

## Planche n° 2. Ensembles, relations, applications. Corrigé

### Exercice n° 1

Si  $E = F$ , alors  $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$ .

Réciproquement, supposons que  $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$ .  $F$  est un élément de  $\mathcal{P}(F)$  et donc  $F$  est un élément  $\mathcal{P}(E)$ . Mais alors  $F \subset E$ . En échangeant les rôles de  $E$  et  $F$  on a aussi  $E \subset F$  et finalement  $E = F$ .

**Exercice n° 2** Par distributivité de  $\cup$  sur  $\cap$ ,

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) &= ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap B) \cup (B \cap C)) \cap (C \cup A) \\ &= ((A \cap C) \cup B) \cap (C \cup A) \quad (\text{car } B \cap B = B \text{ et } A \cap B \subset B \text{ et } B \cap C \subset B) \\ &= (A \cap C \cap C) \cup (A \cap C \cap A) \cup (B \cap C) \cup (B \cap A) \\ &= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) \cup (A \cap C) \\ &= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A). \end{aligned}$$

**Exercice n° 3** Tous les résultats sont clairs si  $E = \emptyset$ . On suppose dorénavant  $E \neq \emptyset$ .

1) Si  $A = B = \emptyset$  alors  $A \Delta B = \emptyset = A \cap B$ .

Si  $A \Delta B = A \cap B$ , alors  $A \Delta B = A \cap B = \emptyset$  (car  $(A \Delta B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ ). Supposons par exemple  $A \neq \emptyset$ .

Soit  $x \in A$ . Si  $x \in B$ ,  $x \in A \cap B = \emptyset$  ce qui est absurde et si  $x \notin B$ ,  $x \in A \Delta B = \emptyset$  ce qui est absurde. Donc  $A = \emptyset$  puis  $B = \emptyset$  par symétrie des rôles.

Finalement,  $A \Delta B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \emptyset$ .

2)  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \Delta A$ .

3) Soit  $x \in E$ .

$$\begin{aligned} x \in (A \Delta B) \Delta C &\Leftrightarrow x \text{ est dans } A \Delta B \text{ ou dans } C \text{ mais pas dans les deux} \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B \text{ et } x \notin C) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A \text{ et } x \notin C) \text{ ou } (x \in C \text{ et } x \notin A \Delta B) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B \text{ et } x \notin C) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A \text{ et } x \notin C) \text{ ou } (x \in C \text{ et } x \notin A \text{ et } x \notin B) \\ &\quad \text{ou } (x \in C \text{ et } x \in A \text{ et } x \in B) \\ &\Leftrightarrow x \text{ est dans une et une seule des trois parties ou dans les trois.} \end{aligned}$$

Par symétrie des rôles de  $A$ ,  $B$  et  $C$ ,  $A \Delta (B \Delta C)$  est également l'ensemble des éléments qui sont dans une et une seule des trois parties  $A$ ,  $B$  ou  $C$  ou dans les trois. Donc  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ . Ces deux ensembles peuvent donc se noter une bonne fois pour toutes  $A \Delta B \Delta C$ .

4)  $A = B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$  et  $B \setminus A = \emptyset \Rightarrow A \Delta B = \emptyset$ .

$$A \neq B \Rightarrow \exists x \in E / ((x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x \in B)) \Rightarrow \exists x \in E / x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \Delta B \Rightarrow A \Delta B \neq \emptyset.$$

5)  $\Leftarrow$  Immédiat.

$\Rightarrow$  Si  $A$  et  $B$  sont vides, alors  $A = B$ . Sinon, l'une au moins des deux parties  $A$  ou  $B$  n'est pas vide. Supposons sans perte de généralité que  $A$  n'est pas vide. Soit  $x$  un élément de  $A$ .

Si  $x \notin C$  alors  $x \in A \Delta C = B \Delta C$  et donc  $x \in B$  car  $x \notin C$ .

Si  $x \in C$  alors  $x \notin A \Delta C = B \Delta C$ . Puis  $x \notin B \Delta C$  et  $x \in C$  et donc  $x \in B$ . Dans tous les cas,  $x$  est dans  $B$ . Tout élément de  $A$  est dans  $B$  et donc  $A \subset B$ .

