# Planche n° 2. Révisions. Espaces vectoriels. Corrigé

**Exercice n° 1**

$\Leftarrow$) Si $F \subset G$ ou $G \subset F$ alors $F \cup G = G$ ou $F \cup G = F$. Dans les deux cas, $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

$\Rightarrow$) Supposons que $F \not\subset G$ et que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et montrons que $G \subset F$.
$F$ n'est pas inclus dans $G$ et donc il existe $x$ élément de $E$ qui est dans $F$ et pas dans $G$.
Soit $y$ un élément de $G$. $x + y$ est dans $F \cup G$ car $x$ et $y$ y sont et car $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
Si $x + y$ est élément de $G$ alors $x = (x + y) - y$ l'est aussi ce qui est exclu. Donc, $x + y$ est élément de $F$ et par suite $y = (x + y) - x$ est encore dans $F$. Ainsi, tout élément de $G$ est dans $F$ et donc $G \subset F$.

**Exercice n° 2**

$\Leftarrow$) Immédiat .

$\Rightarrow$) On raisonne par récurrence sur $n$.
Pour $n = 2$, c'est l'exercice n° 1.
Soit $n \geqslant 2$. Supposons que toute réunion de $n$ sous-espaces de $E$ est un sous-espace de $E$ si et seulement si l'un de ces sous-espaces contient tous les autres.
Soient $F_1$,..., $F_n$, $F_{n+1}$ $n + 1$ sous-espaces vectoriels de $E$ tels que $F_1 \cup \ldots \cup F_{n+1}$ soit un sous-espace vectoriel de $E$. Posons $F = F_1 \cup \ldots \cup F_n$.

- Si $F_{n+1}$ contient $F$, c'est fini.
- Si $F_{n+1} \subset F$, alors $F = F_1 \cup \ldots \cup F_n = F_1 \cup \ldots \cup F_n \cup F_{n+1}$ est un sous-espace vectoriel de $E$. Par hypothèse de récurrence, $F$ est l'un des $F_i$ pour un certain $i$ élément de $[\![1, n]\!]$. $F_i = F$ contient également $F_{n+1}$ et contient donc tous les $F_j$ pour $j$ élément de $[\![1, n + 1]\!]$.
- Supposons dorénavant que $F \not\subset F_{n+1}$ et que $F_{n+1} \not\subset F$ et montrons que cette situation est impossible.

  Il existe un vecteur $x$ qui est dans $F_{n+1}$ et pas dans $F$ et un vecteur $y$ qui est dans $F$ et pas dans $F_{n+1}$.
  Soit $\lambda$ un élément de $\mathbb{K}$. $y - \lambda x$ est un élément de $F \cup F_{n+1}$ (puisque $F \cup F_{n+1}$ est un sous-espace) mais $y - \lambda x$ n'est pas dans $F_{n+1}$ car alors $y = (y - \lambda x) + \lambda x$ y serait ce qui n'est pas.
  Donc $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $y - \lambda x \in F$. On en déduit que pour tout scalaire $\lambda$, il existe un indice $i(\lambda)$ élément de $[\![1, n]\!]$ tel que $y - \lambda x \in F_{i(\lambda)}$. Remarquons enfin que si $\lambda \neq \mu$ alors $i(\lambda) \neq i(\mu)$. En effet, si pour $\lambda$ et $\mu$ deux scalaires distincts donnés, il existe un indice $i$ élément de $[\![1, n]\!]$ tel que $y - \lambda x$ et $y - \mu x$ soient dans $F_i$, alors $x = \dfrac{(y - \mu x) - (y - \lambda x)}{\lambda - \mu}$ est encore dans $F_i$ et donc dans $F$, ce qui n'est pas.
  Comme $\mathbb{K}$ est infini et que l'ensemble des indices ne l'est pas, on vient de montrer que cette dernière situation n'est pas possible.

Le résultat est démontré par récurrence.

**Exercice n° 3**

**1ère solution.** $F$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur $E$ et est donc un hyperplan de $E$.
Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément de $F \cap G$. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = (\lambda, \ldots, \lambda)$ et $n\lambda = 0$ et donc $\lambda = 0$ puis $x = 0$. Donc $F \cap G = \{0\}$. De plus $\dim(F) + \dim(G) = n - 1 + 1 = n = \dim(E) < +\infty$ et donc $F \oplus G = E$.

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur de $E$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $x - (\lambda, \ldots, \lambda) \in F \Leftrightarrow (x_1 - \lambda) + \ldots + (x_n - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Le projeté de $x$ sur $G$ parallèlement à $F$ est donc $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right)(1, \ldots, 1)$ et le projeté de $x$ sur $F$ parallèlement à $G$ est $x - \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right)(1, \ldots, 1)$.

**2 ème solution.** Soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $u = (1, \ldots, 1)$ de sorte que $G = \mathrm{Vect}(u)$.

$$\begin{aligned} x - \lambda u \in F &\Leftrightarrow (x_1 - \lambda, \ldots, x_n - \lambda) \in F \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i - \lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathbb{K}^n$, $\exists!\lambda\in\mathbb{K}/$, $x-\lambda u\in F$ (à savoir $\lambda=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$). Donc $\mathbb{R}^n=F\oplus G$. De plus, le projeté de $x$ sur $G$ parallèlement à $F$ est $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\right)(1,\ldots,1)$ et le projeté de $x$ sur $F$ parallèlement à $G$ est $x-\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\right)(1,\ldots,1)$.

**3ème solution** (dans le cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$). On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Posons $\overrightarrow{u}=(1,\ldots,1)$.
On a $F=\overrightarrow{u}^{\perp}=G^{\perp}$. Par suite, $F$ est le supplémentaire orthogonal de $G$.

Soit $x\in E$. Le projeté orthogonal de $x$ sur $G$ est $\dfrac{\langle x,u\rangle}{\|u\|^2}u=\dfrac{x_1+\ldots+x_n}{n}(1,\ldots,1)$.

**Exercice n° 4**

**1)** La matrice de la famille $(e_1,e_2,e_3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $A=\begin{pmatrix}3&1&7\\0&5&5\\1&0&2\\-2&-1&1\end{pmatrix}$. Soit $A'=\begin{pmatrix}0&5&5\\1&0&2\\-2&-1&1\end{pmatrix}$ la matrice extraite de $A$, constituée des trois dernières lignes de $A$.
En développant le déterminant de $A'$ suivant sa première colonne, on obtient $\det(A')=-10-2\times10=-30\neq0$. $A'$ est inversible et donc $A$ est de rang 3. On en déduit que la famille $(e_1,e_2,e_3)$ est libre.

**2)**

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&-1\\1&1&-1&1\\1&-1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&-2\\0&0&-2&0\\0&-2&0&0\end{vmatrix}\text{ (pour }2\leqslant i\leqslant4,\ L_i\leftarrow L_i-L_1)$$
$$=\begin{vmatrix}0&0&-2\\0&-2&0\\-2&0&0\end{vmatrix}=8\neq0.$$

Donc la famille $(e_1,e_2,e_3,e_4)$ est une famille libre (et donc une base de $E$).

**3)** Notons $(u_1,u_2,u_3,u_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
La famille $(e_1,e_2,e_3,e_4)=(u_3,u_4,u_1,u_2)$ a même rang que la famille $(u_1,u_2,u_3,u_4)$ c'est-à-dire 4. La famille $(e_1,e_2,e_3,e_4)$ est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

**4)** La matrice de la famille $(e_2,e_1,e_3,e_4)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $\begin{pmatrix}1&2&4&1\\1&-1&1&-2\\1&3&5&2\\1&1&3&0\end{pmatrix}$. Cette matrice a même rang que les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&-3&-3&-3\\1&1&1&1\\1&-1&-1&-1\end{pmatrix}\ (e_5=e_1-2e_2,\ e_6=e_3-4e_2\text{ et }e_7=e_4-e_2)$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&-3&0&0\\1&1&0&0\\1&-1&0&0\end{pmatrix}\ (e_8=e_6-e_5\text{ et }e_9=e_7-e_5).$$

La matrice ci-dessus est de rang 2. Il en est de même de la famille $(e_1,e_2,e_3,e_4)$ qui est en particulier liée. La nullité de la troisième colonne fournit $0=e_8=e_6-e_5=(e_3-4e_2)-(e_1-2e_2)=-e_1-2e_2+e_3$ et donc $e_3=e_1+2e_2$. La nullité de la quatrième colonne fournit $0=e_9=e_7-e_5=(e_4-e_2)-(e_1-2e_2)=e_4+e_2-e_1$ et donc $e_4=e_1-e_2$.

