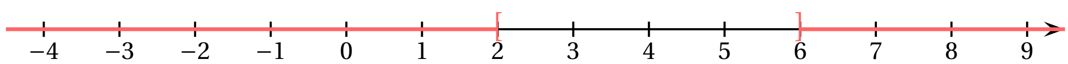
1) $|x|\leqslant 2$ **2)** $|x-4|\leqslant 2$ **3)** $|x-4|>2$ **4)** $|x+5|<3$ **5)** $|x-2|\leqslant 2\times 10^{-2}$ **6)** $|x+4|\leqslant 0$ **7)** $|x+4|\geqslant 0$

Solution 10

1) Soit x un réel. $|x|\leqslant 2$ signifie : la distance de x à 0 est inférieure ou égale à 2. Donc, $|x|\leqslant 2$ équivaut à $-2\leqslant x\leqslant 2$ ou encore à $x\in[-2,2]$. L'ensemble des réels x tels que $|x|\leqslant 2$ est $[-2,2]$.

2) Soit x un réel. $|x-4|\leqslant 2$ signifie : la distance de x à 4 est inférieure ou égale à 2. Donc, $|x-4|\leqslant 2$ équivaut à $4-2\leqslant x\leqslant 4+2$ ou encore à $x\in[2,6]$. L'ensemble des réels x tels que $|x-4|\leqslant 2$ est $[2,6]$.

3) Soit x un réel. L'ensemble des réels x tels que $|x-4|>2$ est le complémentaire de l'ensemble des réels x tels que $|x-4|\leqslant 2$, à savoir $]-\infty,2[\cup]6,+\infty[$.



4) Pour tout réel x, $|x+5|=|x-(-5)|$. L'ensemble des réels x tels que $|x+5|<3$ est l'ensemble des réels x dont la distance à -5 est strictement inférieure à 3 à savoir $]-8,-2[$.

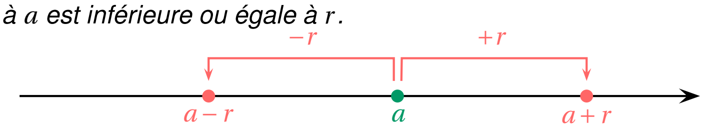
5) Soit x un réel. $|x-2|\leqslant 2\times 10^{-2}$ équivaut à $2-2\times 10^{-2}\leqslant x\leqslant 2+2\times 10^{-2}$ ou encore à $x\in[1,98;2,02]$. L'ensemble des réels x tels que $|x-2|\leqslant 2\times 10^{-2}$ est $[1,98;2,02]$.

6) Soit x un réel. $|x+4|\leqslant 0$ équivaut à $|x+4|=0$ ou encore $x=-4$. L'ensemble des réels x tels que $|x+4|\leqslant 0$ est $\{-4\}$.

7) Pour tout réel x, on a $|x+4|\geqslant 0$. L'ensemble des réels x tels que $|x+4|\leqslant 0$ est $]-\infty,+\infty[$ ou encore $\mathbb{R}$.

Rappels de cours et/ou commentaires.

• *Si x et a sont deux réels et r est un réel positif, l'ensemble des réels x tels que $|x-a| \leqslant r$ $[a-r, a+r]$ car $|x-a| \leqslant r$ signifie : la distance de x à a est inférieure ou égale à r.*



• *Si E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, le complémentaire de E est l'ensemble des réels qui n'appartiennent pas à E.* ■

Exercice 11

Dans ce qui suit, I est l'intervalle fermé de centre a et de rayon r. Préciser l'intervalle I dans chacun des cas suivants

1) $a = 1$ et $r = 1$ **2)** $a = 3$ et $r = 4$ **3)** $a = -5$ et $r = 10^{-1}$ **4)** $a = \frac{2}{7}$ et $r = \frac{4}{3}$

Solution 11

1) L'intervalle fermé de centre 1 et de rayon 1 est l'intervalle $[1-1, 1+1]$ ou encore $[0, 2]$.

2) L'intervalle fermé de centre 3 et de rayon 4 est l'intervalle $[3-4, 3+4]$ ou encore $[-1, 7]$.