Maintenant, si  $B = \emptyset$ , alors  $A \subset B = \emptyset$  et donc  $A = \emptyset = B$  et si  $B \neq \emptyset$ , en échangeant les rôles de  $A$  et  $B$ , on a aussi  $B \subset A$  et finalement  $A = B$ .

### Exercice n° 4

#### 1ère solution.

**Réflexivité.** Pour tout réel  $x$ , on a  $x e^x = x e^x$  et donc, pour tout réel  $x$ , on a  $x \mathcal{R} x$ . Par suite, la relation  $\mathcal{R}$  est réflexive.

**Symétrie.** Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $x \mathcal{R} y$ . On a donc  $x e^y = y e^x$  puis  $y e^x = x e^y$  et donc  $y \mathcal{R} x$ . On a montré que pour tous réels  $x$  et  $y$ , si  $x \mathcal{R} y$  alors  $y \mathcal{R} x$ . Par suite, la relation  $\mathcal{R}$  est symétrique.

**Transitivité.** Soient  $x$ ,  $y$  et  $z$  trois réels tels que  $x \mathcal{R} y$  et  $y \mathcal{R} z$ . On a donc  $x e^y = y e^x$  et  $y e^z = z e^y$ . On en déduit que

$$x e^z = x e^y e^{-y} e^z = y e^x e^{-y} e^z = y e^z e^{-y} e^x = z e^y e^{-y} e^x = z e^x$$

et donc  $x\mathcal{R}z$ . On a montré que pour tous réels  $x$ ,  $y$  et  $z$ , si  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z$ , alors  $x\mathcal{R}z$ . Par suite, la relation  $\mathcal{R}$  est transitive. Finalement, la relation  $\mathcal{R}$  est réflexive, symétrique et transitive et donc, la relation  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbb{R}$ .

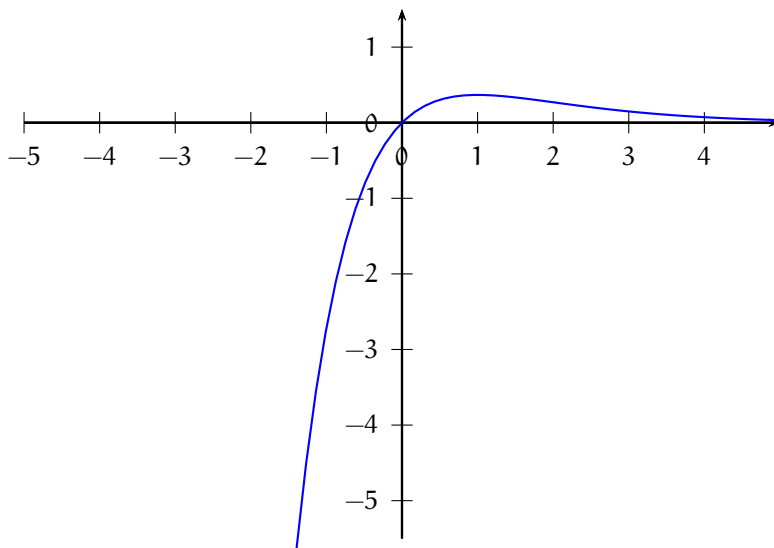
**2ème solution.** Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xe^y = ye^x \Leftrightarrow xe^{-x} = ye^{-y} \Leftrightarrow f(x) = f(y)$  où pour tout réel  $t$ ,  $f(t) = te^{-t}$ .

Avec cette remarque,

- la réflexivité devient :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f(x)$  et donc  $x\mathcal{R}x$ .
- la symétrie devient :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow y\mathcal{R}x$ .
- la transitivité devient :  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow (f(x) = f(y) \text{ et } f(y) = f(z)) \Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$ .

2) Soit  $x$  un réel. Déterminons le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de  $x$ .

