3

Ensembles et logique

Au programme

- √ Connaître les notions d'éléments d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion.
- √ Connaître les notions de réunion, d'intersection, de complémentaire.
- √ S'approprier les notations ensemblistes $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$, ...
- √ Découvrir les objets de base de la logique : proposition, négation, « et » et « ou », implication, équivalence, « pour tout » et « il existe ».
- √ Mettre en place quelques types de raisonnement classiques.

Table des matières

Dans les deux chapitres précédents, un certain nombre de notations ensemblistes ont été définies et utilisées ou un certain nombre de types de raisonnement (par exemple, le raisonnement par l'absurde) ont été mis en œuvre. On en fait un récapitulatif général.

Ce chapitre peut être étudié à n'importe quel moment de l'année une fois que l'on pense avoir suffisamment utilisé des symboles comme $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$, ..., ou effectué un certain nombre de raisonnements types. Nous avons décidé de le placer juste après l'étude des ensembles de nombres.

I Vocabulaire ensembliste

A Appartenance

Définition 1

Quand un élément x appartient à un ensemble E, on écrit $x \in \mathrm{E}$, ce qui se lit « l'élément x appartient à l'ensemble E ».

Quand un élément x n'appartient pas à un ensemble E, on écrit $x \notin \mathrm{E}$, ce qui se lit « l'élément x n'appartient pas à l'ensemble E ».

Ainsi, $3 \in \mathbb{N}$, $-1 \in \mathbb{Q}$ ou aussi dans le plan, $\mathrm{A} \in (\mathrm{AB})$ ce qui se lit « le point A appartient à la droite (AB) ».
Mais on a aussi, $-4 \notin \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ ou $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ou $+\infty \notin \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}$, on a par exemple $1 \notin]1,4]$.
Dans le plan, quand un point M n'appartient pas à une droite (Δ), on écrit $\mathrm{M} \notin (\Delta)$.

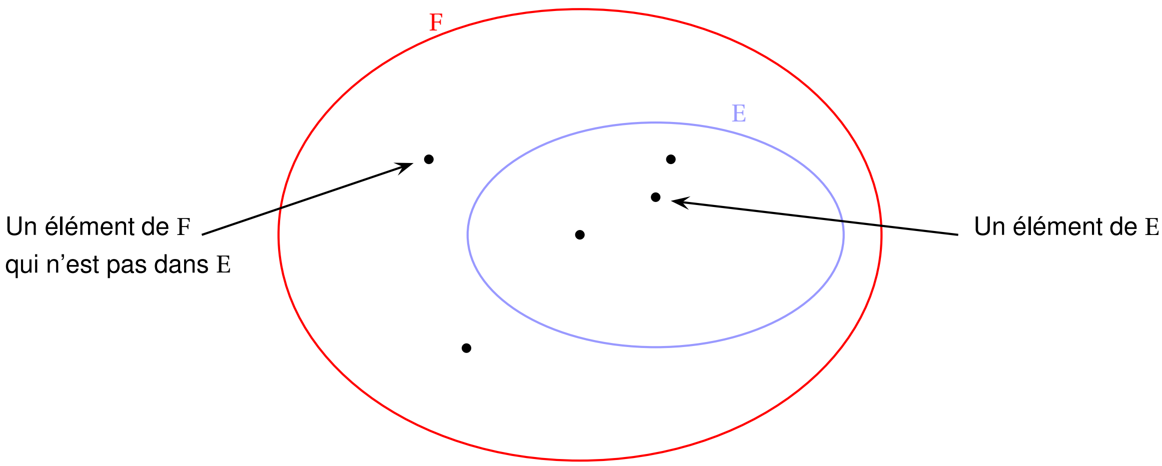
B Inclusion

Définition 2

Quand tous les éléments d'un ensemble E appartiennent à un ensemble F, on dit que E est **inclus** (on dit aussi contenu) dans F et on écrit $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$. On dit alors que l'ensemble E est un **sous-ensemble** ou une **partie** de l'ensemble F.

