

Chapitre 3. Trigonométrie

On rappelle ici et on complète les résultats énoncés au lycée. L'objectif à viser est la technicité. Pour cela, il faut :

- ① connaître par cœur les différentes formules de trigonométrie,
- ② savoir à quel moment s'en servir.

En ce qui concerne le premier point (①), au cours de l'année de mathématiques supérieures, on doit apprendre quatre formulaires : un formulaire de trigonométrie circulaire, un formulaire de dérivées, un formulaire de primitives, un formulaire de développements limités.

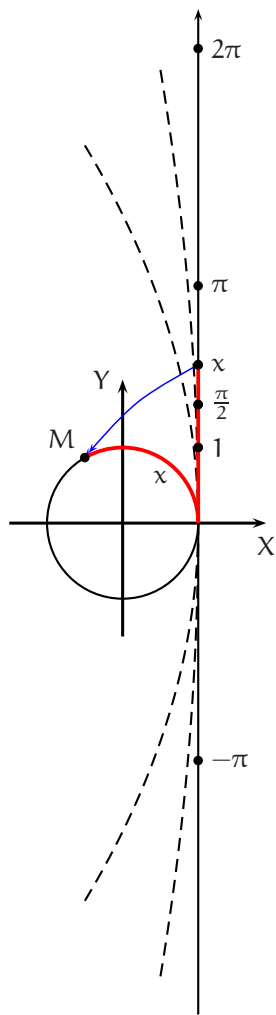
Il est clair que l'on n'utilise pas en permanence une formule de trigonométrie ou une formule de dérivée. Cela se produit dans certaines périodes uniquement. Dans ces moments-là, on doit alors être capable de mobiliser la formule exacte, et en particulier on doit l'avoir mémorisée. On peut donner sur le sujet deux conseils. Premièrement, chaque fois au cours de l'année, que vous vous retrouvez face à une formule de trigonométrie (ou de dérivée, ...) que vous ignorez (à la suite d'une colle, d'un devoir, ...), profitez-en pour prendre immédiatement dix minutes de votre temps pour **réapprendre la totalité du formulaire**. Deuxièmement, **affichez vos formulaires** sur vos murs, et ceci en plusieurs exemplaires dans des endroits stratégiques de votre habitation. Si vous suivez ces deux conseils, vous sortirez de mathématiques supérieures en connaissant vos formules, ce qui est un objectif essentiel à atteindre.

En ce qui concerne le deuxième point (②), vous trouverez dans un certain nombre d'exercices de ce chapitre des raisons qui poussent à utiliser telle ou telle formule de trigonométrie plutôt que telle autre.

Plan du chapitre

1 Mesures en radians d'un angle orienté	page 2
2 Les lignes trigonométriques	page 3
2.1 Définition des lignes trigonométriques	page 4
2.2 Valeurs usuelles	page 5
3 Formulaire de trigonométrie circulaire	page 7
3.1 Comparaison de lignes trigonométriques	page 7
3.2 Formules d'addition et de duplication	page 9
3.3 Résolution d'équations trigonométriques	page 11
3.4 Formules de linéarisation	page 13
3.5 Formules de factorisation	page 14
3.6 Expressions de $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ en fonction de $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$	page 14
3.7 Transformation de $a \cos(x) + b \sin(x)$	page 15
4 Les fonctions circulaires	page 16
4.1 Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$	page 16
4.2 Les fonctions $x \mapsto \tan(x)$ et $x \mapsto \cotan(x)$	page 18

1 Mesures en radian d'un angle orienté



Le plan est rapporté à un repère orthormé direct (O, \vec{I}, \vec{J}) ou encore (OXY) . Au lycée, vous avez appris à « enrouler » l'axe réel sur le cercle trigonométrique, c'est-à-dire le cercle de centre O et de rayon 1 , orienté dans le sens direct.

A chaque réel x correspond un et un seul point du cercle trigonométrique. Si x est positif, le point M associé à x est le point du cercle obtenu en parcourant une longueur x sur ce cercle, dans le sens direct, à partir du point de coordonnées $(1, 0)$.

Si x est négatif, on parcourt sur le cercle une longueur $|x| = -x$ dans le sens indirect.

Ainsi, tout réel est associé à un et un seul angle et si M est le point associé au réel x alors x s'appelle **UNE mesure** en radian de l'angle orienté $(\vec{I}, \overrightarrow{OM})$. Ici, l'unité de mesure est la longueur du rayon du cercle trigonométrique, à savoir 1 et $|x|$ est le nombre de rayons qui constituent l'arc de cercle qui va de O à M , d'où le mot *radian*.

Inversement, puisque le tour complet a une longueur égale à 2π , deux réels mesurent un même angle si et seulement si leur différence est un multiple entier (relatif) de 2π . Tout angle admet donc une infinité de mesures et

si α est une mesure de l'angle orienté $(\vec{I}, \overrightarrow{OM})$,
 l'ensemble des mesures de l'angle $(\vec{I}, \overrightarrow{OM})$
 est l'ensemble des nombres de la forme $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
 Cet ensemble se note $\alpha + 2\pi\mathbb{Z}$.
 $\alpha + 2\pi\mathbb{Z} = \{\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Ainsi, des réels différents peuvent mesurer un même angle. Par exemple, les réels $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{2}$ **sont des réels différents** ($\frac{\pi}{2} = 1,57\dots$ et $\frac{5\pi}{2} = 7,85\dots$) mais ces deux réels sont deux mesures distinctes d'un même angle. Dit autrement, le réel $\frac{\pi}{2}$ n'est pas un angle mais le réel $\frac{\pi}{2}$ est une mesure parmi tant d'autres d'un certain angle orienté, le quart de tour direct. L'ensemble des mesures de cet angle est $\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots\}$.

Théorème 1. Tout angle orienté admet une et une seule mesure dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, appelée **mesure principale** de l'angle orienté.

Parmi toutes les mesures d'un angle orienté, il en est une et une seule qui appartient à $[0, 2\pi[$. Cette mesure est la **mesure principale** de cet angle orienté. Quand on dispose d'une mesure d'un angle orienté, on peut trouver sa mesure principale de manière systématique grâce à la fonction « partie entière » (voir le chapitre « fonctions de référence »). Pour l'instant, contentons nous de « bricolages ».

Exercice 1. Trouver la mesure principale d'un angle de mesure 1) $\frac{71\pi}{4}$, 2) $-\frac{17\pi}{3}$.

Solution 1.

$$1) 0 \leq \frac{71\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{71\pi}{4} \leq 2k\pi < -\frac{71\pi}{4} + 2\pi \Leftrightarrow -\frac{71}{8} \leq k < -\frac{71}{8} + 1 \Leftrightarrow k = -8.$$

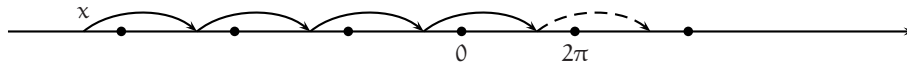
Puisque $\frac{71\pi}{4} - 8 \times 2\pi = \frac{7\pi}{4}$, la mesure principale d'un angle de mesure $\frac{71\pi}{4}$ est $\frac{7\pi}{4}$.

$$2) 0 \leq -\frac{17\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi \Leftrightarrow \frac{17\pi}{3} \leq 2k\pi < \frac{17\pi}{3} + 2\pi \Leftrightarrow \frac{17}{6} \leq k < \frac{17}{6} + 1 \Leftrightarrow k = 3.$$

Puisque $-\frac{17\pi}{3} + 3 \times 2\pi = \frac{\pi}{3}$, la mesure principale d'un angle de mesure $-\frac{17\pi}{3}$ est $\frac{\pi}{3}$.

⇒ **Commentaire.**

◇ L'existence et l'unicité de la mesure principale d'un angle de mesure x peut se comprendre sur le schéma suivant :



On part de x et on se dirige vers l'intervalle $]0, 2\pi[$ en faisant des pas de longueur 2π . Quand on arrive juste en dessous de 0 (ou juste au-dessus de 2π si on est parti d'un $x \geq 2\pi$), le pas suivant est suffisamment long pour nous faire dépasser 0, mais trop court pour nous faire dépasser 2π et on tombe donc dans l'intervalle $]0, 2\pi[$. Puis, si on effectue encore un pas, on ressort forcément de cet intervalle.

◇ Pour trouver la mesure principale d'un angle de mesure $\frac{71\pi}{4}$, nous avons cherché un nombre de tours à retrancher à $\frac{71\pi}{4}$ pour tomber dans l'intervalle $]0, 2\pi[$ ($\frac{71\pi}{4}$ n'étant clairement pas un nombre entier de tours). Puisque $\frac{\pi}{4}$ est un huitième de tours ou encore, puisque $2\pi = 8 \times \frac{\pi}{4}$, nous avons cherché « le plus grand multiple de 8 qui rentrait dans 71 ». En clair, nous avons effectué la division euclidienne de 71 par 8 : $71 = 64 + 7 = 8 \times 8 + 7$, et en retranchant 8 tours à $\frac{71\pi}{4}$, la mesure obtenue est dans $]0, 2\pi[$.

◇ Les considérations précédentes montrent que le travail à effectuer nécessite des connaissances en arithmétique (ou des connaissances sur la partie entière d'un réel) et nous attendrons donc de les avoir pour mettre ce travail définitivement au point.

