Planche n° 3. Révisions. Matrices. Corrigé

Exercice n° 1

1) u est dans L(E) car u est linéaire et si P est un polynôme de degré au plus n alors $u(P)$ est un polynôme de degré au plus n.
• Les polynômes constants sont dans $\text{Ker}(u)$. Réciproquement , soit P un élément de $\text{Ker}(u)$ puis $Q = P - P(0)$.
Par hypothèse, $P(0) = P(1) = P(2) = \ldots$ et donc 0, 1, 2, ... sont des racines de Q. Puisque le polynôme Q admet une infinité de racines, Q est nul et donc $P = P(0)$ et $P \in \mathbb{K}_0[X]$. Ainsi, $\text{Ker}(u) = \mathbb{K}_0[X]$.

• Mais alors, d'après le théorème du rang, $\text{rg}u = (n+1) - 1 = n$. D'autre part, si P est dans $\mathbb{K}_n[X]$, $P(X+1) - P$ est dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ (si on pose $P = a_nX^n + \ldots$, le coefficient de X^n dans $u(P)$ est $a_n - a_n = 0$).
En résumé, $\text{Im}(u) \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\dim\text{Im}(u) = \dim\mathbb{K}_{n-1}[X] < +\infty$ et donc $\text{Im}(u) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

$$\boxed{\text{Ker}(u) = \mathbb{K}_0[X] \text{ et } \text{Im}(u) = \mathbb{K}_{n-1}[X].}$$

2) On part de $P_0 = 1$ et aussi de $P_1 = X$ qui vérifient bien $u(P_0) = 0$ et $u(P_1) = P_0$.

Trouvons $P_2 = aX^2 + bX$ tel que $u(P_2) = P_1$ (il est clair que si $\deg(P) \geqslant 1$, $\deg(u(P)) = \deg(P) - 1$ et d'autre part, les constantes sont inutiles car $\text{Ker}(u) = \mathbb{K}_0[X]$).

$$u(P_2) = P_1 \Leftrightarrow a(X+1)^2 + b(X+1) - aX^2 - bX = X \Leftrightarrow (2a-1)X + a + b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -a.$$

On prend $P_2 = \frac{1}{2}(X^2 - X) = \frac{1}{2}X(X-1)$.

Trouvons $P_3 = aX^3 + bX^2 + cX$ tel que $u(P_3) = P_2$.

$$\begin{aligned} u(P_3) = P_2 &\Leftrightarrow a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) - aX^3 - bX^2 - cX = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X \\ &\Leftrightarrow \left(3a - \frac{1}{2}\right)X^2 + \left(3a + 2b - \frac{1}{2}\right)X + a + b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{6} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

On prend $P_3 = \frac{1}{6}(X^3 - 3X^2 + 2X) = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2)$.

Essayons, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $P_k = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$\begin{aligned} u(P_{k+1}) &= \frac{1}{(k+1)!}\prod_{i=0}^{k}(X+1-i) - \frac{1}{(k+1)!}\prod_{i=0}^{k}(X-i) = \frac{1}{(k+1)!}((X+1) - (X-k))\prod_{i=0}^{k-1}(X-i) \\ &= \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i) = P_k. \end{aligned}$$

Enfin, les P_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, constituent une famille de $n+1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ polynômes de degrés échelonnés de $\mathbb{K}_n[X]$ et donc la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Dans cette base, la matrice de u a la forme désirée.

Exercice n° 2

(C'est en fait un exercice sur les polynômes de Tchebychev de 1ère espèce et vous pouvez généraliser cet exercice en passant au format n au lieu du format 4.)
Si on note C_j, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, la j-ème colonne de A alors $C_j = (\cos(i + j - 2)a)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ puis pour j élément de $\{1, 2\}$,

$$C_{j+2} + C_j = (2\cos(i + j - 1)a\cos a)_{1 \leqslant i \leqslant 4} = 2\cos a C_{j+1}$$

et donc $C_3 = 2\cos a C_2 - C_1 \in \text{Vect}(C_1, C_2)$ et $C_4 = 2\cos a C_3 - C_2 \in \text{Vect}(C_2, C_3) \subset \text{Vect}(C_1, C_2)$.
Donc $\text{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \text{Vect}(C_1, C_2)$ et $\text{rg}A = \text{rg}(C_1, C_2) \leqslant 2$.
Enfin $\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) \\ \cos(a) & \cos(2a) \end{vmatrix} = \cos(2a) - \cos^2 a = \cos^2 a - 1 = -\sin^2 a$.
• Si a n'est pas dans $\pi\mathbb{Z}$, ce déterminant n'est pas nul et donc les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires. Dans ce cas, $\text{rg}A = 2$.
• Si a est dans $\pi\mathbb{Z}$, la première colonne n'est pas nulle et les autres colonnes lui sont colinéaires. Dans ce cas, $\text{rg}A = 1$.

$$\boxed{\text{rg}(A) = 2 \text{ si } a \notin \pi\mathbb{Z} \text{ et } \text{rg}(A) = 1 \text{ si } a \in \pi\mathbb{Z}.}$$

Exercice n° 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + N \text{ où } N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

N est nilpotente et donc $N^n = 0$. Par suite,

$$I = I - (-N)^n = (I + N)\left(I - N + \ldots + (-N)^{n-1}\right).$$

Ainsi A est inversible à gauche et donc inversible, d'inverse $I - N + \ldots + (-N)^{n-1}$.