Etudions la fonction  $f$ .  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $t$ ,  $f'(t) = (1-t)e^{-t}$ .  $f$  est strictement croissante sur  $] -\infty, 1]$  et strictement décroissante sur  $[1, +\infty[$ , tend vers  $-\infty$  en  $-\infty$  et tend vers  $0$  en  $+\infty$ . Le graphe de  $f$  est



L'étude de  $f$  montre alors que si  $x \in ] -\infty, 0] \cup \{1\}$ , la classe de  $x$  est un singleton et si  $x \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ , la classe de  $x$  est constituée de deux éléments distincts,  $x$  et un autre réel distinct de  $x$  (et qui a même image que  $x$  par  $f$ ).

### Exercice n° 5

**Réflexivité.** Pour tout élément  $A$  de  $\mathcal{P}(E)$ , on a  $A \subset A$ . Par suite, la relation  $\subset$  est réflexive.

**Anti-symétrie.** Soient  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\mathcal{P}(E)$  tels que  $A \subset B$  et  $B \subset A$ . Alors  $A = B$ . Par suite, la relation  $\subset$  est anti-symétrique.

**Transitivité.** Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois éléments de  $\mathcal{P}(E)$  tels que  $A \subset B$  et  $B \subset C$ . Alors  $A \subset C$ . On en déduit que la relation  $\subset$  est transitive.

Finalement, la relation  $\subset$  est réflexive, anti-symétrique et transitive et donc, la relation  $\subset$  est une relation d'ordre sur  $\mathcal{P}(E)$ .

Si  $E$  contient au moins deux éléments distincts  $x$  et  $y$ , posons  $A = \{x\}$  et  $B = \{y\}$ . On a  $A \not\subset B$  et  $B \not\subset A$ . Donc,  $\mathcal{P}(E)$  contient au moins deux éléments non comparables ou encore la relation  $\subset$  est une relation d'ordre partiel.

Si  $E$  est vide ou un singleton,  $\subset$  est une relation d'ordre totale sur  $\mathcal{P}(E)$ .

### Exercice n° 6

1) Soient  $x \in ] -\infty, 2]$  et  $y \in \mathbb{R}$ .

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - y = 0 \quad (E).$$

Le discriminant réduit de cette dernière équation est  $\Delta' = 4 - (3 - y) = y + 1$ .

- Si  $y < -1$ , alors  $\Delta' < 0$  et l'équation (E) n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$ . En particulier,  $y \notin f(I)$ .
- Si  $y > -1$ , alors  $\Delta' > 0$  et l'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes à savoir  $x_1 = 2 + \sqrt{y+1} \notin I$  et  $x_2 = 2 - \sqrt{y+1} \in I$ . En particulier,  $y \in f(I)$ .
- Si  $y = -1$ , alors  $\Delta' = 0$  et l'équation (E) admet une solution et une seule dans  $\mathbb{R}$  à savoir  $x = 2 = 2 - \sqrt{0} \in I$ . En particulier,  $y \in f(I)$ .

Ceci montre déjà que  $f(I) = [-1, +\infty[$ .

De plus, l'étude précédente montre que pour tout  $y \in f(I) = [-1, +\infty[$ , il existe un réel  $x$  et un seul de  $I = ]-\infty, 2]$  tel que  $y = f(x)$ , à savoir  $x = 2 - \sqrt{y+1}$ . Donc,  $f$  réalise une bijection de  $] - \infty, 2]$  sur  $[-1, +\infty[$  et

$$\forall x \in ] - \infty, 2], \forall y \in [-1, +\infty[, y = f(x) \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{y+1}.$$

On vient de trouver  $f^{-1}$  :

$$\forall x \in [-1, +\infty[, f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+1}$$

2) Soient  $x \in ] - 2, +\infty[$  et  $y \in \mathbb{R}$ .

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{2x-1}{x+2} \Leftrightarrow y(x+2) = 2x-1 \Leftrightarrow x(-y+2) = 2y+1 \quad (E).$$

- Si  $y = 2$ , cette équation s'écrit  $0x = 5$ . Dans ce cas, (E) n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$ .
- Si  $y \neq 2$ ,

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{-y+2}.$$

Il reste à étudier si, oui ou non, le réel  $x$  fourni appartient à  $] - 2, +\infty[$ . Soit  $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

$$\frac{2y+1}{-y+2} - (-2) = \frac{2y+1}{-y+2} + 2 = \frac{2y+1+2(-y+2)}{-y+2} = \frac{5}{-y+2}.$$

Cette dernière expression est du signe de  $-y+2$  et est donc strictement positive si et seulement si  $y < 2$ . Le réel  $x = \frac{2y+1}{-y+2}$  est dans  $] - 2, +\infty[$  si et seulement si  $y < 2$ .