**Exercice n° 5**

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{Q}^3$.

$$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0\Rightarrow\left(a+b\sqrt{2}\right)^2=\left(-c\sqrt{3}\right)^2\Rightarrow a^2+2b^2+2ab\sqrt{2}=3c^2\Rightarrow 2ab\sqrt{2}\in\mathbb{Q}.$$

Mais $\sqrt{2}$ est irrationnel donc $ab=0$.
Si $b=0$, puisque $a+c\sqrt{3}=0$ et que $\sqrt{3}$ est irrationnel, on en déduit que $c=0$ (sinon $\sqrt{3}$ serait rationnel) puis $a=0$ et finalement $a=b=c=0$.

Si $a = 0$, il reste $2b^2 = 3c^2$. Mais $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ est irrationnel (dans le cas contraire, il existe deux entiers $p$ et $q$ non nuls tels que $3q^2 = 2p^2$ et par exemple l'exposant du nombre premier 2 n'a pas la même parité dans les deux membres de l'égalité ce qui est impossible) et donc $b = c = 0$ puis encore une fois $a = b = c = 0$.

On a montré que $\forall(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3$, $(a + b\sqrt{2} + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow a = b = c = 0)$. Donc la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille de réels $\mathbb{Q}$-libre.

**Exercice n° 6**

Les fonctions $f_1$, $f_2$ et $f_3$ sont bien définies sur $\mathbb{R}^+$.
Soient $a$, $b$ et $c$ trois réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$.

**Première solution.** Si $a$ est non nul, la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ est équivalente au voisinage de $+\infty$ à $a\ln x$ et ne peut donc être égale à la fonction nulle. Donc $a = 0$. Puis si $b$ est non nul, la fonction $af_1+bf_2+cf_3 = bf_2+cf_3$ est équivalente à $b\ln(\ln x)$ et ne peut être égale à la fonction nulle. Donc $b = 0$. Puis $c = 0$.

**Deuxième solution.** On effectue un développement limité à un ordre suffisant de la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ quand $x$ tend vers 0 :

$f_1(x) = \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$ puis

$$\begin{aligned}f_2(x) = \ln(1+f_1(x)) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)\\ &= x - x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o\left(x^3\right)\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}f_3(x) = \ln(1+f_2(x)) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1 + x - x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o\left(x^3\right)\right) = \left(x - x^2 + \frac{7}{6}x^3\right) - \frac{1}{2}\left(x - x^2\right)^2 + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)\\ &= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 + o\left(x^3\right).\end{aligned}$$

Par suite, $af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) \underset{x\to 0}{=} (a+b+c)x + \left(-\dfrac{a}{2} - b - \dfrac{3c}{2}\right)x^2 + \left(\dfrac{a}{3} + \dfrac{7b}{6} + \dfrac{5c}{2}\right)x^3 + o\left(x^3\right)$. L'égalité $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$ fournit, par identification des parties régulières des développements limités à l'ordre trois en zéro :

$$\left\{\begin{array}{l} a+b+c=0\\ -\dfrac{a}{2} - b - \dfrac{3c}{2} = 0\\ \dfrac{a}{3} + \dfrac{7b}{6} + \dfrac{5c}{2} \end{array}\right. \text{ ou encore } \left\{\begin{array}{l} a+b+c=0\\ a+2b+3c=0\\ 2a+7b+15c=0 \end{array}\right. .$$

Comme $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 7 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, on a donc $a = b = c = 0$.

**Exercice n° 7**

Soient $n$ un entier naturel non nul puis $a_1$,..., $a_n$ $n$ réels deux à deux distincts et $\lambda_1$,..., $\lambda_n$ $n$ réels.

Supposons $\lambda_1 f_{a_1} + \ldots + \lambda_n f_{a_n} = 0$. Soit $i$ un élément de $[\![1,n]\!]$. On a $\lambda_i f_{a_i} = -\displaystyle\sum_{j\neq i} \lambda_j f_{a_j}$ et on ne peut avoir $\lambda_i \neq 0$ car alors le membre de gauche est une fonction non dérivable en $a_i$ tandis que le membre de droite l'est. Par suite, tous les $\lambda_i$ sont nuls et donc la famille $(f_{a_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

On a montré que toute sous-famille finie de la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre et donc la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

**Exercice n° 8**

Soient $a_1 < \ldots < a_n$ $n$ réels deux à deux distincts et $\lambda_1$,..., $\lambda_n$ n réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{a_i} = 0$ $(*)$.

**Première solution.** Supposons par l'absurde qu'il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$. Soit $p = \text{Max}\{i \in [\![1,n]\!]/\ \lambda_i \neq 0\}$. Par définition de $p$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_{a_i} = 0$

Après multiplication des deux membres de cette égalité par $e^{-a_p x}$ puis passage à la limite quand $x$ tend vers $+\infty$, on obtient $\lambda_p = 0$ ce qui est faux. Donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$. Ceci montre que la famille $(f_{a_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

On a montré que toute sous-famille finie de la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre et donc la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

**Deuxième solution.** On note $f$ la fonction apparaissant au premier membre de $(*)$.

$$\begin{aligned} f = 0 &\Rightarrow \forall k \in [\![0,, n-1]\!],\ f^{(k)}(0) = 0 \\ &\Rightarrow \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_1 a_1^k + \ldots + \lambda_n a_n^k = 0. \end{aligned}$$

Le système précédent d' inconnues $\lambda_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, est un système linéaire homogène à $n$ équations et $n$ inconnues. Son déterminant est le déterminant de VANDERMONDE des $a_i$ et est non nul puisque les $a_i$ sont deux à deux distincts. Le système est donc de CRAMER et admet l'unique solution $(0, \ldots, 0)$.

**Troisième solution.** ( dans le cas où on se restreint à démontrer la liberté de la famille $(x \mapsto e^{nx})_{n\in\mathbb{N}}$).

Soient $n_1 < \ldots < n_p$ $p$ entiers naturels deux à deux distincts. Supposons que pour tout réel $x$ on ait $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{n_i x} = 0$. On en déduit que pour tout réel strictement positif $t$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t^{n_i} = 0$ et donc le polynôme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X^{n_i}$ est nul (car a une infinité de racines) ou encore les coefficients du polynôme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X^{n_i}$ à savoir les $\lambda_i$ sont tous nuls.

**Quatrième solution.** (pour les redoublants) L'application $\varphi$ qui à $f$ de classe $C^\infty$ fait correspondre sa dérivée est un endomorphisme de l'espace des fonctions de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $a$ réel donné, $\varphi(f_a) = af_a$ et la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est constituée de vecteurs propres de $\varphi$ (les $f_a$ sont non nulles) associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. On sait qu'une telle famille est libre .

**Exercice n° 9**

Soient $n$ un entier naturel non nul puis $P_1$,..., $P_n$ $n$ polynômes non nuls de degrés respectifs $d_1 < \ldots < d_n$.
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n = 0$. Supposons par l'absurde que les $\lambda_i$ ne soient pas tous nuls et posons $k = \text{Max}\{i \in [\![1, n]\!]/\ \lambda_i \neq 0\}$. On ne peut avoir $k = 1$ car $P_1 \neq 0$ puis

$$\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k = 0 \Rightarrow \lambda_k P_k = -\sum_{i<k} \lambda_i P_i.$$

Cette dernière égalité est impossible car $\lambda_k P_k$ est un polynôme de degré $d_k$ (car $\lambda_k \neq 0$) et $-\displaystyle\sum_{i<k} \lambda_i P_i$ est un polynôme de degré au plus $d_{k-1} < d_k$. Donc tous les $\lambda_k$ sont nuls.
La même démarche tient en remplaçant degré par valuation et en s'intéressant à la plus petite valuation au lieu du plus grand degré.

**Exercice n° 10**

**Première solution.** Chaque $P_k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, est de degré $k + n - k = n$ et est donc dans $\mathbb{R}_n[X]$.
Les polynômes $P_k$, $0 \leqslant k \leqslant n$ ont des valuations deux à deux distinctes et donc constituent une famille libre. Comme de plus $\text{card}(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n} = n + 1 = \dim(E) < +\infty$, la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $E$.

**Deuxième solution.** La matrice carrée $M$ de la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire inférieure. Ses coefficients diagonaux sont tous non nuls car égaux à 1. $M$ est donc inversible et $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $E$.

**Exercice n° 11**

**Unicité.** Soit $i \in [\![0, n]\!]$. $L_i$ doit admettre les $n$ racines deux à deux distinctes $a_j$ où $j$ est différent de $i$ et donc $L_i$ est divisible par le polynôme $\displaystyle\prod_{j\neq i}(X - a_j)$. $L_i$ doit être de degré $n$ et donc il existe un complexe non nul $\lambda$ tel que $L_i = \lambda \displaystyle\prod_{j\neq i}(X - a_j)$.
Enfin $L_i(a_i) = 1$ fournit $\lambda = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}$. Ainsi nécessairement $L_i = \displaystyle\prod_{j\neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$.

