Planche n° 3. Raisonnement par récurrence. Corrigé

Exercice n° 1

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n$.

- Pour $n = 0$, $2^0 = 1 > 0$. L'inégalité à démontrer est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $2^n > n$ ou encore plus précisément, $2^n \geqslant n + 1$ (puisque 2^n est un entier) et montrons que $2^{n+1} > n + 1$.

$$\begin{aligned}2^{n+1} &= 2 \times 2^n \\ &\geqslant 2(n+1) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= n + 1 + n + 1 \\ &> n + 1.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n.}$$

Exercice n° 2

Montrons par récurrence que : $\forall n \geqslant 4,\ n! \geqslant n^2$.

- Pour $n = 4$, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ et $4^2 = 16$. Puisque $24 \geqslant 16$, l'inégalité à démontrer est donc vraie quand $n = 4$.
- Soit $n \geqslant 4$. Supposons que $n! \geqslant n^2$ et montrons que $(n + 1)! \geqslant (n + 1)^2$.

$$\begin{aligned}(n+1)! &= (n+1) \times n! \\ &\geqslant (n+1) \times n^2 \text{ (par hypothèse de récurrence).}\end{aligned}$$

Or, $(n + 1) \times n^2 - (n + 1)^2 = (n + 1)(n^2 - n - 1) = (n + 1)(n(n - 1) - 1) \geqslant 5 \times (4 \times 3 - 1) = 55 \geqslant 0$ et donc $(n + 1) \times n^2 \geqslant (n + 1)^2$ puis $(n + 1)! \geqslant (n + 1)^2$.

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 4,\ n! \geqslant n^2.}$$

Exercice n° 3

Montrons par récurrence que : $\forall n \geqslant 2$, n est divisible par au moins un nombre premier.

- 2 est divisible par 2 qui est un nombre premier. La propriété à démontrer est donc vraie quand $n = 2$.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, k est divisible par au moins un nombre premier et montrons que $n + 1$ est divisible par au moins un nombre premier.

Si $n + 1$ est un nombre premier, $n + 1$ admet au moins un diviseur premier à savoir lui-même. Sinon, $n + 1$ n'est pas premier. Dans ce cas, il existe deux entiers a et b éléments de $[\![2, n]\!]$ tels que $n+1 = a \times b$. Par hypothèse de récurrence, l'entier a est divisible par au moins un nombre premier p. L'entier p divise l'entier a et l'entier a divise l'entier $n + 1$. Donc le nombre premier p divise l'entier $n + 1$.
Dans tous les cas, l'entier $n + 1$ est divisible par au moins un nombre premier.

On a montré par récurrence que tout entier supérieur ou égal à 2 est divisible par au moins un nombre premier.

Exercice n° 4

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-2)^n + 3^n$.

- $(-2)^0 + 3^0 = 2 = u_0$ et $(-2)^1 + 3^1 = 1 = u_1$. L'égalité à démontrer est donc vraie quand $n = 0$ et $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n = (-2)^n + 3^n$ et que $u_{n+1} = (-2)^{n+1} + 3^{n+1}$ et montrons que $u_{n+2} = (-2)^{n+2} + 3^{n+2}$.

$$\begin{aligned}u_{n+2} &= u_{n+1} + 6u_n \\ &= \left((-2)^{n+1} + 3^{n+1}\right) + 6\left((-2)^n + 3^n\right) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= (-2 + 6) \times (-2)^n + (3 + 6) \times 3^n = 4 \times (-2)^n + 9 \times 3^n \\ &= (-2)^2 \times (-2)^n + 3^2 \times 3^n = (-2)^{n+2} + 3^{n+2}.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (-2)^n + 3^n.}$$

Exercice n° 5

1) Montrons par récurrence que : $\forall n \geqslant 1,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Pour $n = 1$, $\dfrac{1 \times (1+1)}{2} = 1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} k$. L'égalité à démontrer est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et montrons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

On peut donner plusieurs démonstrations directes.