Quand un ensemble E n'est pas inclus (ou pas contenu) dans un ensemble F, c'est-à-dire quand au moins un des éléments de E n'appartient pas à F, on écrit $\mathrm{E} \not\subset \mathrm{F}$.

On peut schématiser l'inclusion $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$ par un « diagramme de VENN » (John VENN est un mathématicien britannique ayant vécu fin XIXème siècle, début XXème siècle) :



Comme premier exemple d'inclusions, on rappelle que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Dans le plan, la phrase « le segment $[\mathrm{MN}]$ est contenu dans la droite (MN) » s'écrit $[\mathrm{MN}] \subset (\mathrm{MN})$.

On a vu aussi que $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$ car par exemple, le nombre $\sqrt{2}$ est un élément de $\mathbb{R}$ qui n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. De manière générale,

montrer que E est inclus dans F, c'est montrer que tous les éléments de E sont dans F,

et

montrer que E n'est pas inclus dans F, c'est montrer qu'il existe un élément de E qui n'est pas dans F.

Un ensemble E est toujours inclus dans lui-même (pour tout ensemble E, $E \subset E$). Ainsi, $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$. Quand on veut écrire qu'un ensemble E est contenu dans un ensemble F mais ne lui est pas égal, on dispose de la notation $E \underset{\neq}{\subset} F$, ce qui se lit « E est inclus strictement dans F ». Par exemple, $\mathbb{Q} \underset{\neq}{\subset} \mathbb{R}$.

Il ne faut pas confondre les deux symboles $\in$ et $\subset$. Par exemple, $2 \in \mathbb{N}$ est correct (et signifie que 2 est un élément de $\mathbb{N}$ c'est-à-dire un entier) et $2 \subset \mathbb{N}$ n'est pas correct (car 2 n'est pas une partie de $\mathbb{N}$).
De même, $\{2\} \subset \mathbb{N}$ est correct (car l'ensemble $\{2\}$ est une partie de $\mathbb{N}$) et $\{2\} \in \mathbb{N}$ n'est pas correct (car $\{2\}$ n'est pas un élément de $\mathbb{N}$ ou encore $\{2\}$ n'est pas un entier mais un ensemble contenant un entier).

C Réunion et intersection

Dans la définition qui suit, on emploie le mot **ou**. Ce mot a deux significations en français. Il y a le « ou exclusif » qui signifie soit l'un, soit l'autre mais pas les deux comme dans la phrase « cet après-midi, j'irai à la plage ou au cinéma » (on ne peux pas aller en même temps à la plage et au cinéma). Il y a aussi le « ou inclusif » qui signifie soit l'un, soit l'autre, soit les deux comme dans la phrase « tous les tricheurs (tricheuses) ou les bavard(e)s seront puni(e)s ». Dans cette dernière phrase, quelqu'un qui est tricheur (tricheuse) et bavard(e) sera effectivement puni(e).

Le mot « ou » utilisé dans la définition suivante est le « ou inclusif » : soit l'un, soit l'autre, soit les deux.