**Existence.** Les $L_i$ ainsi définis conviennent.

$$\boxed{\forall i \in [\![0,n]\!],\ L_i = \prod_{j\neq i} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}.}$$

Montrons que la famille $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est libre.
Soient $\lambda_0$,..., $\lambda_n$ $n+1$ nombres complexes tels que $\lambda_0 L_0 + ... + \lambda_n L_n = 0$. En particulier, pour un indice $i$ de $[\![0,n]\!]$ donné, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j(a_i) \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \delta_{i,j} = 0$ et donc $\lambda_i = 0$ au vu des égalités définissant les $L_j$. La famille $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est libre.
De plus les $L_i$ sont tous dans $\mathbb{C}_n[X]$ et vérifient $\text{card}(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n} = n+1 = \dim \mathbb{C}_n[X] < +\infty$. Donc la famille $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Soit $P$ un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à $n$.

On écrit $P$ dans la base $(L_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ : $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j$. En prenant la valeur en $a_i$, $i$ donné dans $[\![0,n]\!]$, on obtient $\lambda_i = P(a_i)$.
D'où l'écriture générale d'un polynôme de degré inférieur ou égal à $n$ dans la base $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ :

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ P = P(a_0)L_0 + ... + P(a_n)L_n.}$$

Mais alors : $(\forall i \in [\![0,n]\!],\ P(a_i) = b_i) \Rightarrow P = b_0 L_0 + ... + b_n L_n$.
Réciproquement le polynôme $P = b_0 L_0 + ... + b_n L_n$ vérifie bien sûr les égalités demandées et est de degré inférieur ou égal à $n$.

Ainsi, il existe un et un seul polynôme de degré inférieur ou égal à $n$ vérifiant $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $P(a_i) = b_i$ à savoir $P_0 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} b_i L_i$.

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $R = (X-a_0)...(X-a_n)$ ($\deg(R) = n+1$).

$$\begin{aligned}
(\forall i \in [\![0,n]\!]\ P(a_i) = b_i) &\Leftrightarrow (\forall i \in [\![0,n]\!]\ P(a_i) = P_0(a_i)) \\
&\Leftrightarrow P - P_0 \text{ admet les } n+1 \text{ racines deux à deux distinctes } a_0, ..., a_n \\
&\Leftrightarrow P - P_0 \text{ est divisible par } R \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{C}[X]/\ P = P_0 + QR.
\end{aligned}$$

Les polynômes cherchés sont les $P_0 + QR$ où $Q$ décrit $\mathbb{C}[X]$.

Reprenons l'exercice à partir de l'étude de l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), \ldots, P(a_n)) \end{array}$.
$\varphi$ est une application de $\mathbb{C}_n[X]$ vers $\mathbb{C}^{n+1}$. Soient $(P,Q) \in (\mathbb{C}_n[X])^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$.

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = ((\lambda P + \mu Q)(a_0), \ldots, (\lambda P + \mu Q)(a_n)) = \lambda (P(a_0), \ldots, P(a_n)) + \mu (Q(a_0), \ldots, Q(a_n)) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q).$$

Ainsi, $\varphi \in \mathscr{L}\left(\mathbb{C}_{n+1}[X], \mathbb{C}^{n+1}\right)$. Soit $P \in \text{Ker}(\varphi)$. Alors, $P(a_0) = \ldots = P(a_n) = 0$ et donc, $P$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n$ admettant au moins $n+1$ racines deux à deux distinctes. On en déduit que $P = 0$. On a montré que $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

$\varphi$ est une application linéaire injective de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$. De plus, $\dim(\mathbb{C}_n[X]) = n+1 = \dim\left(\mathbb{C}^{n+1}\right) < +\infty$. Donc, $\varphi$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$. On en déduit successivement que :

- Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, il existe un et un seul polynôme $L_i$ de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que $\varphi(L_i) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = (\delta_{i,j})_{0\leqslant j\leqslant n}$ à savoir $L_i = \varphi^{-1}\left((\delta_{i,j})_{0\leqslant j\leqslant n}\right)$,
- En notant, $(e_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^{n+1}$, $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est l'image de la base $(e_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ par l'isomorphisme $\varphi^{-1}$. Donc, $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$,
- pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\varphi(P) = (P(a_0), \ldots, P(a_n)) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(a_i) e_i$ et donc

$$P = \varphi^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n} P(a_i) e_i\right) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i.$$

**Exercice n° 12**

**1)** Pour $p$ et $q$ entiers relatifs, posons $I(p,q) = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(p-q)x}\, dx$.

Si $p \neq q$, $I(p,q) = \dfrac{1}{i(p-q)}\left[e^{i(p-q)x}\right]_0^{2\pi} = 0$. Soient alors $p$ et $q$ deux entiers naturels.

Donc si $p \neq q$, $J(p,q) = \dfrac{1}{2}\text{Re}(I(p,q) + I(p,-q)) = 0$ puis $K(p,q) = \dfrac{1}{2}\text{Im}(I(p,-q) - I(p,q)) = 0$ puis $L(p,q) = \dfrac{1}{2}\text{Re}(I(p,-q) - I(p,q)) = 0$.
Si $p = q$, $J(p,p) = 2\pi$ si $p = 0$ et $\pi$ si $p \neq 0$ puis $K(p,p) = 0$ puis $L(p,p) = \pi$ si $p \neq 0$ et $0$ si $p = 0$.

**2)** Sur l'espace $E$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $2\pi$-périodiques, l'application qui à $(f,g) \in E^2$ associe $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$ est classiquement un produit scalaire. La famille de fonctions proposée est une famille orthogonale pour ce produit scalaire et ne contient pas le vecteur nul de $E$. Cette famille est donc est libre.

**Exercice n° 13**

**1ère solution.** Soit $H$ un supplémentaire de $F \cap G$ dans $G$. $F \cap H = F \cap (H \cap G) = (F \cap G) \cap H = \{0\}$. Soit $x \in F + G$. Il existe $(y,z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$ et puis il existe $(y',z') \in (F \cap G) \times H$ tel que $z = y' + z'$. On a alors $x = y + (y' + z') = (y + y') + z' \in F + H$. Donc, $F + G = F + H$ puis $F + G = F \oplus H$. Mais alors

$$\dim(F + G) = \dim(F \oplus H) = \dim(F) + \dim(H) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

**2ème solution.** Soit $f$ l'application de $F \times G$ dans $E$ qui à un élément $(x,y)$ de $F \times G$ associe $x + y$.
$f$ est clairement linéaire et d'après le théorème du rang

$$\dim(F \times G) = \dim(\text{Ker} f) + \dim(\text{Im} f) \text{ avec } \dim(F \times G) = \dim F + \dim G \text{ et } \dim(\text{Im} f) = \dim(F + G).$$

Il reste à analyser $\text{Ker} f$.
Soit $(x,y) \in E^2$. $(x,y)$ est élément de $\text{Ker} f$ si et seulement si $x$ est dans $F$, $y$ est dans $G$ et $x + y = 0$ ou encore si et seulement si $x$ et $y$ sont dans $F \cap G$ et $y = -x$. Donc $\text{Ker} f = \{(x,-x),\ x \in F \cap G\}$.
Montrons enfin que $\text{Ker} f$ est isomorphe à $F \cap G$. Soit $\varphi$ l'application de $F \cap G$ dans $\text{Ker} f$ qui à l'élément $x$ de $F \cap G$ associe $(x,-x)$ dans $\text{Ker} f$. $\varphi$ est clairement une application linéaire, clairement injective et clairement surjective. Donc $\varphi$ est un isomorphisme de $F \cap G$ sur $\text{Ker} f$ et en particulier $\dim(\text{Ker} f) = \dim(F \cap G)$. Finalement

$$\boxed{\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).}$$

En particulier, $\dim(F + G) \leqslant \dim F + \dim G$ avec égalité si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

**Exercice n° 14**

$$\begin{aligned}\dim(F + G + H) &= \dim((F + G) + H) = \dim(F + G) + \dim H - \dim((F + G) \cap H)\\ &= \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F \cap G) - \dim((F + G) \cap H).\end{aligned}$$

Maintenant , $F \cap H + G \cap H \subset (F + G) \cap H$ (car si $x$ est dans $F \cap H + G \cap H$ il existe $y$ dans $F$ et dans $H$ et $z$ dans $G$ et dans $H$ tel que $x = y + z$ et $x$ est bien dans $F + G$ et aussi dans $H$). Donc

$$\begin{aligned}\dim((F + G) \cap H) \geqslant \dim(F \cap H + G \cap H) &= \dim(F \cap H) + \dim(G \cap H) - \dim((F \cap H) \cap (G \cap H))\\ &= \dim(F \cap H) + \dim(G \cap H) - \dim(F \cap G \cap H)\end{aligned}$$

et finalement

$$\boxed{\dim(F + G + H) \leqslant \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F \cap G) - \dim(F \cap H) - \dim(G \cap H) + \dim(F \cap G \cap H).}$$

Le cas de trois droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ deux à deux distinctes fournit un cas d'inégalité stricte

**Exercice n° 15**

Montrons par récurrence que $\forall n \geqslant 2$, $\dim(F_1 + \ldots + F_n) \leqslant \dim(F_1) + \ldots + \dim(F_n)$.