◇ La notion de mesure principale est subjective. Il n'y a à priori aucune raison de distinguer telle mesure plutôt que telle autre. Nous avons choisi de privilégier la mesure élément de $]0, 2\pi[$, parce que cette mesure donne systématiquement la longueur de l'arc de cercle correspondant. Nous aurions tout aussi bien pu choisir comme mesure principale, celle des mesures qui est dans $]-\pi, \pi]$, en ayant cette fois-ci en ligne de mire la parité des fonctions sinus et cosinus.

2 Les lignes trigonométriques

Pour mesurer un angle, on a mesuré une longueur sur un cercle. Mesurer des « longueurs courbes » est difficile, et on préfère de loin mesurer des lignes droites, les différentes **lignes trigonométriques** : le *sinus*, le *cosinus*, la *tangente* et la *cotangente*.

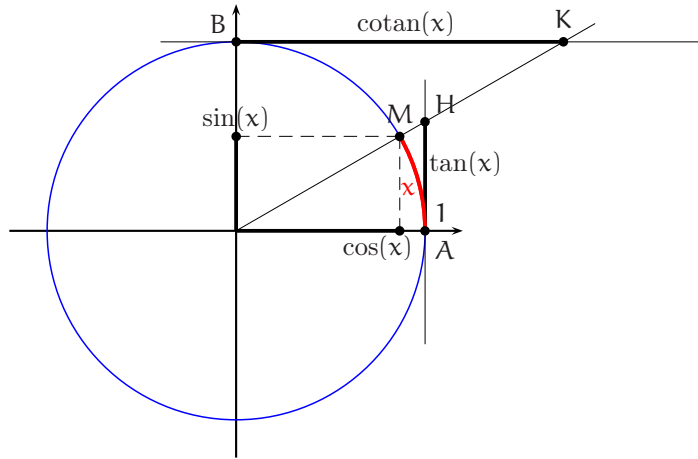
Le mot *sinus* peut prêter à confusion. Nous avons effectivement dans la partie supérieure de notre nez deux sinus. Ce sinus là vient du latin et a la même étymologie que le mot *sein* par exemple. Il signifie « pli (d'un vêtement) » ou « renflement » ou « courbure » ou « bosse ». . . Ce *sinus* est apparu au moyen-âge peu de temps avant le mot sinus de la trigonométrie.

Le mot *sinus* de la trigonométrie a une longue histoire. Il s'est appelé **jiva** en sanscrit (en 500 ap.JC environ), ce qui signifie *corde d'arc*. Il est passé à l'arabe sous la forme **jība**, mot qui n'a pas d'autre signification en arabe, et ceci grâce au mathématicien AL-FAZZARI (8ème siècle). Mais quand GÉRARD DE CRÉMONE (1114-1187) traduit AL-FAZZARI en latin, celui-ci commet une erreur de transcription et donc de traduction en transformant le mot **jība** en **jaīb**, mot qui cette fois-ci veut dire « pli (d'un vêtement) » ou « renflement ». . . Il traduit donc ce mot par *sinus*. C'est enfin REGIOMONTANUS (1436-1476) qui systématise l'emploi du mot au sens où nous le connaissons aujourd'hui et entérine ainsi l'erreur de traduction. D'ALEMBERT (1717-1783) dans son encyclopédie donne la définition suivante du mot sinus : « ligne droite tirée d'une extrémité d'un arc perpendiculairement au rayon qui passe par l'autre extrémité ». Le sinus de la trigonométrie n'a donc aucun rapport avec les sinus qui se trouvent dans la partie supérieure de notre nez.

Pour construire le mot *cosinus*, on a apposé au mot sinus le préfixe *co* qui vient de la préposition latine *cum* signifiant *avec*. Le cosinus est donc une ligne trigonométrique qui va avec le sinus ou encore qui est associée au sinus.

Signalons enfin l'étymologie du mot *trigonométrie* : du grec *tria* (trois) *gonia* (angles) *metron* (mesure) ou encore **mesure des trois angles** (d'un triangle).

2.1 Définition des lignes trigonométriques



$$\cos(x) = \text{abscisse de } M$$

$$\sin(x) = \text{ordonnée de } M$$

$$\tan(x) = \overline{AH}$$

$$\cotan(x) = \overline{BK}$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . On appelle *cercle trigonométrique* le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens direct.

On se donne un réel x . On note M le point du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

Le *cosinus* du réel x est l'abscisse du point M et le *sinus* du réel x est l'ordonnée du point M.

Ensuite, on note (T) (resp. (T')) la tangente au cercle de centre O et de rayon 1 au point A(1,0) (resp. (0,1)). Si x n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, (resp. $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), la droite (OM) n'est pas parallèle à (T) (resp. (T')). Elle coupe donc (T) (resp. (T')) en un point H (resp. K). Par définition, la *tangente* (resp. la *cotangente*) du réel x est la mesure algébrique \overline{AH} (resp. \overline{BK}) c'est-à-dire la longueur AH (resp. la longueur BK) affectée d'un signe + ou - suivant que H soit au-dessus ou au-dessous de l'axe des abscisses (resp. K soit à droite ou à gauche de l'axe des ordonnées).

Le théorème de THALES montre immédiatement que

Théorème 2.

$$\forall x \notin \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\forall x \notin \pi\mathbb{Z}, \cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$\forall x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}, \cotan(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

Ensuite, d'après le théorème de PYTHAGORE,

Théorème 3. Pour tout réel x , $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

⇒ **Commentaire.** Ce théorème fondamental permet en particulier de calculer l'une des deux lignes trigonométriques quand on connaît son signe et la valeur de l'autre ligne : $\cos(x) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(x)}$ ou $\sin(x) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(x)}$.

Théorème 4. $\forall x \in \mathbb{R}, |\cos(x)| \leq 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq 1$.

DÉMONSTRATION. $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \leq 1$, et donc $|\cos(x)| = \sqrt{\cos^2(x)} \leq \sqrt{1} = 1$, et de même pour $|\sin(x)|$. □

Théorème 5. Soient a et b deux réels. $(\exists \theta \in \mathbb{R} / a = \cos(\theta) \text{ et } b = \sin(\theta)) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$.

DÉMONSTRATION. Soient a et b deux réels. S'il existe θ tel que $\cos(\theta) = a$ et $\sin(\theta) = b$, le théorème 3 montre que $a^2 + b^2 = 1$. Réciproquement, si $a^2 + b^2 = 1$, le point M(a, b) est un point du cercle trigonométrique. Soit $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ (le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j})). On sait que le point M a pour coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ et donc que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$. □

Théorème 6.

- ❶ Pour tout réel x n'appartenant pas à $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.
- ❷ Pour tout réel x n'appartenant pas à $\pi\mathbb{Z}$, $\frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \cotan^2(x)$.

DÉMONSTRATION.

Pour $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, $\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.

Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$, $\frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = 1 + \cotan^2(x)$. □

⇒ **Commentaire.** Ces égalités jointes aux théorèmes 2 et 3 permettent de calculer les quatre lignes trigonométriques d'un angle quand on connaît leurs signes et l'une de ces quatre lignes. Par exemple, on sait maintenant exprimer $\cos(x)$ en fonction de $\sin(x)$ ($\pm\sqrt{1 - \sin^2(x)}$), ou en fonction de $\tan(x)$ ($\pm\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}$), ou en fonction de $\cotan(x)$ ($\pm\sqrt{1 - \frac{1}{1 + \cotan^2(x)}} = \dots$).

Exercice 2.

- 1) On suppose que x est un réel élément de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ tel que $\cos(x) = -\frac{4}{5}$. Calculer $\sin(x)$, $\tan(x)$ et $\cotan(x)$.
- 2) On suppose que x est un réel élément de $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\tan(x) = \frac{1}{3}$. Calculer $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\cotan(x)$.

Solution 2.

1) Puisque $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\sin(x) \geq 0$, $\tan(x) \leq 0$ et $\cotan(x) \leq 0$.

Puisque $\sin(x) \geq 0$, $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

Puis $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{3}{4}$ et $\cotan(x) = \frac{1}{\tan(x)} = -\frac{4}{3}$.

2) Puisque $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \leq 0$, $\sin(x) \leq 0$ et $\cotan(x) \geq 0$.

Puisque $\cos(x) \leq 0$, $\cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{9}}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Puis $\sin(x) = \tan(x) \cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ et $\cotan(x) = \frac{1}{\tan(x)} = 3$.

2.2 Valeurs usuelles

angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
angle en degré	0	30	45	60	90
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangente	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cotangente	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0

On note que la ligne des sinus s'écrit

$$\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{\sqrt{4}}{2}.$$

Les autres lignes s'en déduisent.