Définition 3

Soit E un ensemble. Soient A et B deux sous-ensembles de E

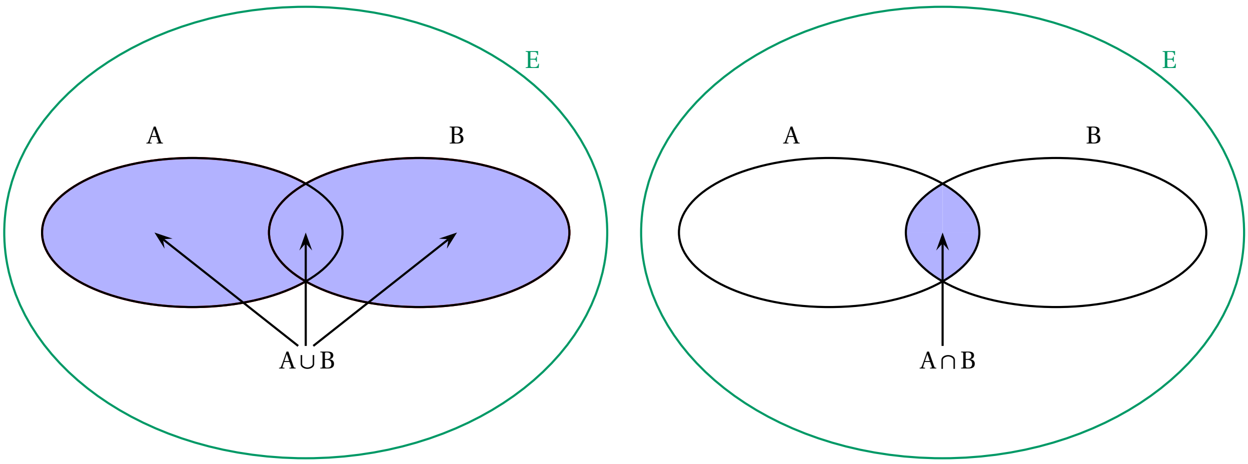
La **réunion** de A et B est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à au moins une des deux parties A et B, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A **ou** à B. Elle note $A \cup B$.

L'**intersection** de A et B est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à la fois à A et à B, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A **et** à B. Elle note $A \cap B$.

Par exemple, si $E = \mathbb{R}$, $[2,4] \cup [3,5[= [2,5[$ et $[2,4] \cap [3,5[= [3,4]$. Ensuite, l'ensemble des réels x tels que $x < -1$ ou $x \geqslant 3$ est $]-\infty,-1[\cup [3,+\infty[$.

Dans le plan, si A, B et C sont trois points deux à deux distincts et non alignés, $(AB) \cap (AC) = \{A\}$.

De nouveau, on peut visualiser l'intersection et la réunion de deux parties A et B d'un ensemble E avec un diagramme de VENN :



Parfois, certains ensembles n'ont rien en commun ou encore leur intersection est vide. L'ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'**ensemble vide** et se note $\varnothing$.

Définition 4

Soit E un ensemble. Soient A et B deux sous-ensembles de E

A et B sont **disjoints** si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

Par exemple, dans $\mathbb{R}$, $]-\infty, 0[$ et $[0, +\infty[$ sont des parties disjointes de $\mathbb{R}$ ($]-\infty, 0[\cap[0, +\infty[=\varnothing$). Dans $\mathbb{N}$, si A est l'ensemble des entiers pairs et B l'ensemble des entiers impairs, A et B sont disjoints.

Dans le plan, si (D_1) et (D_2) sont deux droites strictement parallèles, alors les droites (D_1) et (D_2) sont disjointes : $(D_1) \cap (D_2) = \varnothing$.

D Complémentaire d'une partie

Définition 5

Soit E un ensemble. Soit A un sous-ensemble de E

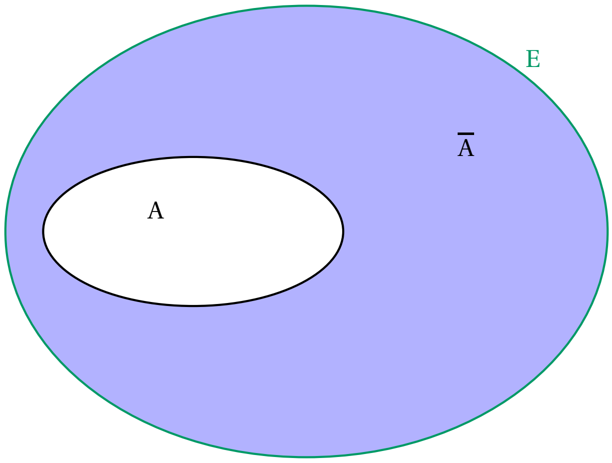
Le **complémentaire** de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. Le complémentaire de A dans E se note $E \setminus A$ (qui se lit « E privé de A ») ou aussi $\overline{A}$.