En résumé, pour  $y \in \mathbb{R}$  donné, si  $y \geq 2$ , l'équation  $f(x) = y$  n'a pas de solution dans  $] - \infty, -2[$  et si  $y < 2$ , l'équation  $f(x) = y$  a une solution et une seule dans  $] - 2, +\infty[$ , à savoir  $x = \frac{2y+1}{-y+2}$ . Ceci montre que  $f(I) = ] - \infty, 2[$ , que  $f$  est bijective de  $] - 2, +\infty[$  sur  $] - \infty, 2[$  et que

$$\forall x \in ] - \infty, 2[, f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{-x+2}$$

3) Soient  $x \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$  et  $y \in \mathbb{R}$ .

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} - 1 = y \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = y+1.$$

Si  $y < -1$ , cette équation n'a pas de solution dans  $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$ . Si  $y \geq -1$ ,

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2x+3 = (y+1)^2 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(y+1)^2 \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2} + y - 1.$$

De plus, le réel  $x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(y+1)^2$  appartient à  $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$ . Ainsi, dans le cas où  $y \geq -1$ , l'équation  $f(x) = y$  admet une solution et une seule dans  $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$ . Ceci montre que  $f(I) = [-1, +\infty[$ , que  $f$  est bijective de  $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$  sur  $[-1, +\infty[$  et que

$$\forall x \in [-1, +\infty[, f^{-1}(x) = \frac{x^2}{2} + x - 1.$$

4)  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

Pour  $x \in [0, +\infty[$ ,  $0 \leq f(x) = \frac{x}{1+x} < \frac{1+x}{1+x} = 1$ . Donc,  $f([0, +\infty[) \subset [0, 1[$ .

Pour  $x \in ] - \infty, 0]$ ,  $1-x > 0$  et donc  $0 \geq f(x) = \frac{x}{1-x} > \frac{x-1}{1-x} = -1$ . Donc,  $f(] - \infty, 0]) \subset ] - 1, 0]$ .

Finalement,  $f(\mathbb{R}) \subset ] - 1, 1[$ .

Vérifions alors que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $] - 1, 1[$ .

Soit  $y \in [0, 1[$  et  $x \in \mathbb{R}$ . L'égalité  $f(x) = y$  impose à  $x$  d'être dans  $[0, +\infty[$ . Mais alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} = y \Leftrightarrow x = y(1+x) \Leftrightarrow x(1-y) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}.$$

Le réel  $x$  obtenu est bien défini, car  $y \neq 1$ , et positif, car  $y \in [0, 1[$ . On a montré que :

$$\forall y \in [0, 1[, \exists! x \in \mathbb{R} / y = f(x) \text{ (à savoir } x = \frac{y}{1-y}).$$

Soit  $y \in ]-1, 0[$  et  $x \in \mathbb{R}$ . L'égalité  $f(x) = y$  impose à  $x$  d'être dans  $] -\infty, 0[$ . Mais alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow x = y(1-x) \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}.$$

Le réel  $x$  obtenu est bien défini, car  $y \neq -1$ , et strictement négatif, car  $y \in ]-1, 0[$ . On a montré que :

$$\forall y \in ]-1, 0[, \exists! x \in \mathbb{R} / y = f(x) \text{ (à savoir } x = \frac{y}{1+y}).$$

Finalement,

$$\forall y \in ]-1, 1[, \exists! x \in \mathbb{R} / y = f(x),$$

ce qui montre que  $f(\mathbb{R}) = ]-1, 1[$ , que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $] -1, 1[$ . De plus, pour  $y \in ]-1, 1[$  donné,  $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$  si  $y \geq 0$  et  $f^{-1}(y) = \frac{y}{1+y}$  si  $y < 0$ . Dans tous les cas, on a  $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$ . Finalement,

$$\boxed{\forall x \in ]-1, 1[, f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}.}$$

### Exercice n° 7

1) Si  $A = E$ , pour tout  $X$  de  $\mathcal{P}(E)$ ,  $\varphi_A(X) = X \cap E = X$  et donc  $\varphi_A = \text{Id}_{\mathcal{P}(E)}$ . Dans ce cas,  $\varphi_A$  est injective et surjective.