1ère demonstration. Pour $k \geqslant 1$, $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^2 - k^2\right) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$ ce qui s'écrit $(n+1)^2 - 1 = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k + n$ ou encore $2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = n^2 + n$ ou enfin $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2ème demonstration. On écrit

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-1) & + & n & = & S \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1 & = & S \end{array}$$

et en additionnant (verticalement), on obtient $2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)}_{n \text{ termes}} = n(n+1)$ d'où le résultat. La même démonstration s'écrit avec le symbole sigma :

$$2S = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n+1-k) = \sum_{k=1}^{n} (k+n+1-k) = \sum_{k=1}^{n} (n+1) = n(n+1).$$

3ème demonstration. On compte le nombre de points d'un rectangle ayant n points de large et $n+1$ points de long. Il y en a $n(n+1)$. Ce rectangle se décompose en deux triangles isocèles contenant chacun $1+2+\ldots+n$ points. D'où le résultat.

$$\begin{array}{ccccccccc} * & & * & * & \dots & & & \dots & * \\ * & * & & \ddots & & & & & \vdots \\ * & * & * & & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & & * & * & * \\ \vdots & & & & & \ddots & & * & * \\ * & \dots & & & \dots & * & * & & * \end{array}$$

4ème démonstration. Dans le triangle de Pascal, on sait que pour n et p entiers naturels donnés, $\dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1} = \dbinom{n+1}{p+1}$. Donc, pour $n \geqslant 2$ (le résultat est clair pour $n = 1$),

$$1+2+\ldots+n = 1+\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{1} = 1+\sum_{k=2}^{n}\left(\binom{k+1}{2}-\binom{k}{2}\right) = 1+\binom{n+1}{2}-1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2) Pour $k \geqslant 1$, $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2+3k+1$. Donc, pour $n \geqslant 1$:

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1 = \sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right) = (n+1)^3-1.$$

D'où,

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{3}\left((n+1)^3-1-3\frac{n(n+1)}{2}-n\right) = \frac{1}{6}(2(n+1)^3-3n(n+1)-2(n+1)) = \frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2+n\right),$$

et donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

Pour $k \geqslant 1$, $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3+6k^2+4k+1$. Donc, pour $n \geqslant 1$, on a

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3 + 6\sum_{k=1}^{n}k^2 + 4\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1 = \sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4-k^4\right) = (n+1)^4-1.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^3 &= \frac{1}{4}\left((n+1)^4-1-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-n\right) = \frac{1}{4}((n+1)^4-(n+1)(n(2n+1)+2n+1))\\ &= \frac{1}{4}\left((n+1)^4-(n+1)^2(2n+1)\right) = \frac{(n+1)^2\left((n+1)^2-(2n+1)\right)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n}k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2.}$$

Pour $k \geqslant 1$, $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$. Donc, pour $n \geqslant 1$,

$$5\sum_{k=1}^{n}k^4 + 10\sum_{k=1}^{n}k^3 + 10\sum_{k=1}^{n}k^2 + 5\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1 = \sum_{k=1}^{n}((k+1)^5-k^5) = (n+1)^5-1.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^4 &= \frac{1}{5}\left((n+1)^5-1-\frac{5}{2}n^2(n+1)^2-\frac{5}{3}n(n+1)(2n+1)-\frac{5}{2}n(n+1)-n\right)\\ &= \frac{1}{30}(6(n+1)^5-15n^2(n+1)^2-10n(n+1)(2n+1)-15n(n+1)-6(n+1))\\ &= \frac{1}{30}(n+1)(6n^4+9n^3+n^2-n) = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\begin{gathered}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}\\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2\\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.\end{gathered}}$$

Exercice n° 6

1) Montrons par récurrence que $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

- Pour $n = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ et la formule proposée est vraie pour $n = 1$.

- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ et montrons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)+1}.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.}$$

Démonstration directe. Pour $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)},$$

et donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

2) Montrons par récurrence que $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

- Pour $n = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{6} = \frac{1 \times (1+3)}{4 \times (1+1)(1+2)}$ et la formule proposée est vraie pour $n = 1$.

- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ et montrons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{(n+1)(n^2+5n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)((n+1)+3)}{4((n+1)+1)((n+2)+1)}
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.}$$

Démonstration directe. Pour $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right),$$

et donc,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

Exercice n° 7

Montrons par récurrence que, pour $n \geqslant 2$, H_n peut s'écrire sous la forme $\dfrac{p_n}{q_n}$ où q_n est un entier pair et p_n est un entier impair (la fraction précédente n'étant pas nécessairement irréductible mais n'étant à coup sûr pas un entier).

- Pour $n = 2$, $H_2 = \dfrac{3}{2}$ et H_2 est bien du type annoncé.

- Soit $n \geqslant 2$. Supposons que pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant n$, on ait $H_k = \dfrac{p_k}{q_k}$ où p_k est un entier impair et q_k est un entier pair et montrons que $H_{n+1} = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ où p_{n+1} est un entier impair et q_{n+1} est un entier pair.

(Recherche. L'idée $H_{n+1} = \dfrac{p_n}{q_n} + \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{(n+1)p_n + q_n}{(n+1)q_n}$ ne marche à coup sur que si $(n+1)p_n + q_n$ est impair ce qui est assuré si $n+1$ est impair et donc si n est pair).

1er cas. Si n est pair, on peut poser $n = 2k$ où $k \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, $H_{n+1} = \dfrac{p_n}{q_n} + \dfrac{1}{2k+1} = \dfrac{(2k+1)p_n + q_n}{(2k+1)q_n}$.
$(2k+1)$ est p_n sont impairs et donc $(2k+1)p_n$ est impair puis $(2k+1)p_n + q_n$ est impair car q_n est pair. D'autre part, q_n est pair et donc $(2k+1)q_n$ est pair. H_{n+1} est bien le quotient d'un entier impair par un entier pair.

2ème cas. Si n est impair, on pose $n = 2k-1$ où $k \geqslant 2$ (de sorte que $2k-1 \geqslant 3$).

$$\begin{aligned}H_{n+1} &= \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2i} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}\\ &\quad \text{(en séparant les fractions de dénominateurs pairs des fractions de dénominateurs impairs)}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1} = \frac{1}{2}H_k + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}.\end{aligned}$$

Maintenant, en réduisant au même dénominateur et puisque un produit de nombres impairs est un nombre impair, on voit que $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}$ est du type $\dfrac{K}{2K'+1}$ où K et K' sont des entiers. Ensuite, puisque $2 \leqslant k \leqslant 2k-1 = n$, par hypothèse de récurrence, $H_k = \dfrac{p_k}{q_k}$ où p_k est un entier impair et q_k un entier pair. Après réduction au même dénominateur, on obtient

$$H_{n+1} = \frac{p_k}{q_k} + \frac{K}{2K'+1} = \frac{(2K'+1)p_k + Kq_k}{q_k(2K'+1)}.$$

Kq_k est un entier pair et $(2K'+1)p_k$ est un entier impair en tant que produit de deux nombres impairs. Donc le numérateur est bien un entier impair et puisque $qk(2K'+1)$ est un entier pair, H_{n+1} est encore une fois de la forme désirée.

On a montré par récurrence que pour tout naturel $n \geqslant 2$, H_n est le quotient d'un entier impair par un entier pair et en particulier H_n n'est pas un entier.

Exercice n° 8

Soit f une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n, $f(n) \leqslant n$. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$.

- $f(0)$ est un entier naturel tel que $f(0) \leqslant 0$. Donc, $f(0) = 0$. L'égalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(k) = k$. $f(n+1)$ est un entier naturel inférieur ou égal à $n+1$. Donc, $f(n+1) \in [\![0, n+1]\!]$. Mais f est injective et donc, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(n+1) \neq f(k)$ ou encore $f(n+1) \neq k$. Par suite, $f(n+1) \notin [\![0, n]\!]$. En résumé, $f(n+1) \in [\![0, n+1]\!] \setminus [\![0, n]\!]$ et donc $f(n+1) = n+1$.

On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$. Donc, $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Réciproquement, $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ est une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n, $f(n) \leqslant n$. Le problème posé admet une solution et une seule, à savoir $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