- Pour $n = 2$, $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2) \leqslant \dim(F_1) + \dim(F_2)$.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons que si $F_1, \ldots, F_n$ sont $n$ sous-espaces de $E$, $\dim(F_1 + \ldots + F_n) \leqslant \dim(F_1) + \ldots + \dim(F_n)$. Soient $F_1, \ldots, F_{n+1}$ $n + 1$ sous-espaces de $E$.

 

$$\begin{aligned}\dim(F_1+F_2+\ldots+F_{n+1}) &\leqslant \dim(F_1+\ldots+F_n)+\dim(F_{n+1}) \text{ (d'après le cas } n=2)\\ &\leqslant \dim(F_1)+\ldots+\dim(F_{n+1}) \text{ (par hypothèse de récurrence).}\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

On sait que si la somme $F_1+\ldots+F_n$ est directe, on a $\dim(F_1+\ldots+F_n)=\dim(F_1)+\ldots+\dim(F_n)$.

Montrons par récurrence que $\forall n \geqslant,\ 2$ [$\dim(F_1+\ldots+F_n)=\dim F_1+\ldots+\dim F_n] \Rightarrow$ la somme $F_1+\ldots+F_n$ est directe].

- Pour $n=2$ , d'après le n° 14, $\dim(F_1+F_2)=\dim(F_1)+\dim(F_2) \Leftrightarrow \dim(F_1\cap F_2)=0 \Leftrightarrow F_1\cap F_2=\{0\}$.
L'équivalence est donc vraie quand $n=2$.

- Soit $n\geqslant 2$. Supposons le résultat pour $n$ sous-espaces.
Soient $F_1, \ldots, F_{n+1}$ $n+1$ sous-espaces de $E$ tels que $\dim(F_1+\ldots+F_{n+1})=\dim(F_1)+\ldots+\dim(F_{n+1})$.
On sait que

$$\begin{aligned}\dim(F_1)+\ldots+\dim(F_{n+1}) &= \dim(F_1+\ldots+F_{n+1})\\ &= \dim(F_1+...+F_n)+\dim(F_{n+1})-\dim((F_1+...+F_n)\cap F_{n+1})\\ &\leqslant \dim(F_1)+...+\dim(F_{n+1})-\dim((F_1+...+F_n)\cap F_{n+1}),\end{aligned}$$

et donc $\dim((F_1+\ldots+F_n)\cap F_{n+1})\leqslant 0$ puis $\dim((F_1+\ldots+F_n)\cap F_{n+1})=0$. Par suite $(F_1+\ldots+F_n)\cap F_{n+1}=\{0\}$ et aussi $\dim(F_1)+\ldots+\dim(F_{n+1})=\dim(F_1+\ldots+F_n)+\dim(F_{n+1})$ et donc $\dim(F_1+\ldots+F_n)=\dim(F_1)+\ldots+\dim(F_n)$.
Mais alors, par hypothèse de récurrence, la somme $F_1+\ldots+F_n$ est directe. Puisque de plus $(F_1+\ldots+F_n)\cap F_{n+1}=\{0\}$, on a montré que pour tout $i\in[\![2,n+1]\!]$, $F_i\cap\sum_{j<i}F_j=\{0\}$ et donc que la somme $F_1+\ldots+F_{n+1}$ est directe.

Le résultat est démontré par récurrence.

**Exercice n° 16**

Soit $n\geqslant 3$. Montrons par récurrence que $\forall k\in[\![2,n-1]\!]$, si $H_1, \ldots, H_k$ sont $k$ hyperplans de $E$, alors $\dim(H_1\cap\ldots\cap H_k)\geqslant n-k$.

- Pour $k=2$. Soient $H_1$ et $H_2$ deux hyperplans de $E$.

$$\dim(H_1\cap H_2)=\dim(H_1)+\dim(H_2)-\dim(H_1+H_2)\geqslant(n-1)+(n-1)-n=n-2.$$

- Soit $k\in[\![2,n-2]\!]$. Supposons que la dimension d'une intersection de $k$ hyperplans de $E$ soit supérieure ou égale à $n-k$. Soient $H_1, \ldots, H_k, H_{k+1}$, $k+1$ hyperplans de $E$.

$$\begin{aligned}\dim(H_1\cap\ldots\cap H_k\cap H_{k+1}) &= \dim(H_1\cap\ldots\cap H_k)+\dim(H_{k+1})-\dim((H_1\cap\ldots\cap H_k)+H_{k+1})\\ &\geqslant (n-k)+(n-1)-n=n-(k+1).\end{aligned}$$

Le résultat est démontre par récurrence.

Pour $k=n-1$, on obtient en particulier $\dim(H_1\cap\ldots\cap H_{n-1})\geqslant n-(n-1)=1>0$ et donc $H_1\cap\ldots\cap H_{n-1}\neq\{0\}$.

**Exercice n° 17**

Si $m=n$, c'est immédiat. Supposons dorénavant $m<n$.

$$\begin{aligned}r=\dim(\mathrm{Vect}(x_1,...,x_n)) &= \dim(\mathrm{Vect}(x_1,...,x_m)+\mathrm{Vect}(x_{m+1},...x_n))\\ &\leqslant \dim(\mathrm{Vect}(x_1,...,x_m))+\dim(\mathrm{Vect}(x_{m+1},...,x_n))\\ &\leqslant s+(n-m)\end{aligned}$$

et donc $s\geqslant r+m-n$. On a l'égalité si et seulement si chaque inégalité est une égalité, c'est à dire si et seulement si $\mathrm{Vect}(x_1,...,x_m)\cap\mathrm{Vect}(x_{m+1},...x_n)=\{0\}$ (pour la première) et la famille $(x_{m+1},...,x_n)$ est libre (pour la deuxième).

**Exercice n° 18**

$\mathrm{Im}(f+g)=\{f(x)+g(x),\ x\in E\}\subset\{f(x)+g(x'),\ (x,x')\in E^2\}=\mathrm{Im}f+\mathrm{Im}g$. Donc

$$\mathrm{rg}(f+g)\leqslant\dim(\mathrm{Im}f+\mathrm{Im}g)\leqslant\mathrm{rg}f+\mathrm{rg}g$$

puis $\mathrm{rg}f = \mathrm{rg}((f+g)+(-g)) \leqslant \mathrm{rg}(f+g)+\mathrm{rg}(-g) = \mathrm{rg}(f+g)+\mathrm{rg}g$ (car $\mathrm{Im}(-g) = \{-g(x),\ x \in E\} = \{g(-x),\ x \in E\} = \{g(x'),\ x' \in E\} = \mathrm{Im}g$) et donc $\mathrm{rg}(f+g) \geqslant \mathrm{rg}f - \mathrm{rg}g$. De même , en échangeant les rôles de $f$ et $g$, $\mathrm{rg}(f+g) \geqslant \mathrm{rg}g - \mathrm{rg}f$ et finalement $\mathrm{rg}(f+g) \geqslant |\mathrm{rg}f - \mathrm{rg}g|$.

$$\boxed{\forall (f,g) \in \mathscr{L}(E,F)^2,\ |\mathrm{rg}f - \mathrm{rg}g| \leqslant \mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}f + \mathrm{rg}g.}$$

**Exercice n° 19**

$\mathrm{Im}(g \circ f) = g(f(E)) \subset g(F)$ fournit $\mathrm{rg}(gof) \leqslant \mathrm{rg}(g)$.
Soit $g' = g_{/f(E)}$. D'après le théorème du rang, on a

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(f(E)) = \dim(\mathrm{Ker}(g')) + \dim(\mathrm{Im}(g')) \geqslant \dim(\mathrm{Im}(g')) = \mathrm{rg}(g \circ f)$$

et donc $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{Min}\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}$.