Soit  $A$  une partie de  $E$ , distincte de  $E$ . Vérifions que  $\varphi_A$  n'est ni injective, ni surjective.

Puisque  $A \neq E$ , il existe un élément  $x_0$  de  $E$  qui n'est pas dans  $A$ . Soient  $B = \emptyset$  et  $C = \{x_0\}$ . On a

$$\varphi_A(B) = B \cap A = \emptyset = C \cap A = \varphi_A(C)$$

avec  $B \neq C$ . Donc,  $\varphi_A$  n'est pas injective. D'autre part, pour tout  $X$  de  $\mathcal{P}(E)$ ,  $A \cap X$  est contenue dans  $A$  et en particulier ne peut être égale à  $E$ . Donc,  $E$  n'a pas d'antécédent par  $\varphi_A$ . Ceci montre que  $\varphi_A$  n'est pas surjective.

En résumé, si  $A = E$ ,  $\varphi_A$  est injective et surjective et si  $A \neq E$ ,  $\varphi_A$  n'est ni injective, ni surjective. On a donc montré que :  $\varphi_A$  injective  $\Leftrightarrow \varphi_A$  surjective  $\Leftrightarrow A = E$ .

2) Si  $A = \emptyset$ , pour tout  $X$  de  $\mathcal{P}(E)$ ,  $\psi_A(X) = X \cup \emptyset = X$  et donc  $\psi_A = \text{Id}_{\mathcal{P}(E)}$ . Dans ce cas,  $\psi_A$  est injective et surjective.

Soit  $A$  une partie de  $E$ , distincte de  $\emptyset$ . Vérifions que  $\psi_A$  n'est ni injective, ni surjective.

Puisque  $A \neq \emptyset$ , il existe un élément  $x_0$  de  $A$ . Soient  $B = \emptyset$  et  $C = \{x_0\}$ . Puisque  $x_0$  est dans  $A$ , on a

$$\psi_A(B) = B \cup A = A = C \cup A = \psi_A(C)$$

avec  $B \neq C$ . Donc,  $\psi_A$  n'est pas injective. D'autre part, pour tout  $X$  de  $\mathcal{P}(E)$ ,  $A \cup X$  contient  $A$  et en particulier ne peut être égale à  $\emptyset$ . Donc,  $\emptyset$  n'a pas d'antécédent par  $\psi_A$ . Ceci montre que  $\psi_A$  n'est pas surjective.

En résumé, si  $A = \emptyset$ ,  $\psi_A$  est injective et surjective et si  $A \neq \emptyset$ ,  $\psi_A$  n'est ni injective, ni surjective. On a donc montré que :  $\psi_A$  injective  $\Leftrightarrow \psi_A$  surjective  $\Leftrightarrow A = \emptyset$ .

Autre solution : pour tout  $X \in \mathcal{P}(E)$ , (en notant  $\bar{X}$  le complémentaire de  $X$ )

$$\psi_A(X) = X \cup A = \overline{\bar{X} \cap \bar{A}} = \overline{\varphi_{\bar{A}}(\bar{X})} = (f \circ \varphi_{\bar{A}} \circ f)(X)$$

où  $f$  est l'application  $X \mapsto \bar{X}$ .  $f$  est une involution et en particulier  $f$  est une bijection de  $\mathcal{P}(E)$  sur lui-même. D'après la question 1),

$$\psi_A \text{ injective} \Leftrightarrow \varphi_{\bar{A}} \text{ injective} \Leftrightarrow \bar{A} = E \Leftrightarrow A = \emptyset$$

et de même,  $\psi_A$  surjective  $\Leftrightarrow A = \emptyset$ .

### Exercice n° 8

1) Soit  $(x_1, x_2) \in E^2$ .

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \text{ (car } g \text{ est une application)} \\ &\Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ (car } g \circ f \text{ est injective)}. \end{aligned}$$

On a montré que  $\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ . Donc  $f$  est injective.