Par exemple, dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus [-1, 1] =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ ou aussi $\overline{[-1, 1]} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Dans $\mathbb{N}$, si A est l'ensemble des nombres pairs, alors $\mathbb{N} \setminus A$ est l'ensemble des nombres impairs.

Dans le plan, soient A et B deux points distincts. L'ensemble $\{A\}$ (ensemble contenant un seul élément à savoir le point A) est contenu dans la droite (AB) ($\{A\} \subset (AB)$). La droite (AB) privée du point A s'écrit alors $(AB) \setminus \{A\}$.

De nouveau, on peut visualiser le complémentaire d'une partie avec un diagramme de VENN :



II Eléments de logique

A Propositions

Définition 6

Une proposition (on dit aussi une affirmation) est une phrase qui peut être vraie ou fausse.

La proposition (ou l'affirmation) $2+3=5$ est une proposition vraie et la proposition (ou l'affirmation) $2+3=4$ est une proposition fausse.

Les phrases « tout nombre premier est impair » et « tout nombre impair est premier » sont des propositions fausses. La première est fausse car 2 est un nombre premier et 2 n'est pas impair. La deuxième est fausse car 9 est un nombre impair et 9 n'est pas un nombre premier.

B Négation d'une proposition

Il s'agit de donner le contraire d'une phrase et ce n'est pas toujours facile. La négation d'une proposition P est la proposition qui est vraie quand P est fausse et fausse quand P est vraie.

Dans le plan, si M est un point et (Δ) est une droite, la négation de la proposition « $M \in (\Delta)$ » (qui est une phrase vraie ou fausse suivant que M appartient ou n'appartient pas à (Δ)) est la proposition $M \notin (\Delta)$.

Dans $\mathbb{R}$, si x est un réel, la négation de la proposition « $x \leqslant 3$ » est la proposition « $x > 3$ » (le contraire de $\leqslant$ est $>$) et n'est pas $x \geqslant 3$.

La négation de l'affirmation « ce chat est blanc » est tout simplement « ce chat n'est pas blanc » et n'est par exemple pas « ce chat est noir ».

C « et » et « ou »

Définition 7

Si P et Q sont deux propositions, la proposition « P **et** Q » est vraie quand les deux propositions P et Q sont vraies et est fausse sinon.

Par exemple, dans le plan, si A, B et C sont trois points deux à deux distincts et non alignés et M est un point, la proposition « $M \in (AB)$ et $M \in (AC)$ » est la proposition « $M \in (AB) \cap (AC)$ » ou encore la proposition « $M = A$ ».

Dans $\mathbb{N}$, la proposition « $7 < 2^3$ et $17 < 2^4$ » est une proposition fausse car au moins une des deux affirmations est fausse (la proposition « $17 < 2^4$ » est fausse).

Définition 8

Si P et Q sont deux propositions, la proposition « P **ou** Q » est vraie quand au moins une des deux propositions P ou Q est vraie et est fausse sinon. On peut aussi dire que la proposition « P ou Q » est fausse si et seulement si P et Q sont fausses.

Ainsi, dans $\mathbb{R}$, si x est un réel, la proposition « $-1 \leqslant x \leqslant 2$ ou $0 \leqslant x \leqslant 3$ » est vraie si et seulement si la proposition « $-1 \leqslant x \leqslant 3$ » est vraie. Par exemple, quand $-1 \leqslant x < 0$, la proposition « $-1 \leqslant x \leqslant 2$ » est vraie et la proposition « $0 \leqslant x \leqslant 3$ » est fausse. Donc, la proposition « $-1 \leqslant x \leqslant 2$ ou $0 \leqslant x \leqslant 3$ » est vraie. De même, si $0 \leqslant x \leqslant 2$, la proposition « $-1 \leqslant x \leqslant 2$ » est vraie et la proposition « $0 \leqslant x \leqslant 3$ » est vraie. Donc, la proposition « $-1 \leqslant x \leqslant 2$ ou $0 \leqslant x \leqslant 3$ » est vraie.