A partir du théorème du rang, on voit que l'inégalité $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim F \leqslant \mathrm{rg}(g \circ f)$ est équivalente à l'inégalité $\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g))$.

Soit $f' = f_{/\mathrm{Ker}(g\circ f)}$. D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f')) + \dim(\mathrm{Im}(f'))$. Mais $\mathrm{Ker}(f') \subset \mathrm{Ker}(f)$ puis $\mathrm{Im}(f') = \{f(x)/\ x \in E \text{ et } g(f(x)) = 0\} \subset \{y \in F/\ g(y) = 0\} = \mathrm{Ker}(g)$ et finalement $\dim\mathrm{Ker}(g \circ f) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g))$.

$$\boxed{\forall (f,g) \in \mathscr{L}(E,F) \times \mathscr{L}(F,G),\ \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim F \leqslant \mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{Min}\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}.}$$

**Exercice n° 20**

D'après le théorème du rang, une condition nécessaire est $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ (et non pas $F \oplus G = E$).
Montrons que cette condition est suffisante. Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces de $E$ tels que $\dim F + \dim G = \dim E$.
Soit $F'$ un supplémentaire de $F$ dans $E$ ($F'$ existe car $E$ est de dimension finie).
Si $G = \{0\}$ (et donc $F = E$), $f = 0$ convient.
Si $G \neq \{0\}$, il existe un isomorphisme $\varphi$ de $F'$ sur $G$ (car $F'$ et $G$ ont même dimension finie) puis il existe un unique endomorphisme de $E$ vérifiant : $f_{/F} = 0_{/F}$ et $f_{/F'} = \varphi$.
Mais alors $\mathrm{Im}(f) = f(F \oplus F') = f(F) + f(F') = \{0\} + G = G$ puis $F \subset \mathrm{Ker}(f)$ et pour des raisons de dimension, $F = \mathrm{Ker}(f)$.

**Exercice n° 21**

**1)** $\Leftarrow/$ Si $f = 0$, $f$ n'est pas injective (car $E \neq \{0\}$).
Si $f \neq 0$ et s'il existe un endomorphisme non nul $g$ de $E$ tel que $f \circ g = 0$ alors il existe un vecteur $x$ de $E$ tel que $g(x) \neq 0$ et $f(g(x)) = 0$. Par suite $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ et $f$ n'est pas injective.
$\Rightarrow/$ Supposons $f$ non injective et non nulle. Soient $F = \mathrm{Ker}(f)$ et $G$ un supplémentaire quelconque de $F$ dans $E$. Soit $p$ la projection sur $F$ parallèlement à $G$.
Puisque $F = \mathrm{Ker}(f)$, on a $f \circ p = 0$ et puisque $f$ n'est pas injective, $F$ n'est pas nul ou encore $p$ n'est pas nul. $f$ est donc diviseur de zéro à gauche.

**2)** $\Leftarrow/$ Si $f = 0$, $f$ n'est pas surjective.
Si $f$ n'est pas nul et s'il existe un endomorphisme non nul $g$ de $E$ tel que $g \circ f = 0$ alors $f$ ne peut être surjective car sinon $g(E) = g(f(E)) = \{0\}$ contredisant $g \neq 0$.
$\Rightarrow/$ Supposons $f$ non surjective et non nulle.
Soient $G = \mathrm{Im}(f)$ et $F$ un supplémentaire quelconque de $G$ dans $E$ puis $p$ la projection sur $F$ parallèlement à $G$. $F$ et $G$ sont non nuls et distincts de $E$ et donc $p$ n'est pas nulle et vérifie $p \circ f = 0$. $f$ est donc diviseur de zéro à droite.

**Exercice n° 22**

**1ère solution.** Si $f = 0$, c'est immédiat . Sinon, soit $p$ l'indice de nilpotence de $f$ ($p \geqslant 2$).
Par définition de $p$, il existe un vecteur $x_0$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$ (et $f^p(x_0) = 0$).
Montrons que la famille $(f^k(x_0))_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre. Dans le cas contraire, il existe $a_0$,..., $a_{p-1}$ $p$ scalaires non tous nuls tels que $a_0x_0 + ... + a_{p-1}f^{p-1}(x_0) = 0$.
Soit $k = \mathrm{Min}\{i \in [\![0, p-1]\!]/\ a_i \neq 0\}$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p-1} a_i f^i(x_0) = 0 \Rightarrow \sum_{i=k}^{p-1} a_i f^i(x_0) = 0 &\Rightarrow f^{p-1-k}\left(\sum_{i=k}^{p-1} a_i f^i(x_0)\right) = 0\\ &\Rightarrow a_k f^{p-1}(x_0) = 0 \text{ (car pour } i \geqslant p,\ f^i = 0)\\ &\Rightarrow a_k = 0 \text{ (car } f^{p-1}(x_0) \neq 0).\end{aligned}$$

Ceci contredit la définition de $k$ et donc la famille $(f^k(x_0))_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est libre. Puisque le cardinal d'une famille libre est inférieur à la dimension de l'espace, on a montré que $p \leqslant n$ ou, ce qui revient au même, $f^n = 0$.

**2ème solution.** (pour les redoublants)
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de $f$. Le polynôme $X^p$ est annulateur de $f$. Son polynôme minimal est un diviseur unitaire de $X^p$ et donc égal à $X^k$ pour un certain $k \in [\![1, p]\!]$. Par définition de l'indice de nilpotence, $k = p$ puis $\mu_f = X^p$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\mu_f$ divise $\chi_f$ qui est de degré $n$ et en particulier $p \leqslant n$.

**Exercice n° 23**

(Ne pas confondre : $(\forall x \in E,\ \exists p \in \mathbb{N}^*/\ f^p(x) = 0)$ et $(\exists p \in \mathbb{N}^*/\ \forall x \in E,\ f^p(x) = 0)$. Dans le deuxième cas, $p$ est indépendant de $x$ alors que dans le premier cas, $p$ peut varier quand $x$ varie).

Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de $E$. Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, il existe un entier non nul $p_i$ tel que $f^{p_i}(e_i) = 0$. Soit $p = \text{Max}\{p_1, \ldots, p_n\}$. $p$ est un entier naturel non nul et pour $i$ dans $[\![1, n]\!]$, on a

$$f^p(e_i) = f^{p-p_i}(f^{p_i}(e_i)) = f^{p-p_i}(0) = 0.$$

Ainsi l'endomorphisme $f^p$ s'annule sur une base de $E$ et donc $f^p = 0$. On a donc trouvé un entier non nul $p$ tel que $f^p = 0$ et par suite $f$ est nilpotent.

**Exercice n° 24**

**1) a)** Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in E$. $x \in N_k \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f(f^k(x)) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1}$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ N_k \subset N_{k+1}.}$$

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $y \in E$. $y \in I_{k+1} \Rightarrow \exists x \in E/\ y = f^{k+1}(x) \Rightarrow \exists x \in E/\ y = f^k(f(x)) \Rightarrow y \in I_k$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ I_{k+1} \subset I_k.}$$

**b)** Soit $x \in N$. Il existe un entier $k$ tel que $x$ est dans $N_k$ ou encore tel que $f^k(x) = 0$. Mais alors $f^k(f(x)) = f(f^k(x)) = 0$ et $f(x)$ est dans $N_k$ et donc dans $N$. Ainsi, $N$ est stable par $f$.

Soit $y \in I$. Alors, pour tout entier naturel $k$, il existe $x_k \in E$ tel que $y = f^k(x_k)$. Mais alors, pour tout entier $k$, $f(y) = f(f^k(x_k)) = f^k(f(x_k))$ est dans $I_k$, et donc $f(y)$ est dans $I$. $I$ est stable par $f$.

**c)** Si $N_k = N_{k+1}$, on a déjà $N_{k+1} \subset N_{k+2}$. Montrons que $N_{k+2} \subset N_{k+1}$.
Soit $x \in N_{k+2}$. Alors $f^{k+1}(f(x)) = 0$ et donc $f(x) \in N_{k+1} = N_k$ puis, $f^k(f(x)) = 0$ ou encore $x$ est dans $N_{k+1}$. On a montré que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ [(N_k = N_{k+1}) \Rightarrow (N_{k+1} = N_{k+2})].}$$

**2) a)** Notons tout d'abord que, pour tout entier naturel $k$, $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$. Si de plus, on est en dimension finie, alors d'après le théorème du rang,

$$N_k = N_{k+1} \Leftrightarrow \dim(N_k) = \dim(N_{k+1}) \Leftrightarrow \dim(I_k) = \dim(I_{k+1}) \Leftrightarrow I_{k+1} = I_k.$$

Donc $A = B$ (éventuellement $= \varnothing$).