2) Soit  $z \in H$ . Puisque  $g \circ f$  est surjective, il existe un élément  $x$  dans  $E$  tel que  $g(f(x)) = z$ . En posant  $y = f(x)$ ,  $y$  est un élément de  $F$  tel que  $g(y) = z$ . On a montré :  $\forall z \in G, \exists y \in F/ g(y) = z$ . Donc  $g$  est surjective.

### Exercice n° 9

• Supposons  $f$  injective. Soit  $x$  un élément de  $E$ . Par hypothèse,  $f(f(x)) = f(x)$ . Puisque  $f$  est injective, on en déduit que  $f(x) = x$ .

Ainsi, pour tout  $x$  de  $E$ ,  $f(x) = x$  et donc  $f = \text{Id}_E$ . En particulier,  $f$  est bijective et en particulier,  $f$  est surjective.

• Supposons  $f$  surjective. Soit  $x_1$  et  $x_2$  deux éléments de  $E$ . Puisque  $f$  est surjective, il existe deux éléments  $y_1$  et  $y_2$  de  $E$  tels que  $x_1 = f(y_1)$  et  $x_2 = f(y_2)$ .

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow f(f(y_1)) = f(f(y_2)) \Rightarrow f(y_1) = f(y_2) \text{ (car } f \circ f = f) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Donc,  $f$  est injective puis  $f$  est bijective. On note de nouveau que puisque  $f$  est injective, nécessairement  $f = \text{Id}_E$ .

Autre solution. Soit  $x \in E$ . Puisque  $f$  est surjective, il existe  $y \in E$  tel que  $f(y) = x$ . Mais alors,  $f(x) = f(f(y)) = f(y) = x$ . Ainsi, pour tout  $x$  de  $E$ ,  $f(x) = x$  et donc  $f = \text{Id}_E$ . En particulier,  $f$  est injective.

**Remarque.** Si on sait que  $f$  est bijective, on peut simplifier par  $f$  :

$$f \circ f = f \Rightarrow f \circ f \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} \Rightarrow f = \text{Id}_E.$$

### Exercice n° 10

On peut supposer sans perte de généralité que  $f \circ g \circ h$  et  $g \circ h \circ f$  sont injectives et que  $h \circ f \circ g$  est surjective. D'après le n° 9, puisque  $f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h$  est injective,  $h$  est injective et puisque  $h \circ f \circ g = h \circ (f \circ g)$  est surjective,  $h$  est surjective.

Déjà  $h$  est bijective. Mais alors,  $h^{-1}$  est surjective et donc  $f \circ g = h^{-1} \circ (h \circ f \circ g)$  est surjective en tant que composée de surjections. Puis  $h^{-1}$  est injective et donc  $f \circ g = (f \circ g \circ h) \circ h^{-1}$  est injective.  $f \circ g$  est donc bijective.

$f \circ g$  est surjective donc  $f$  est surjective.  $g \circ h \circ f$  est injective donc  $f$  est injective. Donc  $f$  est bijective. Enfin  $g = f^{-1} \circ (f \circ g)$  est bijective en tant que composée de bijections.

### Exercice n° 11

1) a) • Supposons  $f$  injective.

Soit  $X \in \mathcal{P}(E)$ . On a toujours  $X \subset f^{-1}(f(X))$ . ( $x \in X \Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(X))$ ).

Réciproquement, soit  $x \in E$ .

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(f(X)) &\Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow \exists x' \in X/ f(x) = f(x') \Rightarrow \exists x' \in X/ x = x' \text{ (puisque } f \text{ est injective)} \\ &\Rightarrow x \in X. \end{aligned}$$

Finalement,  $f^{-1}(f(X)) \subset X$  et donc  $f^{-1}(f(X)) = X$ .

• Supposons que pour tout  $X$  de  $\mathcal{P}(E)$ ,  $f^{-1}(f(X)) = X$ . Soit  $x \in X$ . Par hypothèse,  $f^{-1}\{f(x)\} = f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$  ce qui signifie que  $f(x)$  a un et un seul antécédent à savoir  $x$ . Par suite, tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent par  $f$  et  $f$  est injective.

b) • Supposons  $f$  injective. Soit  $(X, Y) \in (\mathcal{P}(E))^2$ . On a toujours  $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$  ( $X \cap Y \subset X \Rightarrow f(X \cap Y) \subset f(X)$  et de même,  $f(X \cap Y) \subset f(Y)$  et finalement,  $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$ ).