Dans $\mathbb{R}$, la proposition « $x \leqslant 2$ » s'écrit plus explicitement « $x < 2$ **ou** $x = 2$ ». La proposition « $x \leqslant 2$ » est vraie quand la proposition « $x < 2$ » est vraie mais aussi quand la proposition « $x = 2$ » est vraie (et fausse quand la proposition $x > 2$ est vraie). Ainsi, on peut écrire $2 \leqslant 3$ (car $2 < 3$) et aussi $3 \leqslant 3$ (car $3 = 3$).

Donner la négation d'une proposition contenant le mot « et » ou le mot « ou » n'est pas facile.

Par exemple, dans le plan, la négation de la proposition « $M \in (AB)$ **et** $M \in (AC)$ » est la proposition « $M \notin (AB)$ **ou** $M \notin (AC)$ ».
Dans $\mathbb{N}$, la négation de la proposition « l'entier n est multiple de 3 ou multiple de 4 » est la proposition « n n'est pas multiple de 3 et n n'est pas multiple de 4 » ou encore la proposition « n n'est ni multiple de 3, ni multiple de 4 ».

On peut résumer en disant que **le contraire d'une proposition contenant « et » est une proposition contenant « ou » et inversement**.

D Les quantificateurs « pour tout » et « il existe »

Beaucoup de propositions dépendent d'une variable (qui peut être un réel x, un entier n, un nombre premier p, un point du plan M, un triangle du plan ABC ...).

Par exemple, « $x^2+1 \neq 0$ », « $x^2-1=0$ », « $2n+1$ est un nombre premier », « $M \in (AB)$ », « si $BC^2 = AB^2+AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A » (dans cette dernière phrase, la variable est un triangle ABC ou aussi les variables sont trois points A, B et C) ...

1 Le quantificateur universel « pour tout »

Quand tous les éléments d'un ensemble vérifient une certaine propriété, on emploie l'expression « **pour tout** » ou « **quel que soit** ».

• La phrase « pour tout réel x, $x^2+1 \neq 0$ » (ou aussi « quel que soit le réel x, $x^2+1 \neq 0$ ») est une phrase vraie.

• La phrase « pour tout réel x, $x^2-1=0$ » (ou aussi « quel que soit le réel x, $x^2-1=0$ ») est une phrase fausse.

• La phrase « pour tout triangle non aplati ABC, si $BC^2 = AB^2+AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A » est une phrase vraie. C'est ce que l'on appelle au collège, la réciproque du théorème de PYTHAGORE.

L'expression « **pour tout** » (ou « **quel que soit** ») est appelée le **quantificateur universel**.

Schémas de démonstration.

Schéma 1. Pour montrer qu'une propriété est vraie pour tout élément x d'un ensemble E,

- on se donne un élément x de E par la phrase « soit x un élément de E »,
- on démontre la propriété pour cet élément x quelconque mais fixé,
- on conclut que la propriété est vraie pour tout élément x par la phrase « pour tout x de E, ... ».

Par exemple, montrons que « pour tout réel x, $x^2+1 \neq 0$ » est une phrase vraie.

Soit x un réel.
x^2 est un réel positif puis x^2+1 est un réel supérieur ou égal à 1 et en particulier, x^2+1 n'est pas nul.

On a montré que pour tout réel x, $x^2+1 \neq 0$ (qui est une version abrégée de : « pour tout réel x, $x^2+1 \neq 0$ » est une phrase vraie).

Pour montrer qu'une propriété est vraie pour tout élément d'un ensemble,
il ne suffit pas de vérifier la propriété sur un exemple.
Ainsi, si on constate que pour $x=2$, $x^2+1 \neq 0$ car $x^2+1=5$, cela ne montre pas du tout que pour une autre valeur du réel x, on a aussi $x^2+1 \neq 0$. Il faut trouver une bonne raison pour que $x^2+1 \neq 0$, raison valable pour toute valeur du réel x.

Schéma 2. Pour montrer qu'une phrase commençant par « pour tout élément x de E » est fausse,

- on fournit un élément précis x_0 de E pour lequel la propriété est fausse.