La suite des noyaux itérés ne peut être strictement croissante pour l'inclusion car alors la suite des dimensions de ces noyaux serait une suite strictement croissante d'entiers naturels, vérifiant par une récurrence facile $\dim(N_k) \geqslant k$ pour tout naturel $k$, et en particulier $\dim(N_{n+1}) > \dim(E)$ ce qui est exclu.
Donc il existe un entier $k$ tel que $N_k = N_{k+1}$. Soit $p$ le plus petit de ces entiers $k$.
Par définition de $p$, $N_k$ est strictement inclus dans $N_{k+1}$ pour $k < p$, puis $N_p = N_{p+1}$. D'après 1)c), pour tout entier naturel $k$ supérieur ou égal à $p$, on a $N_k = N_p$ (par récurrence sur $k \geqslant p$). Donc $A = \{p, p+1, p+2, \ldots\}$.
Enfin, $\dim(N_0) < \dim(N_1) < \ldots < \dim(N_p)$ et donc $\dim(N_p) \geqslant p$ ce qui impose $p \leqslant n$.

**b)** On a déjà $\dim(N_p) + \dim(I_p) = \dim(E)$. Il reste à vérifier que $I_p \cap N_p = \{0\}$.
Soit $x$ un élément de $I_p \cap N_p$. Donc $f^p(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$. Mais alors $f^{2p}(y) = 0$ et $y$ est dans $N_{2p} = N_p$ (car $2p \geqslant p$) ou encore $x = f^p(y) = 0$.

$$\boxed{E = I_p \oplus N_p.}$$

**c)** Ici $N = N_p = \text{Ker}\,(f^p)$ et $I = I_p = \text{Im}\,(f^p)$.
Soit $f' = f_{/N}$. D'après 1)b), $f'$ est un endomorphisme de $N$ puis immédiatement $f'^p = 0$. Donc $f_{/N}$ est nilpotent.
Soit $f'' = f_{/I}$ . $f''$ est d'après 1)b) un endomorphisme de I. Pour montrer que $f''$ est un automorphisme de I, il suffit de vérifier que $\text{Ker}(f'') = \{0\}$. Mais $\text{Ker}(f'') \subset \text{Ker}(f) \subset N$ et aussi $\text{Ker}(f'') \subset I$. Donc $\text{Kerf}('') \subset N \cap I = \{0\}$. Donc $f_{/I} \in GL(I)$.

**3)** Il faut bien sûr chercher les exemples en dimension infinie.

**a)** Soit $f$ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même qui à un polynôme $P$ associe sa dérivée $P'$. On vérifie aisément que $\forall k \in \mathbb{N}$, $N_k = \mathbb{R}_k[X]$ et donc la suite des noyaux itérés est strictement croissante. La suite des $I_k$ est par contre constante : $\forall k \in \mathbb{N}$, $I_k = \mathbb{R}[X]$. Dans ce cas, $A$ est vide et $B = \mathbb{N}$.

**b)** A un polynôme $P$, on associe le polynôme $XP$. Les $N_k$ sont tous nuls et pour $k \in \mathbb{N}$ donné, $I_k$ est constitué des polynômes de valuation supérieure ou égale à $k$ ou encore $I_k = X^k \times \mathbb{R}[X]$. Dans ce cas, $A = \mathbb{N}$ et $B = \varnothing$.

**4)** Pour $k$ entier naturel donné, on note $f_k$ la restriction de $f$ à $I_k$. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(I_k) = \dim\text{Ker}\,(f_k) + \dim\text{Im}\,(f_k) \text{ avec } \text{Im}\,(f_k) = f\,((I_k) = I_{k+1}.$$

Donc, pour tout entier naturel $k$, $d_k - d_{k+1} = \dim\text{Ker}\,(f_k)$.
Or, pour tout entier naturel $k$, $\text{Ker}\,(f_{k+1}) = \text{Ker}(f) \cap I_{k+1} \subset \text{Ker}(f) \cap I_k = \text{Ker}\,(f_k)$ et donc

$$d_{k+1} - d_{k+2} = \dim\text{Ker}\,(f_{k+1}) \leqslant \dim\text{Ker}\,(f_k) = d_k - d_{k+1}.$$

Finalement, pour tout entier naturel $k$, $d_{k+1} - d_{k+2} \leqslant d_k - d_{k+1}$ et la suite des images itérées décroît de moins en moins vite.

Enfin, d'après le théorème du rang, $\dim(N_{k+1}) - \dim(N_k) = (n - d_{k+1}) - (n - d_k) = d_k - d_{k+1}$.
La suite $(\dim(N_{k+1}) - \dim(N_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante ou encore la suite des noyaux itérés croît de moins en moins vite.

**Exercice n° 25**

On transforme légèrement l'énoncé.
Si $x$ est un vecteur non nul tel que $(x, f(x))$ est liée alors il existe un scalaire $\lambda_x$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. Si $x = 0$, $f(x) = 0 = 0x$ et encore une fois il existe un scalaire $\lambda_x$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
Inversement, si pour tout $x$ de $E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$, alors la famille $(x, f(x))$ est liée. Donc

$$(\forall x \in E,\ (x, f(x)) \text{ liée}) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}/\ f(x) = \lambda_x x).$$

Notons de plus que dans le cas où $x \neq 0$, la famille $(x)$ est une base de la droite vectorielle $\text{Vect}(x)$ et en particulier, le nombre $\lambda_x$ est uniquement défini.

Montrons maintenant que $f$ est une homothétie c'est à dire montrons que : $\exists \lambda \in \mathbb{K}/\ \forall x \in E,\ f(x) = \lambda x$.

Soient $x_0$ un vecteur non nul et fixé de $E$ puis $x$ un vecteur quelconque de $E$.
**1er cas.** Supposons la famille $(x_0, x)$ libre. On a $f(x + x_0) = \lambda_{x+x_0}(x + x_0)$ mais aussi $f(x + x_0) = f(x) + f(x_0) = \lambda_x x + \lambda_{x_0} x_0$ et donc

$$(\lambda_{x+x_0} - \lambda_x)\,x + (\lambda_{x+x_0} - \lambda_{x_0})\,x_0 = 0.$$

Puisque la famille $(x_0, x)$ est libre, on obtient $\lambda_{x+x_0} - \lambda_x = \lambda_{x+x_0} - \lambda_{x_0} = 0$ et donc $\lambda_x = \lambda_{x+x_0} = \lambda_{x_0}$. Ainsi, pour tout vecteur $x$ tel que $(x, x_0)$ libre, on a $f(x) = \lambda_{x_0} x$.

**2ème cas.** Supposons la famille $(x_0, x)$ liée. Puisque $x_0$ est non nul, il existe un nombre $\mu$ tel que $x = \mu x_0$. Mais alors

$$f(x) = \mu f(x_0) = \mu \lambda_{x_0} x_0 = \lambda_{x_0} x.$$

Finalement, il existe un scalaire $\lambda = \lambda_{x_0}$ tel que pour tout vecteur $x$, $f(x) = \lambda x$ et $f$ est une homothétie. La réciproque étant claire, on a montré que

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{L}(E),\ [(f \text{ est une homothétie}) \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ (x, f(x)) \text{ est liée})].}$$

**Exercice n° 26**

Remarques. 1) Soit $(G, *)$ un groupe. Le centre de $G$ est l'ensemble des éléments de $G$ qui commutent avec tous les éléments de $G$. Ce centre, souvent noté $Z(G)$, est un sous-groupe de $(G, *)$.
2) $(\mathscr{L}(E), \circ)$ est un magma associatif et unitaire (non commutatif pour $\dim E > 1$)) mais $(\mathscr{L}(E), \circ)$ n'est pas un groupe. Par contre $(\mathscr{GL}(E), \circ)$ est un groupe (groupe des inversibles de $(\mathscr{L}(E), \circ)$).

Soit $f$ un endomorphisme (resp. automorphisme) de E commutant avec tous les endomorphismes (resp. les automorphismes) de $E$. $f$ commute en particulier avec toutes les symétries.
Soit $x$ un vecteur non nul de $E$ et $s$ la symétrie par rapport à la droite $D\text{Vect}(x)$ parallèlement à un supplémentaire donné de cette droite (qui existe puisque $E$ est de dimension finie).

$$s(f(x)) = f(s(x)) = f(x).$$

Par suite, $f(x)$ est invariant par $s$ et appartient donc à $D = \text{Vect}(x)$. Ainsi, si $f$ commute avec tout endomorphisme (resp. automorphisme) de $E$, $f$ vérifie nécessairement $\forall x \in E$, $(x, f(x))$ liée et d'après le n° 25, $f$ est nécessairement une homothétie. Réciproquement , les homothéties de $E$ commutent effectivement avec tout endomorphisme de $E$.

$$\boxed{\text{Les endomorphismes de } E \text{ qui commutent avec tout endomorphismes de } E \text{ sont les homothéties.}}$$

Pour le centre de $(\mathscr{GL}(E), \circ)$, il faut enlever l'application nulle qui est une homothétie mais qui n'est pas inversible.