Calcul de N^p pour $1 \leqslant p \leqslant n$.

$$N^2 = \left(\sum_{j=2}^{n} jE_{j-1,j}\right)^2 = \sum_{2 \leqslant j,k \leqslant n} jkE_{j-1,j}E_{k-1,k} = \sum_{j=2}^{n-1} j(j+1)E_{j-1,j}E_{j,j+1} = \sum_{j=3}^{n} j(j-1)E_{j-2,j}.$$

c'est-à-dire $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\times 3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3\times 4 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & (n-1)n \\ \vdots & & & & & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ensuite, $N^3 = \left(\displaystyle\sum_{j=3}^{n} j(j-1)jE_{j-2,j}\right)\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} kE_{k-1,k}\right) = \displaystyle\sum_{j=4}^{n} j(j-1)(j-2)E_{j-3,j}$.

Supposons que pour p donné dans $[\![1, n-1]\!]$, $N^p = \displaystyle\sum_{j=p+1}^{n} j(j-1)\ldots(j-p+1)E_{j-p,j}$.

Alors $N^{p+1} = \left(\displaystyle\sum_{j=p+1}^{n} j(j-1)\ldots(j-p+1)E_{j-p,j}\right)\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} kE_{k-1,k}\right) = \displaystyle\sum_{j=p+2}^{n} j(j-1)\ldots(j-p)E_{j-p-1,j}$. Ainsi

$$\boxed{A^{-1} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \text{ où } a_{i,j} = 0 \text{ si } i > j,\ 1 \text{ si } i = j \text{ et } (-1)^{i+j-2}\prod_{k=0}^{j-i-1}(j-k) \text{ sinon.}}$$

Exercice n° 4

On note $\mathscr{B} = (E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$\text{Tr}(f) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_{i,j}$ où $\alpha_{i,j}$ désigne la (i,j)-ème coordonnée de $f(E_{i,j}) = AE_{i,j} + E_{i,j}A$ dans la base $\mathscr{B}$.

Mais pour $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ donné,

$$AE_{i,j} = \sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} a_{k,l}E_{k,l}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}$$

et de même,

$$E_{i,j}A = \sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} a_{k,l}E_{i,j}E_{k,l} = \sum_{l=1}^{n} a_{j,l}E_{i,l}.$$

Donc $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\alpha_{i,j} = a_{i,i} + a_{j,j}$ puis

$$\mathrm{Tr}(f)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_{i,i}+a_{j,j})=2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{i,i}=2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}\right)=2\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Tr}(A)=2n\mathrm{Tr}(A).$$

$$\boxed{\mathrm{Tr}(f)=2n\mathrm{Tr}(A).}$$

Exercice n° 5

Si M est solution, nécessairement $a\mathrm{Tr}(M)+(\mathrm{Tr}(M))(\mathrm{Tr}(A))=\mathrm{Tr}(B)$ ou encore $(\mathrm{Tr}(M))(a+\mathrm{Tr}(A))=\mathrm{Tr}(B)$.

1er cas. Si $\mathrm{Tr}(A)\neq -a$ alors nécessairement $\mathrm{Tr}(M)=\dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{a+\mathrm{Tr}(A)}$ puis $M=\dfrac{1}{a}\left(B-\dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{a+\mathrm{Tr}(A)}A\right)$.

Réciproquement, si $M=\dfrac{1}{a}\left(B-\dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{a+\mathrm{Tr}(A)}A\right)$ alors

$$aM+(\mathrm{Tr}(M))A=B-\frac{\mathrm{Tr}(B)}{a+\mathrm{Tr}(A)}A+\frac{1}{a}\left(\mathrm{Tr}(B)-\frac{\mathrm{Tr}(B)}{a+\mathrm{Tr}(A)}\mathrm{Tr}(A)\right)A=B.$$

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{Tr}A\neq -a,\ \mathscr{S}=\left\{\frac{1}{a}\left(B-\frac{\mathrm{Tr}(B)}{a+\mathrm{Tr}(A)}A\right)\right\}.}$$

2ème cas. Si $\mathrm{Tr}(A)=-a$ et $\mathrm{Tr}(B)\neq 0$, il n'y a pas de solution .

3ème cas. Si $\mathrm{Tr}(A)=-a$ et $\mathrm{Tr}(B)=0$, M est nécessairement de la forme $\dfrac{1}{a}B+\lambda A$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

Réciproquement, soient $\lambda\in\mathbb{R}$ puis $M=\dfrac{1}{a}B+\lambda A$. Alors

$$aM+(\mathrm{Tr}(M))A=B+a\lambda A+\left(\frac{1}{a}\mathrm{Tr}(B)+\lambda\mathrm{Tr}(A)\right)A=B+a\lambda A-a\lambda A=B,$$

et toute matrice de la forme $B+\lambda A$, $\lambda\in\mathbb{R}$, est solution.