Par exemple, montrons que « pour tout réel x, $x^2-1=0$ » est une phrase fausse.

Soit $x_0=2$. Alors, $x_0^2-1=2^2-1=3$ et donc $x_0^2-1 \neq 0$.

On a montré que « pour tout réel x, $x^2-1=0$ » est une phrase fausse.

2 Le quantificateur existentiel « il existe »

Quand une certaine propriété est vraie pour au moins un élément x, on emploie l'expression « **il existe** ».

• La phrase « il existe un réel x tel que $x^2-1=0$ » est une phrase vraie. Elle signifie que l'égalité $x^2-1=0$ est vraie pour au moins une valeur du réel x (à savoir $x=1$).

• La phrase « il existe un réel x tel que $x^2+1=0$ » est une phrase fausse.

L'expression « **il existe** » est appelée le **quantificateur existentiel**.

Schéma de démonstration.

Pour montrer qu'il un élément x d'un ensemble E tel que qu'une certaine propriété soit vraie

- on fournit un élément x_0 de E précis tel que la propriété soit vraie.

Par exemple, montrons que « il existe un réel x tel que $x^2-1=0$ » est une phrase vraie.

Soit $x_0=1$. Alors, $x_0^2-1=1^2-1=0$ et donc $x_0^2-1=0$.

On a montré qu'il existe un réel x tel que $x^2-1=0$ (qui est une version abrégée de : « il existe un réel x tel que $x^2-1 \neq 0$ » est une phrase vraie).

Il est essentiel de comprendre qu'une phrase comme $x^2-1=0$ ne veut rien dire. Il faut absolument préciser si cette égalité est vraie pour tout les réels x : « pour tout réel x, $x^2-1=0$ » (ce qui est faux), ou si elle vraie pour au moins un réel x : « il existe un réel x tel que $x^2-1=0$ » (ce qui est vrai), ou s'il s'agit d'une équation d'inconnue le réel x ...

E Equivalence

Définition 9

Deux propositions **équivalentes** sont deux propositions qui sont simultanément vraies et simultanément fausses.

Quand deux propositions P et Q sont équivalentes, on écrit « P **équivaut à** Q » ou aussi « P **si et seulement si** Q ».

Par exemple, le théorème de PYTHAGORE dit que pour tout triangle ABC non aplati ABC, « ABC est rectangle en A équivaut à $\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2$ » ou aussi « ABC est rectangle en A si et seulement si $\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2$ ».

Quand on écrit que pour tout triangle ABC du plan, ABC rectangle en A équivaut à $\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2$, cela signifie :

- que l'affirmation « ABC est un triangle rectangle en A » est vraie quand l'affirmation « $\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2$ » est vraie,
- et que l'affirmation « $\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2$ » est vraie quand l'affirmation « ABC est un triangle rectangle en A » est vraie,
- et que l'affirmation « ABC est un triangle rectangle en A » est fausse quand l'affirmation « $\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2$ » est fausse
- et que l'affirmation « $\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2$ » est fausse quand l'affirmation « ABC est un triangle rectangle en A » est fausse.

Signalons qu'une équivalence peut s'écrire en abrégé avec le symbole $\Leftrightarrow$.

Par exemple : pour tout réel x, $\left(x^2-1=0\right) \Leftrightarrow (x=1 \text{ ou } x=-1)$. L'utilisation du symbole $\Leftrightarrow$ se généralisera petit à petit au fur et à mesure de votre avancée au lycée et dans les études supérieures et en fonction de vos différent(e)s professeur(e)s. Dans les chapitres ultérieurs, nous utiliserons peu le symbole $\Leftrightarrow$ et si nous l'utilisons, nous donnerons toujours une variante pour la rédaction n'utilisant pas $\Leftrightarrow$.