**Exercice n° 27**

$\Rightarrow$/ Si $p + q$ est un projecteur alors l'égalité $(p + q)^2 = p + q$ founit $pq + qp = 0$. En composant par $p$ à droite ou à gauche , on obtient $pqp + qp = 0 = pq + pqp$ et donc $pq = qp$.
Cette égalité jointe à l'égalité $pq + qp = 0$ fournit $2pq = 0$ et donc $pq = 0 = qp$.
$\Leftarrow$/ Si $pq = qp = 0$, alors $(p + q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p + q$ et $p + q$ est un projecteur.

$$\boxed{\text{Pour tous projecteurs } p \text{ et } q,\ p + q \text{ projecteur} \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = 0 \Leftrightarrow \text{Im}q \subset \text{Ker}p \text{ et } \text{Im}p \subset \text{Ker}q.}$$

Dorénavant, $p + q$ est un projecteur ou ce qui revient au même $pq = qp = 0$.
On a $\text{Ker}p \cap \text{Ker}q \subset \text{Ker}(p + q)$. Inversement, pour $x \in E$,

$$x \in \text{Ker}(p + q) \Rightarrow (p + q)(x) = 0 \Rightarrow p(p(x) + q(x)) = 0 \Rightarrow p(x) = 0,$$

et de même $q(x) = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(p + q) \subset \text{Ker}p \cap \text{Ker}q$ et finalement $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}p \cap \text{Ker}q$.

On a $\text{Im}(p + q) \subset \text{Im}p + \text{Im}q$. Inversement, pour $x \in E$,

$$x \in \text{Im}p + \text{Im}q \Rightarrow \exists (x_1, x_2) \in E^2 / \ x = p(x_1) + q(x_2).$$

Mais alors, $(p + q)(x) = p^2(x_1) + pq(x_1) + qp(x_2) + q^2(x_2) = p(x_1) + q(x_2) = x$ et donc $x \in \text{Im}(p + q)$. Ainsi, $\text{Im}p + \text{Im}q \subset \text{Im}(p + q)$ et donc $\text{Im}(p + q) = \text{Im}p + \text{Im}q$. En résumé, si $p$ et $q$ sont deux projecteurs tels que $p + q$ soit un projecteur, alors

$$\boxed{\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}p \cap \text{Ker}q \text{ et } \text{Im}(p + q) = \text{Im}p + \text{Im}q.}$$

**Exercice n° 28**

Soit $p$ un projecteur de $E$. Si $p = 0$, $\text{Tr}(p) = \text{rg}(p) = 0$ et si $p = \text{Id}_E$, $\text{Tr}(p) = \text{rg}(p) = n$.

Dorénavant, $p$ est un projecteur de rang $r \in [\![1, n - 1]\!]$.
On choisit une base $\mathscr{B}$ de $E$ adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$. Dans cette base, la matrice de $p$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & \\ & & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où le nombre de $1$ est $\dim(\text{Im}(p)) = r$. Mais alors $\text{Tr}(p) = r$.

$$\boxed{\text{En dimension finie, la trace d'un projecteur est son rang.}}$$

**Exercice n° 29**

$\Leftarrow$/ Si $\forall i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$ alors

$$(p_1 + \ldots + p_n)^2 = p_1^2 + \ldots + p_n^2 + \sum_{i \neq j} p_i \circ p_j = p_1 + \ldots + p_n,$$

et $p_1+\ldots+p_n$ est un projecteur.

$\Rightarrow$/ Supposons que $p=p_1+\ldots+p_n$ soit un projecteur. Posons $F_i=\mathrm{Im}\,(p_i)$, $1\leqslant i\leqslant n$, puis $F=F_1+\ldots+F_n$ et $G=\mathrm{Im}p$. On sait que la trace d'un projecteur est son rang. Par linéarité de la trace, on obtient

$$\mathrm{rg}(p)=\mathrm{Tr}(p)=\mathrm{Tr}\,(p_1)+\ldots+\mathrm{Tr}\,(p_n)=\mathrm{rg}\,(p_1)+\ldots+\mathrm{rg}\,(p_n),$$

et donc $\dim(G)=\dim(F_1)+\ldots+\dim(F_n)\geqslant\dim(F)$. D'autre part, $G=\mathrm{Im}(p_1+\ldots+p_n)\subset\mathrm{Im}\,(p_1)+\ldots+\mathrm{Im}\,(p_n)=F_1+\ldots+F_n=F$.
On obtient donc $G=F$ et aussi $\dim(F_1+\ldots+F_n)=\dim(F_1)+\ldots+\dim(F_n)$. D'après le n° 15, $F=F_1\oplus\ldots\oplus F_n$ c'est-à-dire

$$\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Im}\,(p_1)\oplus\ldots\oplus\mathrm{Im}\,(p_n).$$

Il reste à vérifier que pour $i\neq j$ et $x$ dans $E$, $p_i\,(p_j(x))=0$ ou, ce qui revient au même, que pour $i\neq j$ et $y$ dans $\mathrm{Im}\,(p_j)$, $p_i(y)=0$.

Soit $y$ dans $\mathrm{Im}\,(p_j)$ (et donc dans $\mathrm{Im}(p)$). Les égalités $y=p_j(y)=p(y)$ fournissent $\displaystyle\sum_{i\neq j}p_i(y)=0$. La somme $\displaystyle\sum_{i}\mathrm{Im}\,(p_i)$ étant directe, on a donc $p_i(y)=0$ pour chaque $i\neq j$ ce qu'il fallait démontrer.

$$\boxed{p_1+\ldots+p_n\text{ projecteur}\Leftrightarrow\forall i\neq j,\ p_i\circ p_j=0.}$$

**Exercice n° 30**

**1)** D'après le n° 28, $\mathrm{Im}\,(p_1+\ldots+p_n)=\mathrm{Im}\,(p_1)+\ldots+\mathrm{Im}\,(p_n)=\mathrm{Im}\,(p_1)\oplus\ldots\oplus\mathrm{Im}\,(p_n)$.
Chaque $p_i$ est de rang au moins $1$, mais si l'un des $p_i$ est de rang supérieur ou égal à 2 alors

$$n=\dim(E)\geqslant\mathrm{rg}\,(p_1+\ldots+p_n)=\mathrm{rg}\,(p_1)+\ldots+\mathrm{rg}\,(p_n)>n$$

ce qui est impossible. Donc chaque $p_i$ est de rang $1$.

**2)** Les images des $p_i$ (resp. $q_i$) sont des droites vectorielles. Pour chaque $i$, notons $e_i$ (resp. $e_i'$) un vecteur non nul de $\mathrm{Im}\,(p_i)$ (resp. $\mathrm{Im}\,(q_i)$). D'après 1), $E=\mathrm{Vect}\,(e_1)\oplus\ldots\oplus\mathrm{Vect}\,(e_n)$ ou encore $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $E$. De même, $(e_i')_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $E$.
Soit $f$ l'automorphisme de $E$ défini par : $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $f\,(e_i)=e_i'$ ($f$ est un automorphisme car l'image par $f$ d'une base de $E$ est une base de $E$).
Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. $f\circ p_i\circ f^{-1}\left(e_j'\right)=f\,(p_i\,(e_j))=f\,(\delta_{i,j}e_i)=\delta_{i,j}e_i'=q_i\,(e_j)$. Ainsi, les endomorphismes $q_i$ et $f\circ p_i\circ f^{-1}$ coïncident sur une base de $E$ et sont donc égaux.

$f$ est un automorphisme de $E$ tel que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $q_i=f\circ p_i\circ f^{-1}$.

**Exercice n° 31**

Soit $q=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{g\in G}g\circ p\circ g^{-1}$.

$$q^2=\frac{1}{n^2}\sum_{(g,h)\in G^2}h\circ p\circ h^{-1}\circ g\circ p\circ g^{-1}.$$

Mais si $g$ et $h$ sont deux éléments de $G$ et $x$ est un vecteur quelconque de $E$, $p(g^{-1}(x))$ est dans $F$ et donc par hypothèse $h^{-1}\circ g\circ p\circ g^{-1}(x)$ est encore dans $F$ ($h^{-1}$ est dans $G$ puisque $G$ est un groupe). On en déduit que

$$h\circ p\circ h^{-1}\circ g\circ p\circ g^{-1}=h\circ h^{-1}\circ g\circ p\circ g^{-1}=g\circ p\circ g^{-1}.$$

Mais alors

$$q^2=\frac{1}{n^2}\sum_{(g,h)\in G^2}g\circ p\circ g^{-1}=\frac{1}{n^2}\times n\sum_{g\in G}g\circ p\circ g^{-1}=\frac{1}{n}\sum_{g\in G}g\circ p\circ g^{-1}=q$$

et $q$ est un projecteur.