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{Tr}A=-a,\ \mathscr{S}=\varnothing \text{ si } \mathrm{Tr}(B)\neq 0 \text{ et } \mathscr{S}=\{B+\lambda A,\ \lambda\in\mathbb{R}\} \text{ si } \mathrm{Tr}(B)=0.}$$

Exercice n° 6

Pour $j\in[\![1,n]\!]$, notons C_j la j-ème colonne de la matrice A. Posons encore $U=\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix}2\\3\\\vdots\\n+1\end{pmatrix}$. Pour $j\in[\![1,n]\!]$, on a

$$C_j=(i+j(i+1))_{1\leqslant i\leqslant n}=(i)_{1\leqslant i\leqslant n}+j(i+1)_{1\leqslant i\leqslant n}=U+jV.$$

Donc $\mathrm{Vect}(C_1,...,C_n)\subset\mathrm{Vect}(U,V)$ et en particulier, $\mathrm{rg}(A)\leqslant 2$. Maintenant, si $n\geqslant 2$, les deux premières colonnes de A ne sont pas colinéaires car $\begin{vmatrix}3&5\\5&8\end{vmatrix}=-1\neq 0$. Donc, si $n\geqslant 2$, $\mathrm{rg}(A)=2$ et si $n=1$, $\mathrm{rg}A=1$.

$$\boxed{\text{Si } n\geqslant 2,\ \mathrm{rg}(i+j+ij)_{1\leqslant i,j\leqslant n}=2 \text{ et si } n=1,\ \mathrm{rg}(i+j+ij)_{1\leqslant i,j\leqslant n}=1.}$$

Exercice n° 7

1) $E=\mathrm{Vect}(I,J)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension inférieure ou égale à 2. De plus, la famille (I,J) est libre car la matrice J n'est pas une matrice scalaire et donc $\dim(E)=2$.

2) Puisque $(E,+,.)$ est un espace vectoriel, $(E,+)$ est un groupe commutatif.

Ensuite, $I^2=I\in E$, $IJ=JI=J\in E$ et $J^2=(I+E_{1,2})^2=I+2E_{1,2}=I+2(J-I)=2J-I\in E$. Par bilinéarité du produit matriciel, la multiplication est alors interne dans E et commutative. De plus, $I\in E$ et finalement E est un sous-anneau commutatif de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Remarque. $M(x,y)M(x',y')=xx'I+(xy'+yx')J+yy'(2J-I)=(xx'-yy')I+(xy'+yx'+2yy')J$.

3) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} M(x,y) \text{ est inversible dans } E &\Leftrightarrow \exists (x', y') \in \mathbb{R}^2 / \; (xx' - yy')I + (xy' + yx' + 2yy')J = I \\ &\Leftrightarrow \exists (x', y') \in \mathbb{R}^2 / \; \left\{ \begin{array}{l} xx' - yy' = 1 \\ yx' + (x + 2y)y' = 0 \end{array} \right. \text{ (car la famille } (I, J) \text{ est libre)} \quad (*). \end{aligned}$$

Le déterminant de ce système d'inconnue (x', y') est $x(x + 2y) + y^2 = (x + y)^2$.

• Si $x + y \neq 0$, le système $(*)$ admet une et une seule solution. Dans ce cas, $M(x, y)$ est inversible dans E.

• Si $x + y = 0$, le système $(*)$ s'écrit $\left\{ \begin{array}{l} x(x' + y') = 1 \\ -x(x' + y') = 0 \end{array} \right.$ et n'a pas de solution. Dans ce cas, $M(x, y)$ n'est pas inversible dans E.

$$\boxed{M(x, y) \text{ est inversible dans } E \Leftrightarrow x + y \neq 0.}$$

Remarque. $(E, +, \times)$ n'est pas un corps.

4) Posons $X = xI + yJ$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) D'après 1), $X^2 = (x^2 - y^2)I + (2xy + 2y^2)J$. Donc

$$\begin{aligned} X^2 = I &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1 \text{ et } 2xy + 2y^2 = 0 \text{ (car la famille } (I, J) \text{ est libre)} \\ &\Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } x^2 = 1) \text{ ou } (y = -x \text{ et } 0 = 1) \Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } x = 1) \text{ ou } (y = 0 \text{ et } x = -1) \\ &\Leftrightarrow X = I \text{ ou } X = -I. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{I, -I\}.}$$

b)

$$X^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \text{ et } 2xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } x^2 = 0) \text{ ou } (y = -x \text{ et } 0 = 0) \Leftrightarrow y = -x.$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{x(I - J), \; x \in \mathbb{R}\}.}$$

Remarque. L'équation $X^2 = 0$, de degré 2, admet une infinité de solutions dans E ce qui montre une nouvelle fois que $(E, +, \times)$ n'est pas un corps.

c)

$$\begin{aligned} X^2 = X &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = x \text{ et } 2xy + 2y^2 = y \Leftrightarrow y(2x + 2y - 1) = 0 \text{ et } x^2 - y^2 = x \\ &\Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } x^2 = x) \text{ ou } (2(x + y) = 1 \text{ et } (x + y)(x - y) = x) \\ &\Leftrightarrow (X = 0 \text{ ou } X = I) \text{ ou } (2(x + y) = 1 \text{ et } x - y = 2x) \\ &\Leftrightarrow (X = 0 \text{ ou } X = I) \text{ ou } (y = -x \text{ et } 0 = 1) \\ &\Leftrightarrow X = 0 \text{ ou } X = I. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0, I\}.}$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $N = J - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $M(x, y) = xI + y(I + N) = (x + y)I + yN$.

Puisque I et N commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit

$$\begin{aligned} (M(x, y))^n &= ((x + y)I + yN) = (x + y)^n I + ny(x + y)^{n-1} N \text{ (car } N^k = 0 \text{ pour } k \geqslant 2) \\ &= \begin{pmatrix} (x + y)^n & ny(x + y)^{n-1} \\ 0 & (x + y)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (M(x,y))^n = \begin{pmatrix} (x+y)^n & ny(x+y)^{n-1} \\ 0 & (x+y)^n \end{pmatrix}.}$$

Exercice n° 8

$\{0\}$ est un idéal bilatère de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.
Soit I un idéal non nul de de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$. Montrons que $I = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Il existe une matrice A non nulle dans I. Pour tout quadruplet d'indices (i, j, k, l), I contient le produit

$$E_{i,j}AE_{k,l} = \sum_{1 \leqslant u,v \leqslant n} a_{u,v}E_{i,j}E_{u,v}E_{k,l} = a_{j,k}E_{i,l}.$$

A est non nulle et on peut choisir j et k tels que $a_{j,k}$ soit non nul. I contient alors $a_{j,k}E_{i,l}\dfrac{1}{a_{j,k}}I_n = E_{i,l}$, pour tout $(i,l) \in [\![1,n]\!]^2$. Finalement I contient toutes les matrices élémentaires et donc encore toutes les sommes du type $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}I_nE_{i,j} = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, c'est-à-dire $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tout entier.

$$\boxed{\text{Les idéaux bilatères de l'anneau } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times) \text{ sont } \{0\} \text{ et } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).}$$

Exercice n° 9

On inverse A en l'interprétant comme une matrice de passage.
Soient $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(e'_1, ..., e'_n)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base $\mathscr{B}$.

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow (e'_1, ..., e'_n) \text{ base de } E \Leftrightarrow \text{Vect}(e_1, ..., e_n) \subset \text{Vect}(e'_1, ..., e'_n) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ e_i \in \text{Vect}(e'_1, ..., e'_n).$$

Dans ce cas, A^{-1} est la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.
Soit $u = e_1 + \ldots + e_n$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $e'_i = a_ie_i + u$ ce qui fournit $e_i = \dfrac{1}{a_i}(e'_i - u)$.

En additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}e'_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)u$ et donc $\lambda u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}e'_i$ où $\lambda = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$.

1er cas. Si $\lambda \neq 0$, on peut exprimer u en fonction des e'_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, et donc les e_i fonction des e'_i. Dans ce cas A est inversible. Plus précisément, $u = \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}e'_i$ puis, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $e_i = \dfrac{1}{a_i}\left(e'_i - \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}e'_j\right)$ et enfin

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} - \frac{1}{\lambda a_1^2} & -\frac{1}{\lambda a_2 a_1} & \cdots & \cdots & -\frac{1}{\lambda a_n a_1} \\ -\frac{1}{\lambda a_1 a_2} & \frac{1}{a_2} - \frac{1}{\lambda a_2^2} & & & \vdots \\ \vdots & -\frac{1}{\lambda a_2 a_3} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{\lambda a_{n-1}^2} & -\frac{1}{\lambda a_n a_{n-1}} \\ -\frac{1}{\lambda a_1 a_n} & -\frac{1}{\lambda a_2 a_n} & \cdots & -\frac{1}{\lambda a_n a_{n-1}} & \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\lambda a_n^2} \end{pmatrix} \text{ où } \lambda = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}.$$

2ème cas. Si $\lambda = 0$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}e'_i = 0$ ce qui montre que la famille $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est liée et donc que A n'est pas inversible.

Exercice n° 10

Par hypothèse, $a_{i,j} = 0$ pour $j \leqslant i + r - 1$ et $b_{i,j} = 0$ pour $j \leqslant i + s - 1$.

Soient i et j deux indices tels que $j \leqslant i + r + s - 1$. Le coefficient ligne i, colonne j, de AB vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$.

Dans cette somme, si $k \leqslant i + r - 1$, $a_{i,k} = 0$. Sinon $k \geqslant i + r$ et donc $j \leqslant i + r + s - 1 \leqslant k + s - 1$ et dans ce cas $b_{k,j} = 0$.

Finalement, le coefficient ligne i, colonne j, de AB est bien nul si $j \leqslant i+r+s-1$.

Exercice n° 11

Notons A la matrice de l'énoncé. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de matrice A dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$. D'après la formule du binôme de NEWTON, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $f\left(X^k\right) = (X+1)^k$. f coïncide sur la base $\mathscr{B}$ avec l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à un polynôme P associe $P(X+1)$ et f est donc cet endomorphisme.

f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, de réciproque l'application qui à un polynôme P associe $P(X-1)$. Par suite, A est inversible d'inverse la matrice de f^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.
Le coefficient ligne i, colonne j, de A^{-1} vaut donc 0 si $i > j$ et $(-1)^{i+j}\dbinom{j}{i}$ si $i \leqslant j$.

Exercice n° 12

Calculons $A\overline{A}$. Soit $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne j, colonne k, de $A \times \overline{A}$ vaut

$$\sum_{u=1}^{n} \omega^{(j-1)(u-1)}\omega^{-(u-1)(k-1)} = \sum_{u=1}^{n} \left(\omega^{j-k}\right)^{u-1}.$$

• Si $j = k$, ce coefficient vaut n.

• Si $j \neq k$, puisque $j-k$ est strictement compris entre $-n$ et n et que $j-k$ n'est pas nul, ω^{j-k} est différent de 1. Le coefficient ligne j, colonne k, de $A\overline{A}$ est donc égal à $\dfrac{1-\left(\omega^{j-k}\right)^n}{1-\omega^{j-k}} = \dfrac{1-1}{1-\omega^{j-k}} = 0$.

Finalement, $A\overline{A} = nI_n$. Ainsi, A est inversible à gauche et donc inversible, d'inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{A}$.

Exercice n° 13

On a toujours $A(\text{com}A)^T = (\det A)I_n$. Par passage au déterminant et puisqu'une matrice a même déterminant que sa transposée, on obtient

$$(\det A)(\det(\text{com}A)) = (\det A)^n.$$

• Si $\det A$ n'est pas nul, on en déduit $\det(\text{com}A) = (\det A)^{n-1}$.

• Si $\det A$ est nul, on a $A(\text{com}A)^T = 0$ et donc $(\text{com}A)^T$ est soit nulle, soit diviseur de zéro, et donc dans tous les cas non inversible. Il en est de même de $\text{com}A$ et donc $\det(\text{com}A) = 0 = (\det A)^{n-1}$. Finalement

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(\text{com}A) = (\det A)^{n-1}.}$$

Exercice n° 14

• Si A est de rang n, c'est-à-dire inversible, l'égalité $(\text{com}A) \times \dfrac{1}{\det A}A^T = I_n$ montre que $\text{com}A$ est inversible et donc de rang n.

On suppose maintenant $\text{rg}(A) \leqslant n-1$.

• Si $\text{rg}(A) \leqslant n-2$. On sait que tous les mineurs de format $n-1$ extraits de A sont nuls et donc, si $\text{rg}A \leqslant n-2$, $\text{com}A = 0$.

• Il reste à étudier le cas où $\text{rg}(A) = n-1$ et donc $\dim(\text{Ker}(A)) = 1$.
L'égalité $\det(A) = 0$ impose $A(\text{com}A)^T = 0$. Mais alors $\text{Im}((\text{com}A)^T) \subset \text{Ker}(A)$ et en particulier $\text{rg}(\text{com}A) = \text{rg}\left((\text{com}A)^T\right) \leqslant \dim(\text{Ker}A) = 1$. Ainsi, si $\text{rg}(A) = n-1$ alors $\text{rg}(\text{com}A) \in \{0,1\}$.
Enfin, puisque A est de rang 1, on sait que l'un au moins des mineurs de format $n-1$ extraits de A est non nul et donc $\text{com}A \neq 0$ puis $\text{rg}(\text{com}A) = 1$.

En résumé,

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{rg}(\text{com}A) = \left\{\begin{array}{l} n \text{ si } \text{rg}(A) = n \\ 1 \text{ si } \text{rg}(A) = n-1 \\ 0 \text{ si } \text{rg}(A) \leqslant n-2 \end{array}\right. .}$$

Exercice n° 15

Montrons que $\text{Ker}A$ est réduit à $\{0\}$. Dans le cas contraire, on dispose d'un vecteur colonne non nul X_0 tel que $AX_0 = 0$. Posons $X_0 = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = 0 \Rightarrow a_{i,i}x_i = -\sum_{j\neq i} a_{i,j}x_j \Rightarrow |a_{i,i}||x_i| \leqslant \sum_{j\neq i} |a_{i,j}||x_j|.$$

On prend alors pour i un indice i_0 tel que $|x_{i_0}| = \text{Max}\{|x_1|, ..., |x_n|\}$. Puisque $X \neq 0$, on a $|x_{i_0}| > 0$. De plus,

$$|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}||x_j| \leqslant \left(\sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|\right)|x_{i_0}|,$$

et puisque $|x_{i_0}| > 0$, on obtient après simplification $|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|$ ce qui contredit les hypothèses.

Donc $\text{Ker}A = \{0\}$ et A est inversible.

Exercice n° 16

Non, car $\text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0 \neq n = \text{Tr}(I_n)$.

Exercice n° 17

Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, posons $f(A) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j}a_{i,j}$ où les $\alpha_{i,j}$ sont indépendants de A (les $\alpha_{i,j}$ sont les $f(E_{i,j})$).

Soient i et j deux entiers distincts pris dans $[\![1, n]\!]$.

$$\alpha_{i,i} = f(E_{i,i}) = f(E_{i,j}E_{j,i}) = f(E_{j,i}E_{i,j}) = f(E_{j,j}) = \alpha_{j,j},$$

et

$$\alpha_{i,j} = f(E_{i,j}) = f(E_{i,i}E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{i,i}) = f(0) = 0.$$

Finalement en notant α la valeur commune des $\alpha_{i,i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, pour toute matrice A on a $f(A) = \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \alpha\text{Tr}(A)$ où α est indépendant de A. (Réciproquement, les $f = \alpha\text{Tr}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, sont des formes linéaires vérifiant $\forall(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, $f(AB) = f(BA)$.)

Exercice n° 18

1) Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
M(\theta) \times M(\theta') &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') & -(\sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')) \\ \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta') & \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} = M(\theta+\theta').
\end{aligned}$$

Mais alors, par récurrence, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $(M(\theta))^n = M(n\theta)$.

2) Puisque $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}}\right)^2 + \left(\dfrac{\dfrac{a}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}}\right)^2 = 1$, il existe un unique réel $\theta_n \in [-\pi, \pi[$ tel que

$$\cos\theta_n = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}} \text{ et } \sin\theta_n = \frac{\dfrac{a}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}}.$$

La matrice A_n s'écrit alors $A_n = \sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}\begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}$ et donc

$$(A_n)^n = \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2}\begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}.$$

Maintenant,

$$\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2}=\exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}\exp\left(\frac{n}{2}\times o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}\exp(o(1))\underset{n\to+\infty}{\to}1.$$

Ensuite, $\theta_n=\text{Arcsin}\left(\dfrac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right)$ (car $\cos(\theta_n)>0$) et donc $\theta_n\underset{n\to+\infty}{\to}0$. On en déduit que

$$n\theta_n\underset{n\to+\infty}{\sim}n\sin(\theta_n)=n\frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\underset{n\to+\infty}{\to}a.$$

Finalement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(A_n)^n=\begin{pmatrix}\cos(a)&-\sin(a)\\\sin(a)&\cos(a)\end{pmatrix}.}$$

Exercice n° 19

Soient i et j deux indices pris dans $[\![1,n]\!]$.

$$f(E_{i,j})=E_{i,j}\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n}a_{k,l}E_{k,l}=\sum_{l=1}^{n}a_{j,l}E_{i,l},$$

et en remplissant coefficient à coefficient, on trouve la matrice définie par blocs $\begin{pmatrix}A^T&0&\dots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&0&A^T\end{pmatrix}$.

Exercice n° 20

On note r le rang de A. Si $r=0$, A est nulle et donc B est nulle.

Sinon, il existe deux matrices carrées inversibles P et Q de format n telles que $A=PJ_rQ$ où $J_r=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$. Soient $P'=\begin{pmatrix}P&0&\dots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&0&P\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$ et $Q'=\begin{pmatrix}Q&0&\dots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&0&Q\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$. Puisque $\det(P')=(\det(P))^p\neq0$ et $\det(Q')=(\det(Q))^p\neq0$, les matrices P' et Q' sont inversibles. De plus, un calcul par blocs montre que

$$B=\begin{pmatrix}PJ_rQ&0&\dots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&0&PJ_rQ\end{pmatrix}=P'J_r'Q'\text{ où }J_r'=\begin{pmatrix}J_r&0&\dots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&0&J_r\end{pmatrix}.$$

La matrice B est équivalente a la matrice J_r' et a donc même rang que J_r'. Enfin, en supprimant les lignes nulles et les colonnes nulles, on voit que la matrice J_r' a même rang que la matrice I_{pr} à savoir pr. Dans tous les cas, on a montré que

$$\boxed{\text{rg}(B)=p\,\text{rg}(A).}$$

Exercice n° 21

Soit r le rang de H. Il existe deux matrices carrées inversibles P et Q de format n telles que $H=PJ_rQ$ où $J_r=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$ (avec la convention $J_r=0$ si $r=0$). L'égalité $HAH=\lambda_AH$ s'écrit après simplifications $J_rQAPJ_r=\lambda_AJ_r$. Maintenant , quand A décrit $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $B=QAP$ décrit également $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (par exemple, l'application qui à A associe QAP est une permutation de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de réciproque l'application qui à A associe $Q^{-1}AP^{-1}$).

L'énoncé s'écrit maintenant de manière plus simple : montrons que $(\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \exists \lambda_B \in \mathbb{K}/\ J_rBJ_r = \lambda_B J_r) \Rightarrow r \leqslant 1$.

Un calcul par blocs fournit en posant $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix}$

$$J_rBJ_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mais si $r \geqslant 2$, il existe des matrices carrées B_1 de format r qui ne sont pas des matrices scalaires et donc telles que B_1 n'est pas colinéaire à I_r. Donc $r \leqslant 1$.

Exercice n° 22

(1) $\Rightarrow$ (2).
$M^2 = 0 \Rightarrow \text{Im}(M) \subset \text{Ker}(M) \Rightarrow \text{rg}(M) \leqslant \dim(\text{Ker}(M)) = 3 - \text{rg}(M) \Rightarrow \text{rg}(M) \leqslant \dfrac{3}{2}$ et donc $\text{rg}(M) \leqslant 1$.
Si $\text{rg}(M) = 0$ alors $\text{Tr}(M) = 0$. On suppose maintenant que $\text{rg}(M) = 1$ et donc $\dim(\text{Ker}(M)) = 2$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.
Soit e_1 un vecteur non nul de $\text{Im}(f)$ alors il existe un vecteur e_3 (non nul) tel que $f(e_3) = e_1$.
On complète la famille libre (e_1) de $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ en (e_1, e_2) base de $\text{Ker}(f)$. La famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = 0 \Rightarrow f(ae_1 + be_2 + ce_3) = 0 \Rightarrow ce_1 = 0 \Rightarrow c = 0,$$

puis $a = b = 0$ car la famille (e_1, e_2) est libre.

La matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. M est donc semblable à cette matrice et en particulier $\text{Tr}(M) = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1).
Si $\text{rg}(M) = 0$, $M^2 = 0$.
Si $\text{rg}M = 1$, on peut se rappeler de l'écriture générale d'une matrice de rang 1 : il existe trois réels u_1, u_2 et u_3 non tous nuls et trois réels v_1, v_2 et v_3 non tous nuls tels que $M = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{pmatrix}$ ou encore il existe deux vecteurs colonnes, tous deux non nuls, U et V tels que $M = UV^T$. L'égalité $\text{Tr}(M) = 0$ fournit $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$ ou encore $U^TV = 0$. Mais alors

$$M^2 = UV^TUV^T = U\left(U^TV\right)^T V^T = 0$$

Cet exercice admet des solutions bien plus brèves avec des connaissances sur la réduction .

Exercice n° 23

Soit p un entier supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned} A^pB - BA^p &= A^pB - A^{p-1}BA + A^{p-1}BA - A^{p-2}BA^2 + A^{p-2}BA^2 - \ldots + ABA^{p-1} - BA^p \\ &= \sum_{k=0}^{p-1}(A^{p-k}BA^k - A^{p-k-1}BA^{k+1}) = \sum_{k=0}^{p-1} A^{p-k-1}(AB - BA)A^k = \sum_{k=0} A^{p-k-1}AA^k = \sum_{k=0}^{p-1} A^p \\ &= pA^p. \end{aligned}$$

Donc $2022 \times \text{Tr}\left(A^{2022}\right) = \text{Tr}\left(2022\ A^{2022}\right) = \text{Tr}\left(A^{2022}B\right) - \text{Tr}\left(BA^{2022}\right) = 0$ puis $\text{Tr}\left(A^{2022}\right) = 0$.

Exercice n° 24

Si $M(a)$ et $N(a)$ sont semblables alors nécessairement $\text{Tr}(M(a)) = \text{Tr}(N(a))$. Or, pour tout scalaire a, $\text{Tr}(M(a)) = 4 - 3a = \text{Tr}(N(a))$. La trace ne fournit aucun renseignement.
On doit aussi avoir $\det(M(a)) = \det(N(a))$. Or, $\det(N(a)) = (1-a)^2(2-a)$ et

$$\begin{aligned} \det(M(a)) &= (4-a)(a^2 - 1 - 2) + 6(1 - a + 1) + 2(2 - 1 - a) = (4-a)(a^2 - 3) + 14 - 8a = -a^3 + 4a^2 - 5a + 2 \\ &= (a-1)^2(2-a) = \det(N(a)). \end{aligned}$$

Le déterminant ne fournit aucun renseignement.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ de matrice $M(a)$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (i, j, k)$ de $\mathbb{C}^3$.
Le problème posé équivaut à l'existence d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{C}^3$ telle que $f(e_1) = (1-a)e_1$, $f(e_2) = (1-a)e_2+e_1$ et $f(e_3) = (2-a)e_3$. Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{C}^3$.

- $f((x, y, z)) = (1-a)(x, y, z) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+y-z=0 \\ -6x-2y+2z=0 \\ 2x+y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2x \\ z=x \end{array}\right.$. On peut prendre $e_1 = (1, -2, 1)$.
- $f((x, y, z)) = (1-a)(x, y, z) + (1, -2, 1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+y-z=1 \\ -6x-2y+2z=-2 \\ 2x+y=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2x+1 \\ z=x \end{array}\right.$. On peut prendre $e_2 = (0, 1, 0)$.
- $f((x, y, z)) = (2-a)(x, y, z) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ -6x-3y+2z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2x \\ z=0 \end{array}\right.$. On peut prendre $e_3 = (1, -2, 0)$.

La matrice de la famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ dans la base $\mathscr{B}_0$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\det P = -1 \neq 0$ (en développant suivant la deuxième colonne) et donc la famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{K}^3$. Puisque $\text{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f) = M(a)$ et $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = N(a)$, les matrices $M(a)$ et $N(a)$ sont semblables (pour tout $a \in \mathbb{C}$).

Exercice n° 25

Soient A et B deux matrices carrées réelles de format (n, n) semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Il existe P élément de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $PB = AP$ (bien plus manipulable que $B = P^{-1}AP$).
Posons $P = Q + iR$ où Q et R sont des matrices réelles. Par identification des parties réelles et imaginaires, on a $QB = AQ$ et $RB = AR$ mais l'exercice n° 25 n'en est pas pour autant achevé car Q ou R n'ont aucune raison d'être inversibles.

On a $QB = AQ$ et $RB = AR$ et donc plus généralement pour tout complexe x, $(Q + zR)B = A(Q + zR)$.
Maintenant, $\det(Q + zR)$ est un polynôme à coefficients réels en z mais n'est pas le polynôme nul car sa valeur en i (tel que $i^2 = -1$) est $\det(P)$ qui est non nul. Donc il n'existe qu'un nombre fini de réels x, éventuellement nul, tels que $\det(Q + xR) = 0$. En particulier, il existe au moins un réel x_0 tel que la matrice $P_0 = Q + x_0R$ soit inversible. P_0 est une matrice réelle inversible telle que $P_0A = BP_0$ ou encore $B = P_0^{-1}AP_0$. A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice n° 26

1) Soient p l'indice de nilpotence de A et q l'indice de nilpotence de B. Puisque A et B commutent, la formule du binôme de Newton fournit

$$(A + B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k}.$$

Dans cette somme,

- si $k \geqslant p$, $A^k = 0$ et donc $A^k B^{p+q-1-k} = 0$
- si $k \leqslant p-1$ alors $p+q-1-k \geqslant q$ et encore une fois $B^{p+q-1-k} = 0$.

Finalement, $(A + B)^{p+q-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k} = 0$ et $A + B$ est nilpotente d'indice inférieur ou égal à $p + q - 1$.

Les sommes définissant $\exp A$, $\exp B$ et $\exp(A + B)$ sont finies car A, B et $A + B$ sont nilpotentes et

$$\begin{aligned} \exp(A + B) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(A + B)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i+j=k} \frac{1}{i!j!} A^i B^j \\ &= \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} A^i\right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} B^j\right) \text{ (toutes les sommes sont finies)} \\ &= \exp(A) \times \exp(B). \end{aligned}$$

2) Si A est nilpotente, $-A$ l'est aussi et commute avec A. Donc $\exp(A) \times \exp(-A) = \exp(A - A) = \exp(0) = I_n$. $\exp(A)$ est inversible à gauche et donc inversible et $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$.

3) Les puissances de A sont bien connues et on trouve immédiatement

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \frac{1}{2!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{1!} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice n° 27

Cherchons une matrice A de format $(3,2)$ et une matrice B de format $(2,3)$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Posons $E = \mathbb{R}^2$ et notons (i,j) la base canonique de E. Posons $F = \mathbb{R}^3$ et notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de F. Notons f (resp. g) l'élément de $\mathscr{L}(E,F)$ (resp. $\mathscr{L}(F,E)$) de matrice A (resp. B) relativement aux bases (i,j) et (e_1, e_2, e_3) (resp. (e_1, e_2, e_3) et (i,j)).

Le problème posé matriciellement peut se réénoncer sous la forme : trouvons $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,E)$ telles que $f \circ g\,(e_1) = 8e_1 + 2e_2 - 2e_3$, $f \circ g\,(e_2) = 2e_1 + 5e_2 + 4e_3$ et $f \circ g\,(e_3) = -2e_1 + 4e_2 + 5e_3$.

Remarquons tout d'abord que le problème posé n'a pas nécessairement de solution car on doit avoir $\text{rg}(f \circ g) \leqslant \text{Min}\{f, g\} \leqslant \dim(E) = 2$ et si la matrice proposée est de rang 3 (c'est à dire inversible), le problème posé n'a pas de solution.

Ici, $\begin{vmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 8 \times 9 - 2 \times 18 - 2 \times 18 = 0$ et la matrice proposée est de rang au plus 2 puis de rang 2 car ses deux premières colonnes ne sont pas colinéaires. Une relation de dépendance des colonnes est $C_1 = 2C_2 - 2C_3$.
Un couple (f,g) solution devra vérifier $f \circ g(e_1) = 2f \circ g(e_2) - 2f \circ g(e_3)$.
Prenons n'importe quoi ou presque pour $g(e_2)$ et $g(e_3)$ mais ensuite prenons $g(e_1) = 2g(e_2) - 2g(e_3)$.
Par exemple, posons $g(e_2) = i$, $g(e_3) = j$ et $g(e_1) = 2i - 2j$ puis $f(i) = 2e_1 + 5e_2 + 4e_3$ et $f(j) = -2e_1 + 4e_2 + 5e_3$ ou encore soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Soient A et B deux matrices de formats respectifs $(3,2)$ et $(2,3)$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Calculons BA (il n'y a bien sûr pas unicité de A et B, mais l'énoncé suggère que le produit BA doit être indépendant de A et B).

Tout d'abord

$$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 & 18 & -18 \\ 18 & 45 & 36 \\ -18 & 36 & 45 \end{pmatrix} = 9AB.$$

De plus, $\text{rg}(BA) \geqslant \text{rg}(A(BA)B) = \text{rg}((AB)^2) = \text{rg}(9AB) = \text{rg}(AB) = 2$ et donc $\text{rg}(BA) = 2$ puis $BA \in GL_2(\mathbb{R})$.

De l'égalité $(AB)^2 = 9AB$, on tire après multiplication à gauche par B et à droite par A, $(BA)^3 = 9(BA)^2$ et, puisque BA est une matrice carrée inversible et donc simplifiable pour la multiplication des matrices, $BA = 9I_2$.

Exercice n° 28

Soit $A = \displaystyle\sum_{M \in G} M$. Alors $A^2 = \displaystyle\sum_{(M,N) \in G^2} MN$.
Soit $M \in G$ fixée. Considérons l'application φ de G dans G qui à un élément N de G associe MN. Puisque G est stable pour le produit, φ est bien une application. Plus précisément, φ est une permutation de G car l'application ψ de G dans lui-même qui à un élément N de G associe $M^{-1}N$ vérifie $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = Id_G$. On en déduit que

$$A^2 = \sum_{M \in G} \left(\sum_{N \in G} MN \right) = \sum_{M \in G} A = pA \text{ où } p = \text{card}(G).$$

Finalement, la matrice $P = \dfrac{1}{p}A$ est idempotente car $\left(\dfrac{1}{p}A\right)^2 = \dfrac{1}{p^2}pA = \dfrac{1}{p}A$. Comme P est une matrice de projection, on sait que $\text{rg}(P) = \text{Tr}(P) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{M \in G} \text{Tr}(M) = 0$ et donc $P = 0$ ou encore $\displaystyle\sum_{M \in G} M = 0$.

Exercice n° 29

Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. H est le noyau d'une forme linéaire non nulle f.

Pour $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, posons $f(M) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}m_{i,j}$ où les $a_{i,j}$ sont n^2 scalaires indépendants de M et non tous nuls.

On note que pour tout $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{k,l} = f\left(E_{k,l}\right)$.

1er cas. Supposons qu'il existe deux indices distincts k et l tels que $a_{k,l} \neq 0$. Soit $M = I_n - \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}}{a_{k,l}} E_{k,l}$. M est inversible car triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls et M est dans H car $f(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} - a_{k,l}\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}}{a_{k,l}} = 0$.

2ème cas. Si tous les $a_{k,l}$, $k \neq l$, sont nuls, H contient la matrice inversible $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 30

Comme au n° 28, la matrice $B = \dfrac{1}{p}A = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=1}^{p} A_k$ est idempotente et donc $\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{rg}(B)$.

Par suite, $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(pB) = p \times \mathrm{rg}(B)$ est un entier divisible par p.