3) L'intervalle fermé de centre -5 et de rayon 10^{-1} est l'intervalle $\left[-5-10^{-1}, -5+10^{-1}\right]$ ou encore $[-5,1; -4,9]$.

4) L'intervalle fermé de centre $\frac{2}{7}$ et de rayon $\frac{4}{3}$ est l'intervalle $\left[\frac{2}{7}-\frac{4}{3}, \frac{2}{7}+\frac{4}{3}\right]$ ou encore $\left[-\frac{22}{21}, \frac{34}{21}\right]$.

Rappels de cours et/ou commentaires.

L'intervalle de centre a et de rayon r est l'intervalle $[a-r, a+r]$. ■

Exercice 12

Dans chacun des cas suivants, décrire à l'aide de valeurs absolues l'appartenance d'un réel x à l'ensemble E considéré

1) $\mathrm{E} = [-1, 5]$ **2)** $\mathrm{E} =]-3, 2[$ **3)** $\mathrm{E} =]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$.

Solution 12

1) Le centre de l'intervalle fermé $[-1, 5]$ est $\frac{-1+5}{2}$ ou encore 2. Le rayon de cet intervalle est $\frac{5-(-1)}{2}$ ou encore 3. $[-1, 5]$ est l'intervalle fermé de centre 2 et de rayon 3 ou encore $[-1, 5]$ est l'ensemble des réels x tels que $|x-2| \leqslant 3$.

2) Le centre de l'intervalle ouvert $]-3, 2[$ est $\frac{-3+2}{2}$ ou encore $-\frac{1}{2}$. Le rayon de cet intervalle est $\frac{2-(-3)}{2}$ ou encore $\frac{5}{2}$. $]-3, 2[$ est l'intervalle de centre $-\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{5}{2}$ ou encore $]-3, 2[$ est l'ensemble des réels x tels que $\left|x+\frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{5}{2}$.

3) $]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$ est le complémentaire de $[-3, 1]$. $[-3, 1]$ est l'intervalle de centre -1 et de rayon 2 et donc $[-3, 1]$ est l'ensemble des réels x tels que $|x+1| \leqslant 2$. Finalement, $]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$ est l'ensemble des réels x tels que $|x+1| > 2$.

Exercice 13

1) Soient a et b deux réels. A quelle condition nécessaire étant suffisante a-t-on $|a| = |b|$?

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x| = |3x+2|$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2|x-1| = |x+3|$.

Solution 13

1) Soient a et b deux réels. $|a| = |b|$ équivaut à $b = a$ ou $b = -a$.

2) Soit x un réel. $|x| = |3x+2|$ équivaut à $3x+2 = x$ ou $3x+2 = -x$ ou encore à $2x = -2$ ou $4x = -2$ ou enfin à $x = -1$ ou $x = -\frac{1}{2}$. Les réels x tels que $|x| = |3x+2|$ sont -1 et $-\frac{1}{2}$.

3) Soit x un réel. $|x-1| = |x+3|$ équivaut à $x+3 = x-1$ ou $x+3 = -(x-1)$ ou encore à $0x = -4$ ou $2x = -2$ ou enfin à $x = -1$. Il existe un et un seul réel x tel que $|x-1| = |x+3|$ à savoir -1. .

Exercice 14

Montrer que pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Solution 14

La racine carrée d'un nombre réel positif a est le réel positif dont le carré est égal à a.

Soit x un réel positif. Le réel positif, dont le carré est x^2, est x. Donc, $\sqrt{x^2} = x$.
Soit x un réel négatif. Alors $-x$ est un réel positif puis, d'après ce qui précède, $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x$.

En résumé, pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$ ou encore $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exercice 15

Déterminer tous les réels x vérifiant la relation (E) dans chacun des cas suivants

1) $|x| - x = 1$.

2) $|x-1| = x-1$.

Solution 15

1) Soit x un réel. Si x est positif ou nul, $|x| - x = x - x = 0$ et en particulier $|x| - x \neq 1$. Aucun réel positif ou nul n'est solution de l'équation $|x| - x = 1$.
Si x est strictement négatif, $|x| = -x$. Par suite, $|x| - x = 1$ équivaut à $-x - x = 1$ ou encore à $-2x = 1$ ou enfin à $x = -\frac{1}{2}$. De plus, $-\frac{1}{2}$ est effectivement strictement négatif.