Réciproquement, soit  $y \in F$ .  $y \in f(X) \cap f(Y) \Rightarrow \exists (x, x') \in X \times Y/ y = f(x) = f(x')$ . Mais alors, puisque  $f$  est injective,  $x = x' \in X \cap Y$  puis  $y = f(x) \in f(X \cap Y)$ . Finalement,  $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$  et donc  $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ .

• Supposons que pour tout  $(X, Y) \in (\mathcal{P}(E))^2$ , on a  $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ .  
 Soit  $(x_1, x_2) \in E^2$  tel que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Posons  $X = \{x_1\}$  et  $Y = \{x_2\}$ . Par hypothèse  $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$  ce qui fournit

$$f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = \{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\} = \{f(x_1)\}.$$

En particulier,  $f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) \neq \emptyset$  ce qui impose  $\{x_1\} \cap \{x_2\} \neq \emptyset$  puis  $x_1 = x_2$ . Donc  $f$  est injective.

2) • Supposons  $f$  surjective. Soit  $X \in \mathcal{P}(E)$ . On a toujours  $f(f^{-1}(X)) \subset X$  (l'image d'un antécédent d'élément de  $X$  est dans  $X$ ).

Réciproquement, soit  $y$  un élément de  $X$ . Puisque  $f$  est surjective,  $y$  a un antécédent  $x$  par  $f$  qui est par définition un élément de  $f^{-1}(X)$ . Mais alors,  $y$  qui est l'image de  $x$  appartient à  $f(f^{-1}(X))$ . On a montré que  $X \subset f(f^{-1}(X))$  est finalement que  $f(f^{-1}(X)) = X$

• Supposons que pour tout  $X \in \mathcal{P}(E)$ ,  $f(f^{-1}(X)) = X$ . Soient  $y$  un élément de  $E$  puis  $X = \{y\}$ . Par hypothèse,  $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$ .  $y$  est donc l'image d'un élément de  $f^{-1}(\{y\})$  et en particulier  $y$  a un antécédent par  $f$ . On a montré que tout élément  $y$  de  $E$  a un antécédent par  $f$  dans  $E$  et donc  $f$  est surjective.

### Exercice n° 12

1) Il y a l'injection triviale  $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ .  

$$x \mapsto \{x\}$$

2) Soit  $f$  une application quelconque de  $E$  dans  $\mathcal{P}(E)$ . Montrons que  $f$  ne peut être surjective.

Soit  $A = \{x \in E / x \notin f(x)\}$ . Montrons que  $A$  n'a pas d'antécédent par  $f$ . Supposons par l'absurde que  $A$  a un antécédent  $a$ . Dans ce cas, où est  $a$  ?

$$a \in A \Rightarrow a \notin f(a) = A,$$

ce qui est absurde et

$$a \notin A \Rightarrow a \in f(a) = A,$$

ce qui est absurde. Finalement,  $A$  n'a pas d'antécédent et  $f$  n'est pas surjective. On a montré le théorème de CANTOR : pour tout ensemble  $E$  (vide, fini ou infini), il n'existe pas de bijection de  $E$  sur  $\mathcal{P}(E)$ .

### Exercice n° 13

$f$  est bien une application de  $\mathbb{N}^2$  dans  $\mathbb{N}$  car, pour tout couple  $(x, y)$  d'entiers naturels, l'un des deux entiers  $x + y$  ou  $x + y + 1$  est pair et donc,  $\frac{(x + y)(x + y + 1)}{2}$  est bien un entier naturel (on peut aussi constater que  $\frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} = 1 + 2 + \dots + (x + y)$  est entier pour  $x + y \geq 1$ ).

**Remarque.** La numérotation de  $\mathbb{N}^2$  a été effectuée de la façon suivante :

	0	1	2	3	...	x	...
0	0	1	3	6			
1	2	4	7				
2	5	8					
3	9						
⋮							
y							
⋮							

Sur une parallèle à la droite d'équation  $y = -x$ , la somme  $x + y$  est constante. Il en est de même de l'expression  $\frac{(x + y)(x + y + 1)}{2}$  et quand on descend de 1 en  $y$ , on avance de 1 dans la numérotation.

**Lemme.**  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists ! p \in \mathbb{N} / \frac{p(p + 1)}{2} \leq n < \frac{(p + 1)(p + 2)}{2}$ .

**Démonstration.** Pour démontrer ce lemme, on pourrait se contenter de constater que la suite des nombres triangulaires  $\left(\frac{p(p + 1)}{2}\right)_{p \geq 0}$  est strictement croissante. Néanmoins, on va faire mieux et fournir explicitement  $p$  en fonction de  $n$ .

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels.

$$\begin{aligned} \frac{p(p+1)}{2} \leq n < \frac{(p+1)(p+2)}{2} &\Leftrightarrow p^2 + p - 2n \leq 0 \text{ et } p^2 + 3p + 2 - 2n > 0 \\ &\Leftrightarrow p \leq \frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2} \text{ et } p > \frac{-3 + \sqrt{8n+1}}{2} = -1 + \frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2} \\ &\Leftrightarrow p \leq \frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2} < p+1 \Leftrightarrow p = \mathbb{E}\left(\frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2}\right). \end{aligned}$$

Le lemme est démontré car  $\mathbb{E}\left(\frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2}\right)$  est un entier naturel.

Montrons que  $f$  est surjective (et au passage, déterminons l'antécédent d'un entier  $n$  donné).

Soient  $n$  un entier naturel et  $p = \mathbb{E}\left(\frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2}\right)$  ( $p$  est un entier naturel). On pose  $\begin{cases} x + y = p \\ y = n - \frac{p(p+1)}{2} \end{cases}$  ou encore

$$\begin{cases} y = n - \frac{p(p+1)}{2} \\ x = p - y = \frac{p(p+3)}{2} - n \end{cases}. \text{ Tout d'abord, } y + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} = n - \frac{p(p+1)}{2} + \frac{p(p+1)}{2} = n. \text{ Mais il reste encore}$$

à vérifier que  $x$  et  $y$  ainsi définis (qui sont à l'évidence des entiers relatifs) sont bien des entiers naturels. Puisque  $\frac{p(p+1)}{2}$  est un entier naturel et que  $n \geq \frac{p(p+1)}{2}$ ,  $y$  est bien un entier naturel. Ensuite,  $\frac{p(p+3)}{2} = \frac{p(p+1)}{2} + p$  est aussi un entier naturel et de plus,

$$\frac{p(p+3)}{2} - n \geq \frac{p(p+3)}{2} - \left(\frac{(p+1)(p+2)}{2} - 1\right) = 0,$$

et  $x$  est bien un entier naturel. Ainsi, pour  $n$  naturel donné, en posant  $p = \mathbb{E}\left(\frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2}\right)$  puis  $x = \frac{p(p+3)}{2} - n$  et  $y = n - \frac{p(p+1)}{2}$ ,  $x$  et  $y$  sont des entiers naturels tels que  $f((x, y)) = n$ .  $f$  est donc surjective.

Montrons que  $f$  est injective. Pour cela, on montre que si  $x$  et  $y$  sont des entiers naturels vérifiant  $y + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} = n$ , alors nécessairement,  $x + y = p$  (et donc  $y = n - \frac{p(p+1)}{2}$  puis  $x = \frac{p(p+3)}{2} - n$ ).

Soient donc  $x$  et  $y$  deux entiers naturels. On a :

$$\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} \leq \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y = n < \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + (x+y+1) = \frac{(x+y+1)(x+y+2)}{2},$$

et le lemme montre que  $x+y = p$ . L'unicité du couple  $(x, y)$  est donc démontrée.  $f$  est une application injective et surjective

et donc  $f$  est bijective. Sa réciproque est  $f^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$  où  $p = \mathbb{E}\left(\frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2}\right)$ .

$$n \mapsto \left(\frac{p(p+3)}{2}, n - \frac{p(p+1)}{2}\right)$$