F Implication

1 Définition d'une implication

Une implication est une phrase du type « **Si** on a une propriété P, **alors** on a une propriété Q ». Dans une telle phrase, P est l'**hypothèse** et Q est la **conclusion**. Une implication s'écrira un jour de manière abrégée $\Rightarrow$ (ou $\Leftarrow$). Nous utiliserons par moment ce symbole dans les lignes qui suivent pour alléger les écritures puis nous n'utiliserons plus ce symbole dans le cours de seconde.

2 Réciproque d'une implication

Définition 10

La **réciproque** de l'implication $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ est l'implication $\mathrm{Q} \Rightarrow \mathrm{P}$ (ou aussi $\mathrm{P} \Leftarrow \mathrm{Q}$).

Par exemple, pour tout réel x, la réciproque de l'implication « si $x=1$, alors $x^2=1$ » (en abrégé : $x=1 \Rightarrow x^2=1$) qui est une implication vraie, est l'implication « si $x^2=1$, alors $x=1$ » (en abrégé, $x^2=1 \Rightarrow x=1$) qui est une implication fausse car $x^2=1$ n'impose pas à x d'être égal à 1, celui-ci pouvant aussi être égal à -1.

Une implication $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ et sa réciproque $\mathrm{Q} \Rightarrow \mathrm{P}$ n'ont aucun rapport. Chacune des deux implications peut être vraie ou fausse indépendamment du fait que l'autre soit vraie ou fausse.

3 Lien avec l'équivalence

Une équivalence du type $\mathrm{P} \Leftrightarrow \mathrm{Q}$ signifie deux implications : l'implication $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ et sa réciproque $\mathrm{Q} \Rightarrow \mathrm{P}$ (qui s'écrit aussi $\mathrm{P} \Leftarrow \mathrm{Q}$).

Par exemple, quand on écrit $\left(x^2=1\right) \Leftrightarrow (x=1 \text{ ou } x=-1)$, cela signifie que si $x^2=1$, alors $x=1$ ou $x=-1$ (lecture de gauche à droite) et si $x=1$ ou $x=-1$ alors $x^2=1$ (lecture de droite à gauche).

De manière générale,

vérifier qu'une équivalence $\mathrm{P} \Leftrightarrow \mathrm{Q}$ est vraie, c'est vérifier que chacune des deux implications $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ et $\mathrm{Q} \Rightarrow \mathrm{P}$ est vraie.

4 Condition nécessaire, condition suffisante

On peut exprimer différemment l'implication « si $x=1$ alors $x^2=1$ » sous la forme : pour que $x=1$, il est **nécessaire** (ou obligatoire) que $x^2=1$ et pour que $x^2=1$, il est **suffisant** que $x=1$. On peut dire aussi que l'égalité $x^2=1$ est une **condition nécessaire** à l'égalité $x=1$ et que l'égalité $x=1$ est une **condition suffisante** à l'égalité $x^2=1$.

De manière générale, dans l'implication $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$, Q est une **condition nécessaire** à P et P est une **condition suffisante** à Q.

L'équivalence de deux propositions est alors une **condition nécessaire et suffisante**.

5 Contraposée d'une implication

La notion de contraposée d'une implication n'est pas à proprement parler au programme de seconde. Mais un certain nombre de raisonnement tenus pendant l'année se font **par contraposition**. Nous en parlons donc un peu.

Définition 11

La **contraposée** de l'implication « $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ » est l'implication « négation de $\mathrm{Q} \Rightarrow$ négation de P » (ou aussi « contraire de $\mathrm{Q} \Rightarrow$ contraire de P ».

Par exemple, la contraposée de l'implication « si $x^2 \neq 1$, alors $x \neq 1$ » est l'implication « si $x = 1$, alors $x^2 = 1$ ».

L'intérêt de la notion de contraposée réside dans le théorème suivant :

Theoreme 1

Une implication est équivalente à sa contraposée.

Ainsi, montrer qu'une implication est vraie peut se faire en montrant que sa contraposée est vraie.

Par exemple, il semble délicat de vérifier directement que si x est un réel tel que $x^2 \neq 1$, alors x est nécessairement un réel différent de 1. Mais il est immédiat que la contraposée de cette implication, à savoir « $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ », est vraie. Ceci montre que l'implication « $x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$ » est vraie.