Il existe un réel x et un seul tel que $|x| - x = 1$ à savoir $-\frac{1}{2}$.

2) Un réel a est égal à sa valeur absolue si et seulement si ce réel est positif ou nul.

Soit x un réel. $|x-1| = x-1$ équivaut à $x-1 \geqslant 0$ ou encore à $x \geqslant 1$. L'ensemble des réels x tels que $|x-1| = x-1$ est $[1, +\infty[$.

Exercice 16

1) Compléter le tableau de valeurs absolues suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$
$\lvert x+3\rvert$			
$\lvert x-1\rvert + \lvert x+3\rvert$			

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x-1| + |x+3| = 8$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x-1| + |x+3| = 4$.

Solution 16

1) Pour tout réel x, $|x-1| = \begin{cases} x-1 \text{ si } x-1 \geqslant 0 \\ -(x-1) \text{ si } x-1 < 0 \end{cases}$ ou encore $|x-1| = \begin{cases} x-1 \text{ si } x \geqslant 1 \\ -x+1 \text{ si } x < 1 \end{cases}$.

Pour tout réel x, $|x+3| = \begin{cases} x+3 \text{ si } x+3 \geqslant 0 \\ -(x+3) \text{ si } x+3 < 0 \end{cases}$ ou encore $|x-1| = \begin{cases} x+3 \text{ si } x \geqslant -3 \\ -x-3 \text{ si } x < -3 \end{cases}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ -3	1	$+\infty$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$
$\lvert x+3\rvert$	$-x-3$	$x+3$	$x+3$
$\lvert x-1\rvert+\lvert x+3\rvert$	$-2x-2$	4	$2x+2$

2) Soit x un réel.

• Si $x \leqslant -3$, $|x-1|+|x+3| = 8$ équivaut à $-2x-2 = 8$ ou encore à $-2x = 10$ ou encore $x = -5$. De plus, -5 est effectivement inférieur ou égal à -3.
• Si $x \geqslant 1$, $|x-1|+|x+3| = 8$ équivaut à $2x+2 = 8$ ou encore à $2x = 6$ ou encore $x = 3$. De plus, 3 est effectivement inférieur ou égal à 1.
• Si $-3 < x < 1$, $|x-1|+|x+3| = 4$ et en particulier $|x-1|+|x+3| \neq 8$.

Il existe exactement deux réels x tels que $|x-1|+|x+3| = 8$ à savoir -5 et 1.

3) Soit x un réel.

• Si $-3 \leqslant x \leqslant 1$, $|x-1|+|x+3| = 4$ et donc x est solution de l'équation.
• Si $x < -3$, $|x-1|+|x+3| = 4$ équivaut à $-2x-2 = 4$ ou encore à $-2x = 6$ ou encore $x = -3$. Mais cette fois-ci -3 n'est pas strictement inférieur à -3 et donc il n'existe pas de réel x strictement inférieur à -3 qui soit solution de l'équation proposée.
• Si $x > 1$, $|x-1|+|x+3| = 4$ équivaut à $2x+2 = 4$ ou encore à $2x = 2$ ou encore $x = 1$. Mais 1 n'est pas strictement supérieur à 1 et donc il n'existe pas de réel x strictement supérieur à 1 qui soit solution de l'équation proposée.

Les réels x solutions de l'équation $|x-1|+|x+3| = 4$ sont les réels de l'intervalle $[-3, 1]$.

Exercice 17

Montrer que pour tous réels x et y, $|x \times y| = |x| \times |y|$.

Solution 17

Soient x et y deux réels.

Si x et y sont positifs ou nuls, $x \times y$ est positif ou nul. Donc, $|x \times y| = xy$ et $|x| \times |y| = xy$. Dans ce cas, on a $|x \times y| = |x| \times |y|$.
Si x et y sont négatifs ou nuls, $x \times y$ est positif ou nul. Donc, $|x \times y| = xy$ et $|x| \times |y| = (-x)(-y) = xy$. Dans ce cas, on a $|x \times y| = |x| \times |y|$.
Si par exemple x est positif ou nul et y est négatif ou nul, $x \times y$ est négatif ou nul. Donc, $|x \times y| = -xy$ et $|x| \times |y| = x(-y) = -xy$. Dans ce cas, on a $|x \times y| = |x| \times |y|$.