Montrons que $F\subset\mathrm{Im}(q)$. Soit $x$ un élément de $F$. Pour chaque $g\in G$, $g^{-1}(x)$ est encore dans $F$ et donc $p(g^{-1}(x))=g^{-1}(x)$ puis $g(p(g^{-1}(x)))=x$. Mais alors

$$q(x)=\frac{1}{n}\sum_{g\in G}x=x,$$

et en particulier, $x$ est dans $\mathrm{Im}(q)$. On a montré que $F \subset \mathrm{Im}(q)$.

Montrons que $\mathrm{Im}(q) \subset F$. Soit $x$ un élément de $\mathrm{Im}(q)$.

$$\begin{aligned}
p(x) = p(q(x)) &= \frac{1}{n}\sum_{g\in G} p\circ g\circ p\circ g^{-1}(x)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{g\in G} g\circ p\circ g^{-1}(x) \text{ (car } p\circ g^{-1}(x)\in F \text{ et donc } g\circ p\circ g^{-1}(x)\in F)\\
&= q(x) = x,
\end{aligned}$$

et $x$ est dans $F$. On a montré que $\mathrm{Im}(q) \subset F$ et finalement que $\mathrm{Im}(q) = F$.

$$\boxed{q \text{ est un projecteur d'image } F.}$$

**Exercice nº 32** Soit $f = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{g\in G} g$.

$$f^2 = \frac{1}{p^2}\sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} gh\right).$$

Soient $g \in G$ puis $\varphi_g \;:\; h \mapsto gh$. $\varphi_g$ est une application de $G$ dans lui-même (car $(G, \circ)$ est un groupe. Ensuite, pour $(h, h') \in G^2$,

$$\varphi_g(h) = \varphi_g(h') \Rightarrow gh = gh' \Rightarrow h = h'$$

car dans un groupe, tout élément est simplifiable. On en déduit que $\varphi_g$ est une application injective de l'ensemble fini $G$ dans lui-même et finalement que $\varphi_g$ est une permutation de $G$. Mais alors, pour tout $g \in G$, $\displaystyle\sum_{h\in G} gh = \sum_{h'\in G} h' = pf$ puis,

$$f^2 = \frac{1}{p^2}\sum_{g\in G} pf = \frac{1}{p}\left(\sum_{g\in G} 1\right) f = f.$$

Ainsi, $f$ est un projecteur et donc $\dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{g\in G} \mathrm{Tr} g = \mathrm{tr}(f) = \mathrm{rg}(f)$. Maintenant, si $x$ est un élément de $F$ alors pour tout $g$ dans $G$, $g(x) = x$ et donc $f(x) = x$. Ainsi, un élément $x$ de $F$ est dans $\mathrm{Im}(f)$.

Inversement, soit $x$ un élément de $\mathrm{Im}(f)$. Pour $g \in G$,

$$g(x) = g(f(x)) = \frac{1}{p}\sum_{h\in G} g\circ h(x) = \frac{1}{p}\sum_{h'\in G} h'(x) = f(x) = x.$$

L'élément $x$ de $\mathrm{Im}(f)$ est donc dans $F$. On a montré que $F = \mathrm{Im}(f)$. Puisque $f$ est un projecteur, on en déduit que

$$\dim(F) = \mathrm{rg}(f) = \mathrm{Tr}(f) = \frac{1}{p}\sum_{g\in G} \mathrm{Tr} g.$$

**Exercice nº 33**

Deux cas particuliers se traitent immédiatement.
Si $f = 0$, on prend $p = 0$ et $g = Id_E$ et si $f \in GL(E)$, on prend $p = Id_E$ et $g = f$.
On se place dorénavant dans le cas où $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ ne sont pas réduit à $0$.

Soit $F$ un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans $E$ et $G$ un supplémentaire de $\mathrm{Im}(f)$ dans $E$.
On sait que la restriction $f'$ de $f$ à $F$ réalise un isomorphisme de $F$ sur $\mathrm{Im}(f)$. D'autre part $\dim \mathrm{Ker} f = \dim G < +\infty$ et donc $\mathrm{Ker}(f)$ et $G$ sont isomorphes. Soit $\varphi$ un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(f)$ sur $G$.

On définit une unique application linéaire $g$ en posant $g_{/\mathrm{Ker}(f)} = \varphi$ et $g_{/F} = f'$.
Montrons que $g$ est un automorphisme de $E$.

$$g(E) = g(\mathrm{Ker}(f) + F) = g(\mathrm{Ker}(f)) + g(F) = \varphi(\mathrm{Ker} f) + f'(F) = G + \mathrm{Im}(f) = E,$$

(puisque $\varphi$ et $f'$ sont des isomorphismes) et donc $g$ est surjective. Par suite, $g$ est bijective de $E$ sur lui-même puisque $\dim E < +\infty$.

Soit $p$ la projection sur $F$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$. On a

$$(g\circ p)_{/\mathrm{Ker}(f)} = g\circ 0_{/\mathrm{Ker}f} = 0_{/\mathrm{Ker}f} = f_{/\mathrm{Ker}f} \text{ et } (g\circ p)_{/F} = g\circ Id_{/F} = f' = f_{/F}.$$

Ainsi les endomorphismes $g\circ p$ et $f$ coïncident sur deux sous espaces supplémentaires de $E$ et donc $g\circ p = f$. Finalement, si on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des projecteurs de $E$,

$$\boxed{\forall f\in\mathscr{L}(E),\ \exists g\in\mathscr{GL}(E),\ \exists p\in\mathscr{P}(E)/\ f = g\circ p.}$$

**Exercice n° 34**

**1)** Si $\mathrm{Ker}(f)\neq\{0\}$, considérons $g$ non nul tel que $\mathrm{Im}(g)\subset\mathrm{Ker}f$ (par exemple, une projection sur $\mathrm{Ker}(f)$).
Pour un tel $g$, $f\circ g = 0$ puis $f\circ g\circ f = 0$ et donc $g = 0$, contredisant le fait que $g$ est non nulle. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
Si $\mathrm{Im}(f)\neq F$, on choisit $g$ nulle sur $\mathrm{Im}(f)$ et non nulle sur un supplémentaire de $\mathrm{Im}(f)$ (par exemple, une projection de direction $\mathrm{Im}(f)$). Alors, $g\circ f = 0$ puis $f\circ g\circ f = 0$ et donc $g = 0$ contredisant $g$ non nulle. Donc $\mathrm{Im}f = F$.

Finalement, $f$ est bien un isomorphisme de $E$ sur $F$.

**2)** Soit $A = \{g\in\mathscr{L}(F,E)/\ f\circ g\circ f = 0\}$. Tout d'abord $A$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(F,E)$ car contient l'application nulle et est stable par combinaison linéaire (ou bien $A$ est le noyau de l'application linéaire de $\mathscr{L}(F,E)$ dans $\mathscr{L}(E,F)$ qui à $g$ associe $f\circ g\circ f$).

Soit $J$ un supplémentaire de $I = \mathrm{Im}(f)$ dans $F$. Un élément $g$ de $\mathscr{L}(F,E)$ est entièrement déterminé par ses restrictions à $I$ et $J$.

$$f\circ g\circ f = 0 \Leftrightarrow (f\circ g)_{/I} = 0 \text{ et } g_{/J} \text{ est quelconque} \Leftrightarrow g(I)\subset\mathrm{Ker}(f).$$

Pour être le plus méticuleux possible, on peut alors considérer l'application $\gamma$ de $\mathscr{L}(I,\mathrm{Ker}(f))\times\mathscr{L}(J,E)$ dans $\mathscr{L}(F,E)$ qui à un couple $(g_1,g_2)$ associe l'unique application linéaire $g$ de $F$ dans $E$ telle que $g_{/I} = g_1$ et $g_{/J} = g_2$. $\gamma$ est linéaire et injective d'image $A$. Donc

$$\dim(A) = \dim\left(\mathscr{L}(I,\mathrm{Ker}(f))\times\mathscr{L}(J,E)\right) = \dim\mathscr{L}(I,\mathrm{Ker}(f)) + \dim\mathscr{L}(J,E) = r(p-r) + (n-r)p = pn - r^2.$$