III Quelques types de raisonnement pour faire des démonstrations

A Le raisonnement par l'absurde

On veut montrer qu'une proposition P est vraie. **On suppose (par l'absurde) que cette proposition P est fausse** ou encore on suppose que la négation (ou le contraire) de P est vraie. On se rend compte que cette hypothèse entraine une phrase évidemment fausse (ou aussi une égalité ou une phrase impossible ou aussi une contradiction).

On a par exemple montré par l'absurde dans le chapitre précédent que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. On a commencé par supposer le contraire à savoir $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ou encore $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels non nuls et $\dfrac{a}{b}$ fraction irréductible. On est parvenu à l'égalité $a^2 = 2b^2$ puis on a constaté que la fraction $\dfrac{a}{b}$ n'était pas irréductible car a et b étaient divisibles par 2. Devant cette contradiction, nous en avons déduit que la proposition « $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ » était fausse et donc que la proposition » $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ » était vraie.

B Le raisonnement par contraposition

On veut montrer une implication du type « si P alors Q ». Il peut s'averer plus facile de **montrer sa contraposée** : « si contraire de Q, alors contraire de P ».

Par exemple, on veut montrer que pour tout entier naturel n, si n^2 est pair, alors n est pair. Il est plus facile de montrer sa contraposée : si n est impair, alors n^2 est impair.
En effet, soit n un entier naturel impair. Il existe un entier naturel k tel que $n = 2k+1$. Mais alors

$$n^2 = (2k+1)^2 = (2k+1)(2k+1) = 4k^2 + 2k + 2k + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1 = 2 \times 2k(k+1) + 1$$

où de plus $2k(k+1)$ est un entier naturel. Ceci montre que n^2 est un entier impair.

On a montré que pour tout entier naturel n, si n est impair, alors n^2 est impair. Par contraposition, on a donc aussi montré que pour tout entier naturel n, si n^2 est pair, alors n est pair.

C Le raisonnement par contre-exemple

Il s'agit de montrer qu'une phrase du type « pour tout élément x de E, $\mathrm{P}(x)$ » (par exemple, pour tout réel x, $x^2 - 1 \neq 0$) est une phrase fausse. **On fournit un conte-exemple.**

Par exemple, pour montrer que la phrase « pour tout réel x, $x^2 - 1 \neq 0$ » est une phrase fausse, on constate que quand x est le réel 1, on a $x^2 - 1 = 0$. On a fourni un conte-exemple précis et on a donc montré que la phrase « pour tout réel x, $x^2 - 1 \neq 0$ » est une phrase fausse.

D Le raisonnement par disjonction des cas

De nouveau, on veut montrer qu'une certaine propriété est vraie pour tout élément x d'un ensemble E. On découpe E en sous-ensembles deux à deux disjoints comme par exemple un sous-ensemble A de E et son complémentaire $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$. Le découpage crée **les cas**.

Par exemple, montrons que pour tout entier naturel n, l'entier $(n+1)(n+4)$ est un entier pair. Soit n un entier naturel. On envisage deux cas disjoints.

1er cas. Supposons n pair. Il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$. On a alors

$$(n+1)(n+4) = (2k+1)(2k+4) = 2 \times (2k+1)(k+2)$$

où de plus $(2k+1)(k+2)$ est un entier naturel. Donc, dans le cas où n est pair, $(n+1)(n+4)$ est un entier pair.

2ème cas. Supposons n impair. Il existe un entier naturel k tel que $n = 2k+1$. On a alors

$$(n+1)(n+4) = (2k+2)(2k+5) = 2 \times (k+1)(2k+5)$$

où de plus $(k+1)(2k+5)$ est un entier naturel. Donc, dans le cas où n est impair, $(n+1)(n+4)$ est un entier pair.

Finalement, on a montré dans tous les cas que $(n+1)(n+4)$ est un entier pair et on a donc montré que pour tout entier naturel n, $(n+1)(n+4)$ est un entier pair.