Ainsi, pour tous réels x et y, $|x \times y| = |x| \times |y|$.

Exercice 18

On munit le plan d'un repère orthonormé. On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $\mathrm{M}(x, y)$ tels que $|x|+|y| \leqslant 1$. On veut construire l'ensemble $\mathscr{E}$.

1) a) Montrer que $\mathscr{E}$ admet les deux axes de coordonnées pour axes de symétries.
b) Quelle simplification apporte le résultat de a) pour construire l'ensemble $\mathscr{E}$?

2) Construire l'ensemble des points $\mathrm{M}(x, y)$ tels que $x+y = 1$ et $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

3) Construire l'ensemble des points $\mathrm{M}(x, y)$ tels que $x+y \leqslant 1$ et $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

4) Construire l'ensemble $\mathscr{E}$.

Solution 18

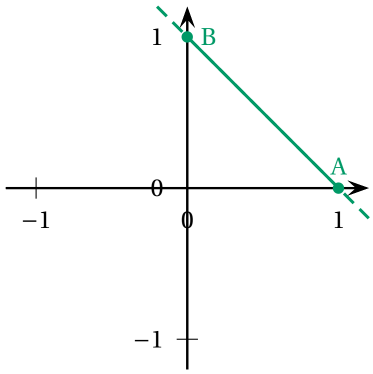
1) a) Soit $M(x, y)$ un point du plan. Le symétrique M_1 de M par rapport à l'axe des abscisses a pour coordonnées $(x, -y)$ et le symétrique M_2 de M par rapport à l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(-x, y)$.

Un réel a la même valeur absolue que son opposé. Donc, $|-x| = |x|$ et $|-y| = |y|$ puis $|x|+|-y| = |-x|+|y| = |x|+|y|$. Par suite, M appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si M_1 appartient à $\mathscr{E}$ et M appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si M_2 appartient à $\mathscr{E}$.

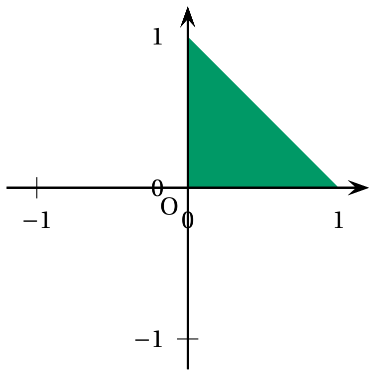
On a ainsi montré que l'ensemble $\mathscr{E}$ est symétrique par rapport à chacun des axes de coordonnées.

b) Il suffit donc de construire la partie $\mathscr{E}'$ de l'ensemble $\mathscr{E}$ constituée des points dont l'abscisse et l'ordonnée sont positives. On obtient ensuite l'ensemble $\mathscr{E}$ en construisant le symétrique $\mathscr{E}''$ de $\mathscr{E}'$ par rapport à l'axe des abscisses puis en construisant le symétrique de $\mathscr{E}' \cup \mathscr{E}''$ par rapport à l'axe des ordonnées.

2) $x + y = 1$ équivaut à $y = 1 - x$. On construit la droite d'équation $y = 1 - x$. Elle passe par les points $A(1, 0)$ et $B(0, 1)$. On ne garde que la partie de cette droite dont les points ont une abscisse et une ordonnée positive. On obtient le segment $[AB]$.



3) Soit $M(x, y)$ un point du plan tel que $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. Soit N le point du segment $[AB]$ de même abscisse. Donc, N a pour coordonnées $(x, 1 - x)$.
$x + y \leqslant 1$ équivaut à $y \leqslant 1 - x$ ou encore à $y_M \leqslant y_N$ c'est-à-dire M est en dessous de N (éventuellement confondu avec N). L'ensemble des points M cherché est alors le triangle OAB bord et intérieur compris.



4) Par symétries successives, on obtient l'ensemble $\mathscr{E}$: