Planche n° 3. Révision algèbre linéaire. Matrices

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile   ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (I)**

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. u est l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E,\ u(P) = P(X+1) - P$.

1) Déterminer $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.

2) Déterminer explicitement une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 2 (***)

Rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) \\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) & \cos(5a) \\ \cos(3a) & \cos(4a) & \cos(5a) & \cos(6a) \end{pmatrix}$.

Exercice n° 3 (***)

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ définie par $a_{i,j} = 1$ si $i = j$, j si $i = j-1$ et 0 sinon. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice n° 4 (***)

Soient n un entier naturel non nul puis $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit f l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$ qui à une matrice X associe $AX + XA$. Calculer $\text{Tr}(f)$.

Exercice n° 5 (**)

Soient a un réel non nul et A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Résoudre dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation d'inconnue M : $aM + \text{Tr}(M)A = B$.

Exercice n° 6 (**)

Rang de la matrice $(i + j + ij)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Exercice n° 7 (**)

Soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $E = \{M(x,y) = xI + yJ,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Montrer que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et préciser sa dimension.
2) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.
3) Quels sont les éléments inversibles de l'anneau $(E, +, \times)$?
4) Résoudre dans E les équations : **a)** $X^2 = I$ **b)** $X^2 = 0$ **c)** $X^2 = X$.
5) Calculer $(M(x,y))^n$ pour n entier naturel et x et y réels.

Exercice n° 8 (***)

On appelle idéal bilatère de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ tout sous-ensemble I de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

a) $(I, +)$ est un groupe et b) $\forall A \in I,\ \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ AM \in I$ et $MA \in I$.

Déterminer tous les idéaux bilatères de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

Exercice n° 9 (***)

Soient a_1,..., a_n n réels tous non nuls et $A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}$. Inverse de A en cas d'existence ?

Exercice n° 10 (**)

Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices carrées de format n telles que $a_{i,j} = 0$ si $j \leqslant i + r - 1$ et $b_{i,j} = 0$ si $j \leqslant i + s - 1$ où r et s sont deux entiers donnés entre 1 et n. Montrer que si $AB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ alors $c_{i,j} = 0$ si $j \leqslant i + r + s - 1$.

Exercice n° 11 (I)**

Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \binom{n-1}{n-1} & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$.

Exercice n° 12 (* I)**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\omega = e^{2i\pi/n}$.
Soit $A = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice n° 13 (I)**

Soit A une matrice carrée de format n. Calculer le déterminant de sa comatrice.

Exercice n° 14 (* I)**

Soit A une matrice carrée de format n. Etudier le rang de $\text{com}A$ en fonction du rang de A.

Exercice n° 15 (* I) (Théorème de Hadamard.)**

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > \displaystyle\sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$. (Une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.)

Exercice n° 16 (* I)

Existe-t-il deux matrices carrées A et B telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice n° 17 (I)**

Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ $(n \geqslant 2)$ telle que $\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe un complexe α tel que $f = \alpha\text{Tr}$.

Exercice n° 18 (***)

1) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Calculer $M(\theta) \times M(\theta')$ pour $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. En déduire $(M(\theta))^n$ pour $(\theta, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$.

2) Pour $(n, a) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a}{n} \\ \dfrac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A_n^n$.

Exercice n° 19 (**)

Soient A une matrice carrée de format n et f l'application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même qui à une matrice M associe MA. Trouver la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (ordonnée par l'ordre lexicographique).

Exercice n° 20 (***)

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ puis B l'élément de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$ défini par blocs par $B = \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de B en fonction du rang de A.

Exercice n° 21 (***)

Soit H un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists \lambda_A \in \mathbb{C}/\ HAH = \lambda_A H$. Montrer que $\text{rg}H \leqslant 1$.

Exercice n° 22 (***)

Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(1)\ M^2 = 0 \text{ et } (2)\ \text{rg}(M) \leqslant 1 \text{ et } \text{tr}(M) = 0.$$

Exercice n° 23 (* I)**

Soient A et B deux matrices carrées de format n telles que $AB - BA = A$. Calculer la trace de A^{2022}.

Exercice n° 24 (**)

Soient $M(a) = \begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ et $N(a) = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$. M(a) et N(a) sont-elles semblables ?

Exercice n° 25 (* I)**

Soient A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, elles le sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice n° 26 (I) (Exponentielle d'une matrice nilpotente)**

Pour A matrice nilpotente donnée, on pose $\exp(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

1) Montrer que si A et B commutent et sont nilpotentes alors $A+B$ est nilpotente et $\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B)$.

2) Montrer que $\exp(A)$ est inversible.

3) Calculer $\exp(A)$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 27 (* I)**

Soient $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Justifier l'existence de A et B puis calculer BA.

Exercice n° 28 (***)

Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\displaystyle\sum_{M \in G} \text{Tr}(M) = 0$. Montrer que $\displaystyle\sum_{M \in G} M = 0$.

Exercice n° 29 (** I)**

Montrer que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ contient des matrices inversibles.

Exercice n° 30 (* I)**

Soient A_1,..., A_p p matrices distinctes et inversibles de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $G = \{A_1, ..., A_p\}$ soit stable pour la multiplication. Soit $A = A_1 + \ldots + A_p$. Montrer que $\text{Tr}(A)$ est un entier divisible par p.