D'autre part, il est important d'avoir en tête les valeurs numériques usuelles. Un formulaire complet des valeurs numériques usuelles à connaître a déjà été fourni. Ici, on doit savoir que :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707\dots, \sqrt{2} = 1,414\dots, \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866\dots, \sqrt{3} = 1,732\dots, \text{ et } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577\dots$$

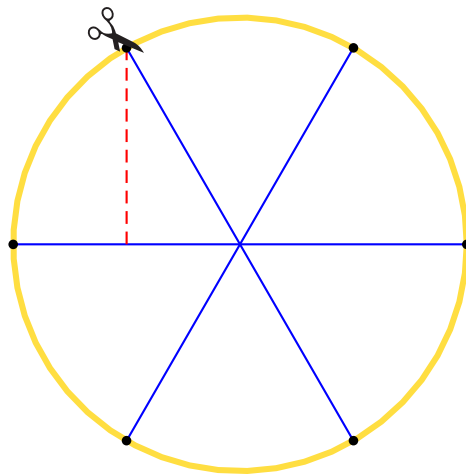
Rappelons le calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Ces nombres sont positifs et égaux. Donc, $1 = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Puis, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Notons que l'emploi de la valeur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est très fréquemment meilleur (sans

l'être systématiquement) que l'emploi de la valeur $\frac{\sqrt{2}}{2}$, car la première expression est simplifiée (par exemple, le carré de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est $\frac{1}{2}$ alors que le carré de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est $\frac{2}{4}$).

Rappelons aussi le calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Dans ce cas, le triangle (OAM) de la page 4 est équilatéral et la hauteur issue de M est encore la médiatrice du segment [O, A]. L'abscisse de M, à savoir $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, est donc $\frac{1}{2}$. Ensuite,

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ce résultat est utile pour découper une pizza en six parties égales. On visualise le **milieu** d'un rayon et on remonte perpendiculairement à ce rayon au bord de la pizza, c'est-à-dire à la croûte...(nous verrons plus tard comment découper une pizza en 5).



Profitions-en enfin pour rappeler les liens entre hauteurs et côtés dans un triangle isocèle rectangle (ou encore un demi carré) et un triangle équilatéral.

Triangle isocèle rectangle	Triangle équilatéral
$h = \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ et } a = h\sqrt{2}$	$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ainsi, la diagonale d'un carré est $\sqrt{2}$ fois son côté, et inversement le côté d'un carré est sa diagonale divisée par $\sqrt{2}$.

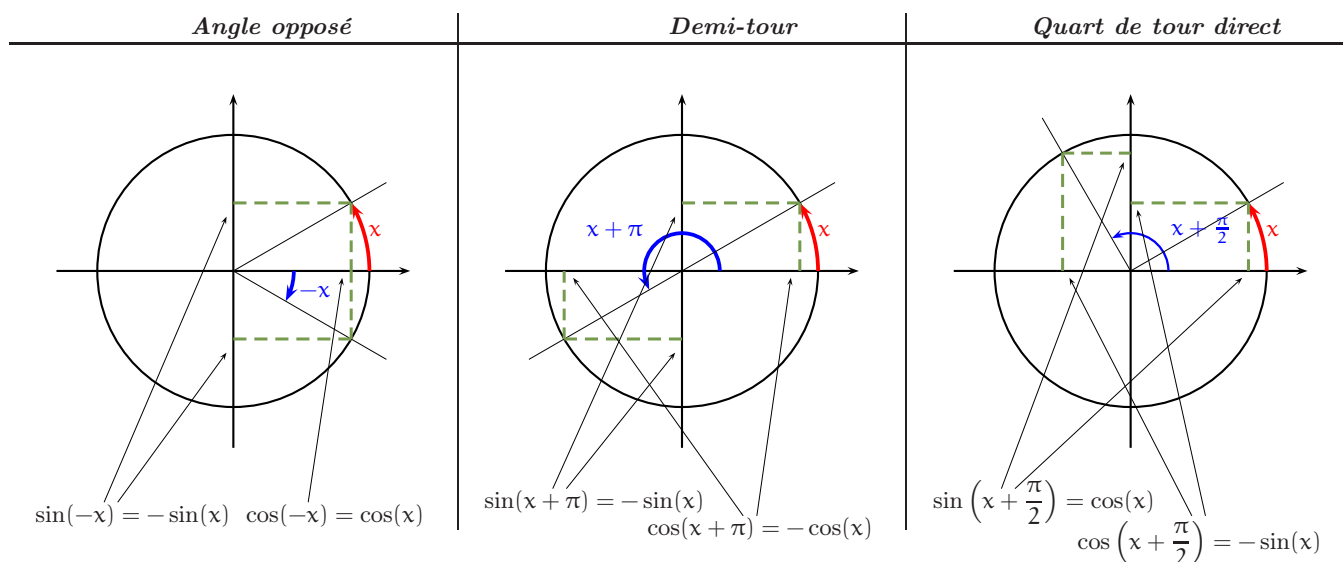
3 Formulaire de trigonométrie circulaire

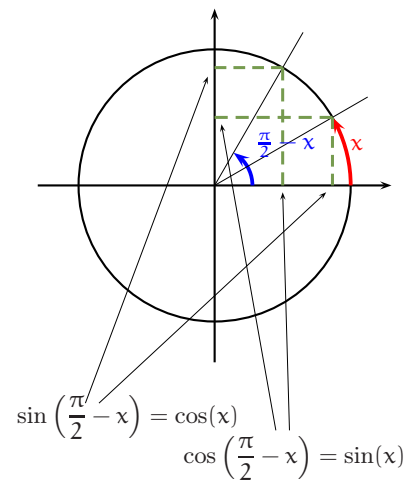
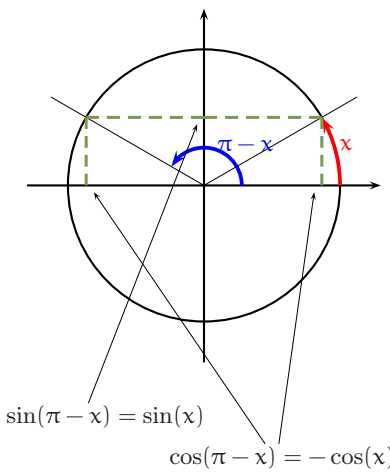
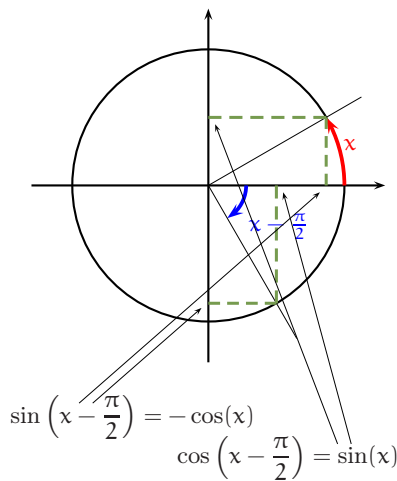
3.1 Comparaison de lignes trigonométriques

	Tour complet	
	$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ $\tan(x + 2\pi) = \tan(x)$ $\cotan(x + 2\pi) = \cotan(x)$	
Angle opposé	Demi-tour	Quart de tour direct
$\cos(-x) = \cos(x)$ $\sin(-x) = -\sin(x)$ $\tan(-x) = -\tan(x)$ $\cotan(-x) = -\cotan(x)$	$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ $\tan(x + \pi) = \tan(x)$ $\cotan(x + \pi) = \cotan(x)$	$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cotan(x)$ $\cotan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan(x)$
Quart de tour indirect	Angle supplémentaire	Angle complémentaire
$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$ $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$ $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cotan(x)$ $\cotan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\tan(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$ $\cotan(\pi - x) = -\cotan(x)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cotan(x)$ $\cotan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x)$

⇒ **Commentaire.**

◇ Toutes ces formules s'obtiennent par lecture directe d'un graphique et par exemple, il n'est pas question d'obtenir la formule $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ à partir des formules d'addition fournies plus loin : $\cos(x + \pi) = \cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi) = -\cos(x)$.





\diamond Aucune des formules ci-dessus n'a été fournie avec ses conditions de validité et **c'est un tort**. Les formules en sinus et cosinus sont valables pour tout réel x . Les formules n'utilisant que la tangente sont valables pour x n'appartenant pas à $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, celles n'utilisant que la cotangente sont valables pour x n'appartenant pas à $\pi\mathbb{Z}$ et celles utilisant à la fois la tangente et la cotangente sont valables pour x n'appartenant pas à $\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

Exercice 3. Calculer 1) $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, 2) $\tan\left(\frac{14\pi}{3}\right)$, 3) $\sin\left(-\frac{43\pi}{6}\right)$.

Solution 3.

1) $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2) $\tan\left(\frac{14\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3} + 5\pi\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

3) $\sin\left(-\frac{43\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{7\pi}{6} - 6\pi\right) = \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Exercice 4. Pour x réel et n entier relatif, simplifier 1) $\cos(x + n\pi)$, 2) $\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, 3) $\tan(x + n\pi)$.

Solution 4.

1) On ajoute (ou on retranche) n (ou $-n$) demi-tours. Si n est pair, le cosinus est inchangé et si n est impair, le cosinus est changé en son opposé. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos(x)$.

2) On ajoute (ou on retranche) n (ou $-n$) quarts de tours.

- Si n un multiple de 4, on a effectué un nombre entier de tours et le sinus est inchangé.

- Si n est 1 de plus qu'un multiple de 4, on a effectué un nombre entier de tours plus un quart de tour direct et dans ce cas, $\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$.

- Si n est 2 de plus qu'un multiple de 4, on a effectué un nombre entier de tours plus un demi-tour et dans ce cas, $\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + \pi) = -\sin(x)$.

- Si n est 3 de plus qu'un multiple de 4, on a effectué un nombre entier de tours plus trois quarts de tour direct et dans ce cas, $\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos(x)$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } n \in 4\mathbb{Z} \\ \cos(x) & \text{si } n \in 1 + 4\mathbb{Z} \\ -\sin(x) & \text{si } n \in 2 + 4\mathbb{Z} \\ -\cos(x) & \text{si } n \in 3 + 4\mathbb{Z} \end{cases}$.

3) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \forall n \in \mathbb{Z}, \tan(x + n\pi) = \tan(x)$.

⇒ **Commentaire**.

◇ On doit mémoriser certains des résultats ci-dessus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos(x), \sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin(x), \cos(n\pi) = (-1)^n, \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n.$$

◇ L'expression explicite de $\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ est aussi la dérivée n-ème de la fonction sinus.

3.2 Formules d'addition et de duplication

Théorème 7 (formules d'addition et de duplication).

Formules d'addition	Formules de duplication
$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$	$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$	$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$ $\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$	$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$

Les formules d'addition pour sinus et cosinus sont démontrées au lycée. Rappelons-en brièvement les idées. On suppose acquise l'expression du produit scalaire de deux vecteurs dans un repère orthonormal.

On se donne deux réels a et b . On note \vec{u} le vecteur de coordonnées $(\cos(a), \sin(a))$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (\vec{u} est donc le vecteur de norme 1 tel que $(\vec{i}, \vec{u}) = a [2\pi]$) et \vec{v} le vecteur de coordonnées $(\cos(b), \sin(b))$ (\vec{v} est donc le vecteur de norme 1 tel que $(\vec{i}, \vec{v}) = b [2\pi]$), alors

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

Mais on a aussi $(\vec{v}, \vec{u}) = (\vec{i}, \vec{u}) - (\vec{i}, \vec{v}) = a - b [2\pi]$ et donc

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{v}, \vec{u}) = \cos(a - b).$$

Finalement, $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

Pour $\cos(a + b)$, on remplace b par $-b$ dans la formule précédente. Pour $\sin(a + b)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \sin(a + b) &= \cos\left(a + \left(b - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos(a)\cos\left(b - \frac{\pi}{2}\right) - \sin(a)\sin\left(b - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) \\ &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a). \end{aligned}$$

Les formules de duplication (exprimant le cosinus et le sinus du double d'un angle en fonction du cosinus et du sinus de cet angle) s'en déduisent en égalant a et b . On a effectivement trois expressions différentes de $\cos(2x)$ et on doit connaître les trois. Par exemple, la dernière donne l'expression de $\cos(2x)$ en fonction de $\sin(x)$ uniquement et permet ainsi, sachant que $\sin(x) = \frac{3}{5}$, de fournir $\cos(2x) = 1 - 2 \times \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$ sans pour autant connaître x . Démontrons maintenant les formules concernant la tangente :

DÉMONSTRATION. Soient a et b deux réels tels que $a \notin \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, $b \notin \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ et $a + b \notin \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. On a alors $\cos(a) \neq 0$, $\cos(b) \neq 0$ et donc $\cos(a)\cos(b) \neq 0$. Par suite, on peut écrire :

$$\tan(a + b) = \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} = \frac{(\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b))/(\cos(a)\cos(b))}{(\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b))/(\cos(a)\cos(b))} = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

Pour $\tan(a - b)$, on remplace alors b par $-b$ dans la formule précédente, et pour $\tan(2x)$, on pose $a = b = x$ dans la formule précédente. □

⇒ **Commentaire**. On doit noter que dans la formule $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$ le signe + en numérateur provient de la formule en sinus et le signe - en dénominateur provient de la formule en cosinus.

Exercice 5.

- 1) Exprimer $\cos(3x)$ et $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.
- 2) Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$ uniquement.
- 2) Exprimer $\tan(3x)$ en fonction de $\tan(x)$ uniquement sans se poser de question d'existence.

Solution 5.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) = (2\cos^2(x) - 1)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) \\ &= (2\cos^2(x) - 1)\cos(x) - 2(1 - \cos^2(x))\cos(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x).\end{aligned}$$

Ensuite, $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos^2(x) - 1)^2 - 1 = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$, ou aussi

$$\begin{aligned}\cos(4x) &= \operatorname{Re}(e^{4ix}) = \operatorname{Re}((\cos(x) + i\sin(x))^4) = \cos^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x) \\ &= \cos^4(x) - 6\cos^2(x)(1 - \cos^2(x)) + (1 - \cos^2(x))^2 = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1.\end{aligned}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(2x + x) = \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x) = 2\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x)(1 - 2\sin^2(x)) \\ &= 2\sin(x)(1 - \sin^2(x)) + \sin(x)(1 - 2\sin^2(x)) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x).\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\tan(3x) &= \tan(2x + x) = \frac{\tan(2x) + \tan(x)}{1 - \tan(2x)\tan(x)} = \frac{\frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)} + \tan(x)}{1 - \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}\tan(x)} \\ &= \frac{2\tan(x) + \tan(x)(1 - \tan^2(x))}{(1 - \tan^2(x)) - 2\tan^2(x)} = \frac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3\tan^2(x)}.\end{aligned}$$

⇒ **Commentaire**.

◇ Les formules obtenues pour $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ doivent être mémorisées :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x), \sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x).$$

◇ La première technique utilisée ($\cos(3x) = \cos(2x + x)$) est mauvaise selon différents points de vue. Il peut paraître bizarre et inesthétique de passer par l'« angle double $2x$ » alors que l'on voudrait voir une bonne fois pour toutes l'« angle x ». On attendra le chapitre « Nombres complexes » pour avoir enfin les méthodes les plus performantes.

Exercice 6. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Solution 6.

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

et

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

⇒ **Commentaire**.

◇ Les valeurs obtenues sont si possible à mémoriser :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

◇ L'idée $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ (ou aussi $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$) apparaît beaucoup plus clairement si on pense en degrés : $\frac{\pi}{3}$ correspond à 60 degrés, $\frac{\pi}{4}$ à 45 et $\frac{\pi}{12}$ à 15 (et $60 - 45 = 15 \dots$)

3.3 Résolution d'équations trigonométriques

Résolution d'équations trigonométriques	
$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a) = \cos(b)$	$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / b = a + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / b = -a + 2k\pi)$ $\Leftrightarrow (b \in a + 2\pi\mathbb{Z}) \text{ ou } (b \in -a + 2\pi\mathbb{Z})$
$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \sin(a) = \sin(b)$	$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / b = a + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / b = \pi - a + 2k\pi)$ $\Leftrightarrow (b \in a + 2\pi\mathbb{Z}) \text{ ou } (b \in \pi - a + 2\pi\mathbb{Z})$
$\forall (a, b) \in \left(\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)\right)^2, \tan(a) = \tan(b)$	$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / b = a + k\pi)$ $\Leftrightarrow (b \in a + \pi\mathbb{Z})$
$\forall (a, b) \in (\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})^2, \cotan(a) = \cotan(b)$	$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / b = a + k\pi)$ $\Leftrightarrow (b \in a + \pi\mathbb{Z})$
$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, e^{ia} = e^{ib}$	$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / b = a + 2k\pi$ $\Leftrightarrow b \in a + 2\pi\mathbb{Z}$
$\forall a \in \mathbb{R}, e^{ia} = 1$	$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / a = 2k\pi$ $\Leftrightarrow a \in 2\pi\mathbb{Z}$.

⇒ **Commentaire**. Pour chacun des six types d'équation envisagés, une simple lecture du cercle trigonométrique suffit pour se convaincre du résultat.

Exercice 7. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- 1) $\sin(x) = 0$, 2) $\sin(x) = 1$, 3) $\sin(x) = -1$, 4) $\cos(x) = 1$ 5) $\cos(x) = -1$, 6) $\cos(x) = 0$,
7) $\tan(x) = 0$, 8) $\cotan(x) = 0$.

Solution 7.

- | | |
|--|---|
| 1) $(\forall x \in \mathbb{R}), \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = k\pi,$ | $(\forall x \in \mathbb{R}), \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}.$ |
| 2) $(\forall x \in \mathbb{R}), \sin(x) = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$ | $(\forall x \in \mathbb{R}), \sin(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}.$ |
| 3) $(\forall x \in \mathbb{R}), \sin(x) = -1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,$ | $(\forall x \in \mathbb{R}), \sin(x) = -1 \Leftrightarrow x \in -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}.$ |
| 4) $(\forall x \in \mathbb{R}), \cos(x) = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = 2k\pi,$ | $(\forall x \in \mathbb{R}), \cos(x) = 1 \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbb{Z}.$ |
| 5) $(\forall x \in \mathbb{R}), \cos(x) = -1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = \pi + 2k\pi,$ | $(\forall x \in \mathbb{R}), \cos(x) = -1 \Leftrightarrow x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}.$ |
| 6) $(\forall x \in \mathbb{R}), \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$ | $(\forall x \in \mathbb{R}), \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$ |
| 7) $(\forall x \in \mathbb{R}), \tan(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = k\pi,$ | $(\forall x \in \mathbb{R}), \tan(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}.$ |
| 8) $(\forall x \in \mathbb{R}), \cotan(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$ | $(\forall x \in \mathbb{R}), \cotan(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$ |

⇒ **Commentaire**.

◇ Pour chaque résolution, on a donné deux rédactions possibles. La deuxième est plus performante et la première est plus compréhensible et plus facile à maîtriser.

◇ Chacune de ces équations peut être résolue grâce à l'encadré précédent. Par exemple, $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(0) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / x = 0 + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / x = \pi - 0 + 2k\pi) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / x = k\pi)$. Néanmoins, ce n'est pas ainsi que l'on a pensé la résolution. On a placé sur un cercle trigonométrique (au brouillon) tous les « points solutions », c'est-à-dire les points du cercle trigonométrique dont l'ordonnée vaut 0. Puis, on a fourni toutes les mesures des angles correspondants et obtenu l'ensemble $2\pi\mathbb{Z} \cup (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$. Cet ensemble est en fait l'ensemble des multiples de π , le demi-tour, ou encore l'ensemble $\pi\mathbb{Z}$.

◇ Vous devez considérer toutes les équations précédentes comme du cours à connaître par cœur.

◇ Une équation du type $\tan(x) = a$ (ou $\cotan(x) = a$) est bien plus simple à résoudre qu'une équation du type $\cos(x) = a$ ou $\sin(x) = a$. L'équation $\tan(x) = a$ a toujours une infinité de solutions et si x_0 est l'une d'entre elles, alors l'ensemble des solutions est $x_0 + \pi\mathbb{Z}$. Plus précisément, l'équation $\tan(x) = a$ admet une et une seule solution dans tout intervalle de longueur π fermé à gauche et ouvert à droite.

Exercice 8. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1) $\sin(x) = \frac{1}{2}$, 2) $\cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, 3) $\tan(x) = 1$, 4) $\cotan(x) = -\sqrt{3}$.

Solution 8.

1) $(\forall x \in \mathbb{R}), \sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$.
2) $(\forall x \in \mathbb{R}), \cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$.
3) $(\forall x \in \mathbb{R}), \tan(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right)$.
4) $(\forall x \in \mathbb{R}), \cotan(x) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

Exercice 9. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1) $\sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 2) $\sin(2x) = \sin(3x)$, 3) $\sin(2x) = \cos(3x)$, 4) $\cos(2x) = \cos^2(x)$.

Solution 9. On note \mathcal{S} l'ensemble des solutions de l'équation proposée.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

Donc, $\mathcal{S} = \left(-\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sin(2x) = \sin(3x) &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / 3x = 2x + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / 3x = \pi - 2x + 2k\pi) \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / x = 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}). \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = 2\pi\mathbb{Z} \cup \left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\mathbb{Z}\right)$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sin(2x) = \cos(3x) &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos(3x) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / 3x = 2x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} / 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}). \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \left(\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$.

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cos(2x) = \cos^2(x) \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$.

Donc, $\mathcal{S} = \pi\mathbb{Z}$.

⇒ **Commentaire.**

◇ En 3), il fallait se ramener à l'une des deux situations de base $\sin(a) = \sin(b)$ ou $\cos(a) = \cos(b)$. Nous avons choisi la deuxième. Il fallait donc « transformer un sinus en cosinus ». La manière la plus naturelle d'agir est le passage au complémentaire $X \mapsto \frac{\pi}{2} - X$ qui échange les rôles de sinus et cosinus sans problèmes de signes.

◇ En 4), nous avons deux possibilités, « tout écrire en $2x$ », ce que nous avons fait, ou tout écrire en x : $\cos(2x) = \cos^2(x) \Leftrightarrow 2\cos^2(x) - 1 = \cos^2(x) \Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 \Leftrightarrow |\cos(x)| = 1 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$.

3.4 Formules de linéarisation

Formules de linéarisation	
$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$	$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$
$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$	$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$
$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$	$\sin(x) \cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$
$\sin(b) \cos(a) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$	

DÉMONSTRATION. On a $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$. En additionnant membre à membre ces égalités on obtient $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a-b) + \cos(a+b)$ et en retranchant on obtient $2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$.

De même, les égalités $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ et $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$ fournissent $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$ et $2\sin(b)\cos(a) = \sin(a+b) - \sin(a-b)$. \square

Exercice 10. Dériver quatre fois les fonctions

1) $f_1 : x \mapsto \cos^2(x) \sin(x)$, 2) $f_2 : x \mapsto \cos^4(x)$, 3) $f_3 : x \mapsto \cos^4(x) + \sin^4(x)$.

Solution 10.

1) Pour x réel, $\cos^2(x) \sin(x) = \cos(x) \cos(x) \sin(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) \cos(x) = \frac{1}{4}(\sin(3x) + \sin(x))$.

Par suite, f_1 est quatre fois dérivable sur \mathbb{R} et, pour x réel, $f_1^{(4)}(x) = \frac{1}{4}(81 \sin(3x) + \sin(x))$.

2) Pour x réel,

$$\begin{aligned} \cos^4(x) &= (\cos^2(x))^2 = \frac{1}{4}(1 + \cos(2x))^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)) = \frac{1}{4}(1 + 2\cos(2x) + \frac{1}{2}(1 + \cos(4x))) \\ &= \frac{1}{8}(3 + 4\cos(2x) + \cos(4x)). \end{aligned}$$

Par suite, f_2 est quatre fois dérivable sur \mathbb{R} et, pour x réel, $f_2^{(4)}(x) = \frac{1}{3}(2^6 \cos(2x) + 2^8 \cos(4x)) = 8\cos(2x) + 32\cos(4x)$.

3) $\cos^4(x) + \sin^4(x) = (\cos^2(x) + \sin^2(x))^2 - 2\sin^2(x)\cos^2(x) = 1 - 2\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1 - \cos(4x)}{2} = \frac{1}{4}(3 + \cos(4x))$.

Par suite, f_3 est quatre fois dérivable sur \mathbb{R} et, pour x réel, $f_3^{(4)}(x) = \frac{1}{4}(4^4 \cos(4x)) = 64\cos(4x)$.

\Rightarrow **Commentaire.**

\diamond Il est beaucoup plus facile de dériver (ou d'intégrer) des sommes que des produits. Quand on doit dériver de nombreuses fois un produit, on le transforme d'abord en une somme ou encore on **linéarise** à l'aide de formules de... linéarisation.

\diamond Dériver une fois les fonctions sinus ou cosinus consiste à « effectuer un quart de tour direct » (voir le chapitre « fonctions de référence ») et donc, quand on dérive 4 fois, on est revenu au point de départ :

$$\cos^{(4)} = \cos \text{ et } \sin^{(4)} = \sin.$$

\diamond En 1), on pouvait aussi écrire $\cos^2(x) \sin(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \sin(x) = \frac{1}{2}(\sin(x) + \sin(x) \cos(2x)) = \frac{1}{2}(\sin(x) + \frac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x))) = \frac{1}{4}(\sin(3x) + \sin(x))$.

3.5 Formules de factorisation

Formules de factorisation	
$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$	$1 + \cos(x) = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$
$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$	$1 - \cos(x) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$
$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$	
$\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$	

DÉMONSTRATION . On inverse les formules de linéarisation en changeant de plus les notations. On pose $p = a + b$ et $q = a - b$ de sorte que $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$ (obtenu en ajoutant et en retranchant membre à membre les deux égalités). L'égalité $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos(a) \cos(b)$ s'écrit alors $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et l'égalité $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin(a) \sin(b)$ s'écrit $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$. On fait de même pour les sinus. \square

Exercice 11. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$.

Solution 11. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin(x) + \sin(3x) = 2 \sin(2x) \cos(x)$ et donc

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 2 \sin(2x) \cos(x) + \sin(2x) = \sin(2x)(2 \cos(x) + 1).$$

Par suite,

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0 \Leftrightarrow (\sin(2x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = -\frac{1}{2}) \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right).$$

\Rightarrow **Commentaire .**

\diamond Pour résoudre des équations dont le second membre est 0 ou étudier des signes, on doit la plupart du temps factoriser et donc utiliser ... des formules de factorisation.

\diamond D'autre part, dans une suite arithmétique ayant un nombre impair de termes (ici x , $2x$, $3x$), il est toujours préférable de privilégier le terme médian (ici $2x$). Regrouper $\sin(x)$ et $\sin(3x)$ en laissant $\sin(2x)$ tout seul était donc sûrement plus prometteur que de regrouper $\sin(x)$ et $\sin(2x)$ par exemple.

3.6 Expressions de $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ en fonction de $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Pour x réel n'appartenant pas à $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$, on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Alors,

Théorème 8.

- ❶ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z}), \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},$
- ❷ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z}), \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2},$
- ❸ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup (\pi + 2\pi\mathbb{Z}), \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2},$

DÉMONSTRATION .

$$\text{❶ Pour } x \notin (\pi + 2\pi\mathbb{Z}), \cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) / \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) / \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

$$\text{❷ Pour } x \notin (\pi + 2\pi\mathbb{Z}), \sin(x) = \frac{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) / \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) / \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

⊛ Pour $x \notin \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

□

⇒ **Commentaire**.

◇ Dans la pratique de maths sup, ces formules ne servent pas avant le chapitre « calculs d'intégrales ». Le moment venu, elles permettront d'effectuer des changements de variables intéressants dans certaines intégrales.

◇ Néanmoins, si on doit faire face à une équation où apparaissent les expressions $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$, expressions qui peuvent être vécues comme trois inconnues différentes, une idée de résolution peut être de « tout passer en $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ », de sorte qu'il n'y a plus qu'une inconnue : le réel t .

3.7 Transformation de $a \cos(x) + b \sin(x)$

On se donne deux réels a et b , l'un au moins de ces deux réels étant non nul. On considère l'expression $f(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$. Dans cette expression, la variable apparaît deux fois ce qui rend délicat la résolution de l'équation $f(x) = 0$ ou l'étude des variations. On veut trouver une écriture de $f(x)$ où la variable n'apparaît qu'une fois. On a en ligne de mire la formule

$$\cos(A) \cos(B) + \sin(A) \sin(B) = \cos(A - B).$$

On fait apparaître devant $\cos(x)$ et $\sin(x)$ le cosinus et le sinus d'un angle en se servant du théorème 5 page 4. Les deux nombres a et b n'ont aucune raison d'être le cosinus et le sinus d'un angle. Mais si on norme le vecteur $\vec{u}(a, b)$ en le divisant par sa norme $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$, les deux nombres obtenus $a' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $b' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ vérifient bien sûr

$$a'^2 + b'^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} = 1.$$

Le théorème 5 page 4 permet alors d'affirmer l'existence d'un réel θ tel que $\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Pour x réel, on peut écrire

$$\begin{aligned} a \cos(x) + b \sin(x) &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \times \cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \times \sin(x) \right) = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos(x) \cos(\theta) + \sin(x) \sin(\theta)) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \theta). \end{aligned}$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
 $\forall x \in \mathbb{R}$, $a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \theta)$,
où θ est un réel tel que $\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Exercice 12. Résoudre dans \mathbb{R} les équations **1)** $\cos(x) + \sin(x) = 1$, **2)** $\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) = 3$.

Solution 12.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \cos(x) + \sin(x) = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right)\right) \text{ ou } \left(x - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right)\right) \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbb{Z} \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\right). \end{aligned}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x) - \frac{1}{2} \sin(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$.

Cette équation n'a pas de solution car $\frac{3}{2} > 1$.

⇒ **Commentaire.** Il était tout aussi valable d'écrire $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(x) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ou aussi $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x) - \frac{1}{2} \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

Exercice 13. Trouver le minimum et le maximum de la fonction $x \mapsto 3 \cos(x) + 4 \sin(x)$.

Solution 13. Soit θ le réel élément de $[0, 2\pi]$ tel que $\cos(\theta) = \frac{3}{5}$ et $\sin(\theta) = \frac{4}{5}$ (θ existe car $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$). Alors, pour tout réel x , $3 \cos(x) + 4 \sin(x) = 5(\cos(x) \cos(\theta) + \sin(x) \sin(\theta)) = 5 \cos(x - \theta)$. Le maximum cherché vaut donc 5, atteint par exemple pour $x = \theta$. De même, le minimum vaut -5 , minimum atteint pour $x = \theta + \pi$.

4 Les fonctions circulaires

Les fonctions *sinus*, *cosinus*, *tangente* et *cotangente* sont appelées **fonctions circulaires**, car ce sont les fonctions de la trigonométrie circulaire.

4.1 Les fonctions sinus et cosinus

La fonction *sinus* est la fonction de référence en trigonométrie circulaire. Les propriétés de la fonction *sinus* sont simples, naturelles et faciles à apprendre contrairement à celles de la fonction *cosinus*. Par exemple, $\sin(0) = 0$ (alors que $\cos(0) = 1$) ou bien la fonction *sinus* est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors que la fonction *cosinus* est décroissante. Nous rappelons maintenant dans une proposition, les propriétés de la fonction sinus établies au lycée.

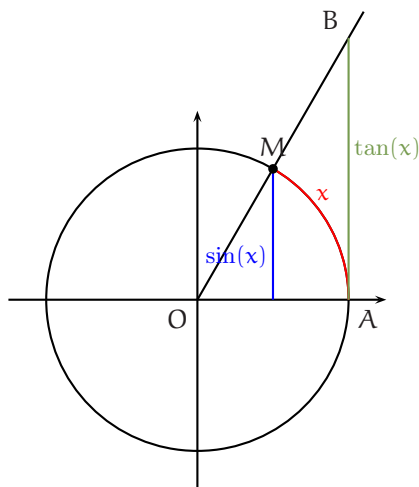
Théorème 9 (propriétés de la fonction sinus).

- ❶ La fonction sinus est définie sur \mathbb{R} et est impaire.
- ❷ La fonction sinus est 2π -périodique.
- ❸ La fonction sinus est continue et dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x , $\sin'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
- ❹ La fonction sinus est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Revenons sur le résultat $\sin' = \cos$ et démontrons-le.

Des **considérations géométriques** nous permettent d'établir que

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \sin(x) \leq x \leq \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ et donc } \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$



En effet, x est la longueur de l'arc de cercle joignant le point A au point M et comme le plus court chemin d'un point à un autre est la ligne droite, on a déjà $x \geq AM$. $\sin(x)$ est la distance de M à l'axe des abscisses et donc la plus courte distance de M à un point de l'axe des abscisses. Finalement

$$\sin(x) \leq AM \leq x.$$

D'autre part, l'aire du triangle OAB est supérieure ou égale à l'aire du secteur angulaire OAM. Ceci fournit

$$\frac{1 \times \tan(x)}{2} \geq \frac{1 \times x}{2} \text{ et donc } \tan(x) \geq x.$$

L'encadrement $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ et le théorème des gendarmes permettent alors d'affirmer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Comme la

fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est paire, on a aussi $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. On obtient ainsi une limite de référence à connaître :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Ce dernier résultat s'écrit encore $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = 1$. La fonction sinus est donc dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$. Plus généralement, donnons nous un réel x_0 . Pour $x \neq x_0$, on a

$$\frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \frac{2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{\frac{x - x_0}{2}}.$$

Quand x tend vers x_0 , le rapport $\frac{\sin((x - x_0)/2)}{(x - x_0)/2}$ tend vers 1 et si on admet que la fonction cosinus est continue en x_0 ce qui est géométriquement évident, $\cos((x + x_0)/2)$ tend vers $\cos(x_0)$. Finalement

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \cos(x_0),$$

ce qui démontre la dérivabilité de la fonction sinus en x_0 et le fait que $\sin'(x_0) = \cos(x_0)$.

⇒ **Commentaire.** Si vous devez un jour montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \leq x$ (*), il serait absurde d'écrire : posons $f(x) = x - \sin(x)$,... $f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$, f est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \geq 0$. Vous obtiendriez ainsi l'inégalité (*) comme une conséquence de l'égalité $\sin' = \cos$ alors qu'elle en est la cause.

On peut s'y prendre autrement pour étudier la dérivabilité de la fonction sinus en écrivant pour $h \neq 0$:

$$\frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0) \cos(h) + \cos(x_0) \sin(h) - \sin(x_0)}{h} = \cos(x_0) \times \frac{\sin(h)}{h} + \sin(x_0) \frac{\cos(h) - 1}{h} \quad (*).$$

On sait déjà que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$. On a alors

$$\frac{\cos(h) - 1}{h} = -\frac{2 \sin^2(h/2)}{h} = -\frac{\sin^2(h/2)}{h/2} = -\frac{h}{2} \left(\frac{\sin(h/2)}{h/2}\right)^2.$$

Comme $\frac{\sin(h/2)}{h/2}$ tend vers 1 quand h tend vers 0 et que $-\frac{h}{2}$ tend vers 0, on en déduit que

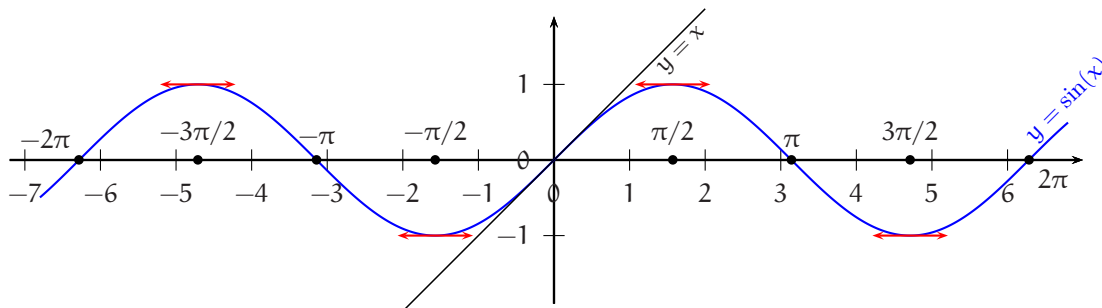
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0 \quad (**).$$

L'égalité (*) montre alors que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} = \cos(x_0)$. On a ainsi retrouvé la dérivabilité de la fonction sinus et sa dérivée sans utiliser la continuité de la fonction cosinus sur \mathbb{R} mais en utilisant (**) (qui montre aussi le fait que la fonction cosinus est dérivable en 0 et que $\cos'(0) = 0$).

Résumons le travail effectué. La fonction sinus est dérivable sur \mathbb{R} (et en particulier continue sur \mathbb{R}) et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Graphes de la fonction $x \mapsto \sin(x)$.



L'étude de la fonction cosinus se déduit de l'étude de la fonction sinus à partir de l'égalité $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ valable pour tout réel x . Cette égalité signifie que le point d'abscisse x de la courbe représentative de la fonction cosinus a même ordonnée que le point d'abscisse $x + \frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction sinus. Plus précisément, notons \vec{u} le vecteur de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ puis $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur \vec{u} . Pour x réel, on a

$$t_{\vec{u}}(x, \cos(x)) = \left(x + \frac{\pi}{2}, \cos(x)\right) = \left(x + \frac{\pi}{2}, \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = (x', \sin(x')) \text{ où } x' = x + \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, le translaté de chaque point du graphe de la fonction cosinus est un point du graphe de la fonction sinus ($t_{\vec{u}}(x, \cos(x)) = \left(x + \frac{\pi}{2}, \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$) et réciproquement tout point du graphe de la fonction sinus est le translaté d'un point du graphe de la fonction cosinus ($t_{\vec{u}}\left(x - \frac{\pi}{2}, \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = (x, \sin(x))$). Par suite, le graphe de la fonction sinus est le translaté du graphe de la fonction cosinus par la translation de vecteur $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ou encore

le graphe de la fonction cosinus est l'image du graphe de la fonction sinus par la translation de vecteur $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

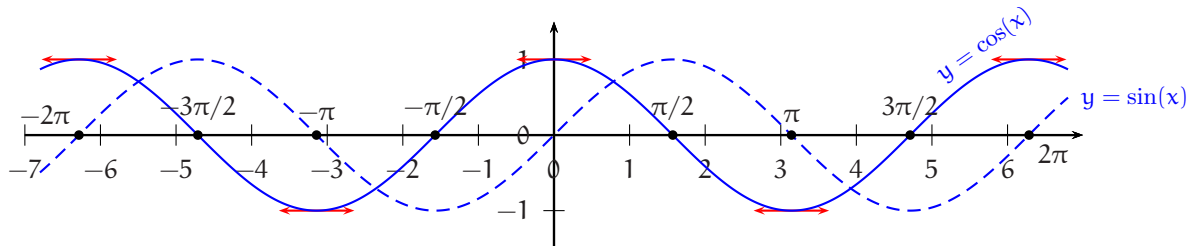
A partir de l'égalité $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, on obtient aussi la dérivabilité et la dérivée de la fonction cosinus. Le théorème de dérivation des fonctions composées montre en effet que la fonction cosinus est dérivable sur \mathbb{R} (et en particulier continue sur \mathbb{R}) et que pour tout réel x ,

$$\cos'(x) = 1 \times \sin'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x).$$

Théorème 10 (propriétés de la fonction cosinus).

- ❶ La fonction cosinus est définie sur \mathbb{R} et est paire.
- ❷ La fonction cosinus est 2π -périodique.
- ❸ La fonction cosinus est continue et dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x , $\cos'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
- ❹ La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

Graphe de la fonction $x \mapsto \cos(x)$



4.2 Les fonctions tangente et cotangente

Théorème 11 (propriétés de la fonction tangente).

- ❶ La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ et impaire.
- ❷ La fonction tangente est π -périodique.
- ❸ La fonction tangente est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ et, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$,

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

- ❹ $\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x < \pi/2}} \tan(x) = +\infty.$

- ❺ La fonction tangente est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$

- ❻ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1.$

DÉMONSTRATION .

❶ Soit $x \in \mathbb{R}$. $\tan(x)$ existe $\Leftrightarrow \cos(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

Ensuite, \tan est le quotient d'une fonction impaire et d'une fonction paire et donc \tan est une fonction impaire.

❷ Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x + \pi \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x).$$

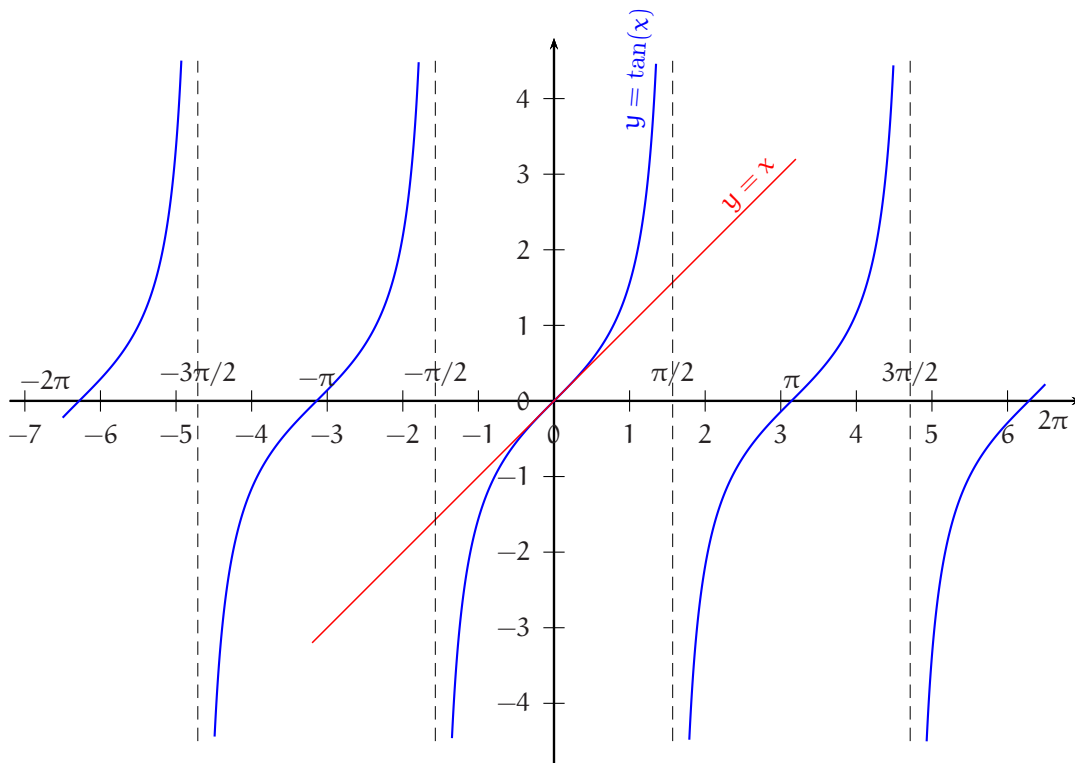
❸ La fonction \tan est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$,

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \cos'(x)\sin(x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \begin{cases} 1 + \tan^2(x) \\ \text{ou aussi} \\ \frac{1}{\cos^2(x)} \end{cases}.$$

❹ $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \sin(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \cos(x) = 0^+$. Par suite, $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \tan(x) = +\infty$.

❺ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} = \tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1.$ □

Graph de la fonction $x \mapsto \tan(x)$.



Théorème 12 (propriétés de la fonction cotangente).

- ❶ La fonction cotangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et impaire.
- ❷ La fonction cotangente est π -périodique.
- ❸ La fonction cotangente est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$,

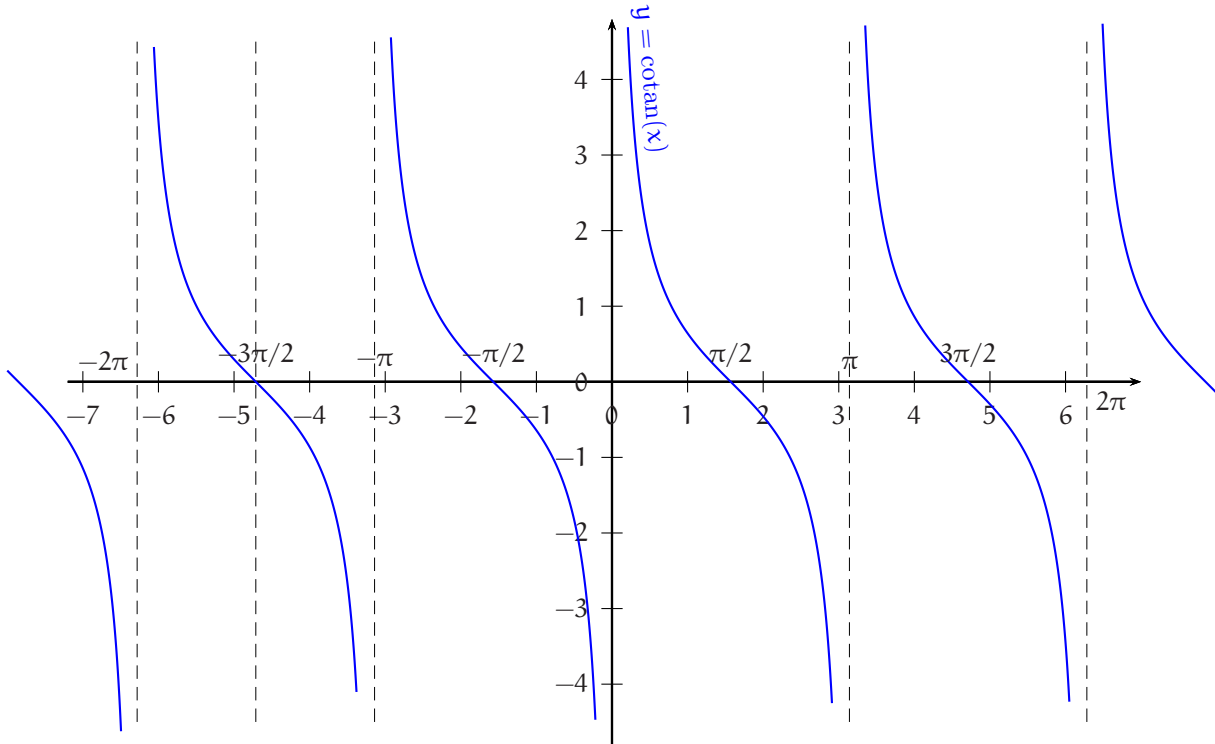
$$\cotan'(x) = -1 - \cotan^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

❹ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cotan(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \cotan(x) = -\infty$

❺ La fonction cotangente est strictement décroissante sur $]0, \pi[$.

Nous vous laissons le soin de démontrer ce théorème.

Graphes de la fonction $x \mapsto \cotan(x)$.



Exercice 14. Etude complète des fonctions : 1) $f_1 : x \mapsto \frac{2 \cos(x) - 1}{2 \sin(x) - 1}$, 2) $f_2 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)}$.

Solution 14.

1) • **Périodicité.** Soit x dans \mathbb{R} . $x \in D_{f_1} \Leftrightarrow x + 2\pi \in D_{f_1}$ et pour $x \in D_{f_1}$, $f_1(x + 2\pi) = f_1(x)$.
Donc f_1 est 2π -périodique. On étudie dorénavant f_1 sur $[-\pi, \pi]$.

• **Domaine de définition.** Soit $x \in [-\pi, \pi]$.

$$2 \sin(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Donc, $D_{f_1} \cap [-\pi, \pi] = [-\pi, \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$.

• **Etude en $\frac{\pi}{6}$.** $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} 2 \cos(x) - 1 = \sqrt{3} - 1 > 0$ puis $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{6} \\ x < \frac{\pi}{6}}} 2 \sin(x) - 1 = 0^-$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{6} \\ x > \frac{\pi}{6}}} 2 \sin(x) - 1 = 0^+$. Donc,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{6} \\ x < \frac{\pi}{6}}} f_1(x) = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{6} \\ x > \frac{\pi}{6}}} f_1(x) = +\infty.$$

• **Etude en $\frac{5\pi}{6}$.** $\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{6}^-} 2 \cos(x) - 1 = -\sqrt{3} - 1 < 0$ puis $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{5\pi}{6} \\ x < \frac{5\pi}{6}}} 2 \sin(x) - 1 = 0^+$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{5\pi}{6} \\ x > \frac{5\pi}{6}}} 2 \sin(x) - 1 = 0^-$. Donc,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{5\pi}{6} \\ x < \frac{5\pi}{6}}} f_1(x) = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{5\pi}{6} \\ x > \frac{5\pi}{6}}} f_1(x) = +\infty.$$

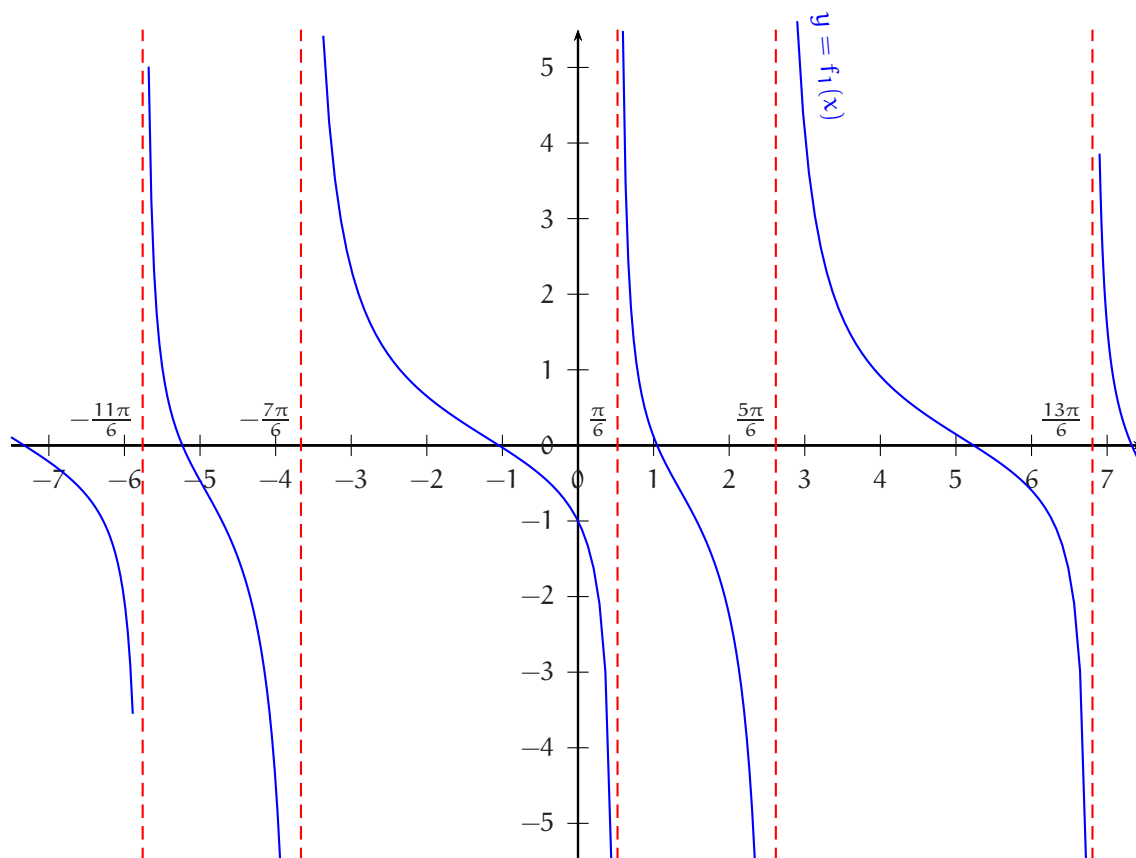
• **Dérivée.** f_1 est dérivable sur $[-\pi, \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[-\pi, \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[-\pi, \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$. De plus, pour $x \in [-\pi, \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$,

$$f_1'(x) = \frac{-2 \sin(x)(2 \sin(x) - 1) - 2 \cos(x)(2 \cos(x) - 1)}{(2 \sin(x) - 1)^2} = \frac{-4 + 2 \sin(x) + 2 \cos(x)}{(2 \sin(x) - 1)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x) - \sqrt{2} \right)}{(2 \sin(x) - 1)^2} = \frac{2\sqrt{2} \left[\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \right]}{(2 \sin(x) - 1)^2}.$$

• **Variations.** Pour $x \in [-\pi, \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$, on a $\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} < 0$ et donc $f_1'(x) < 0$. On en déduit que f_1 est strictement décroissante sur $\left[-\pi, \frac{\pi}{6} \right[$, sur $\left] \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$ et sur $\left] \frac{5\pi}{6}, \pi \right]$.

• **Graphe.**



2) • **Périodicité, parité.** Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in D_{f_2} \Leftrightarrow x + 2\pi \in D_{f_2}$ et pour $x \in D_{f_2}$,

$$f_2(x + 2\pi) = \frac{\sin(x + 2\pi)}{2 - \cos(x + 2\pi)} = \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)} = f_2(x).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in D_{f_2} \Leftrightarrow -x \in D_{f_2}$ et pour $x \in D_{f_2}$,

$$f_2(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 - \cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{2 - \cos(x)} = -f_2(x).$$

f_2 est 2π -périodique et impaire. On étudie dorénavant f_2 sur $[0, \pi]$.

• **Domaine de définition.** Soit $x \in [0, \pi]$. On a $2 - \cos(x) > 0$ et donc $f_2(x)$ existe. Par suite, $D_{f_2} \cap [0, \pi] = [0, \pi]$.

• **Dérivée.** f_2 est dérivable sur $[0, \pi]$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0, \pi]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, \pi]$ et pour $x \in [0, \pi]$

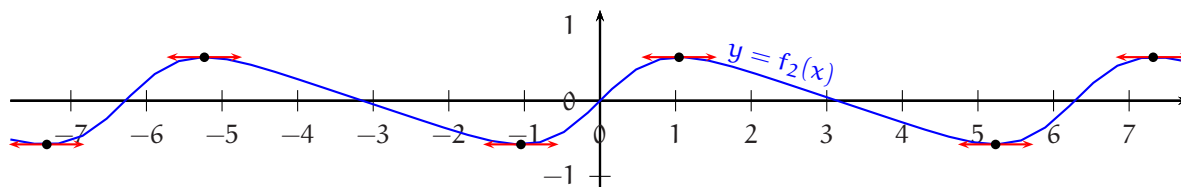
$$f_2'(x) = \frac{\cos(x)(2 - \cos(x)) - \sin(x)(\sin(x))}{(2 - \cos(x))^2} = \frac{2 \cos(x) - 1}{(2 - \cos(x))^2}.$$

• **Variations.** Soit $x \in [0, \pi]$.

$$2 \cos(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left] 0, \frac{\pi}{3} \right[,$$

et $2 \cos(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$. Ainsi, f_2' est strictement positive sur $\left] 0, \frac{\pi}{3} \right[$, strictement négative sur $\left] \frac{\pi}{3}, \pi \right]$ et s'annule en $\frac{\pi}{3}$. f_2 est donc strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3} \right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi \right]$.

• **Graphe.**



⇒ **Commentaire.** Pour étudier le signe de f_1' , on a transformé l'expression $\cos(x) + \sin(x)$ en $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ comme nous avons appris à le faire de manière générale dans le chapitre « trigonométrie » (transformation de $a \cos(x) + b \sin(x)$). L'idée sous-jacente est toujours la même : on veut que la variable x n'apparaisse qu'une seule fois.