2

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

Au programme

- $\surd$ Approfondir la notion de nombre.
- $\surd$ Découvrir les nombres réels.
- $\surd$ Découvrir les différentes catégories de nombres : entiers, décimaux, rationnels, irrationnels.
- $\surd$ Maîtriser la notion d'intervalle.
- $\surd$ Découvrir la valeur absolue d'un nombre réel.

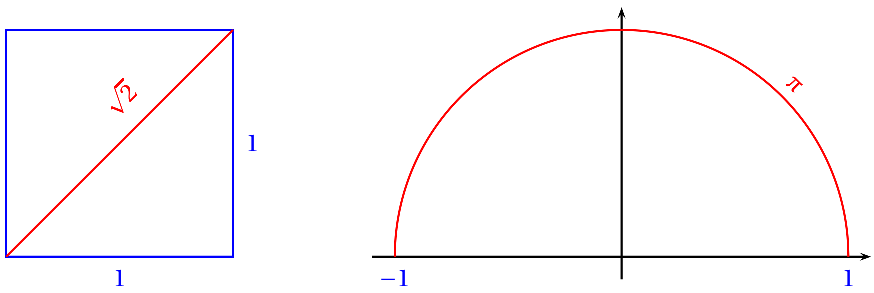
Table des matières

I L'ensemble ℝ des nombres réels

A Définition des nombres réels

Les **nombres réels** (ou plus simplement les réels) sont les nombres qui servent à mesurer (des longueurs, des aires, des températures (qui peuvent être négatives), des durées, ...). Les nombres $\sqrt{2}$ ou π ou $-\frac{1}{3}$ ou $3,7$ ou 0 ou -4 , ... sont des nombres réels.

Par exemple, d'après le théorème de PYTHAGORE, $\sqrt{2}$ est la longueur de la diagonale d'un carré de côté de longueur 1 ($\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$) et π est la longueur d'un demi-cercle de rayon 1.



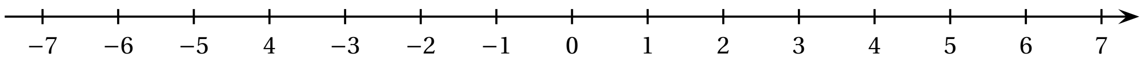
L'ensemble des nombres réels est noté ℝ. Les doubles barres apparaissant dans le symbole sont venus d'un problème d'écriture manuscrite : avant d'utiliser ce symbole, on utilisait un R imprimé en caractère très gras, ce qui était difficile à reproduire de manière manuscrite.

L'ensemble des réels positifs est noté $\mathbb{R}^+$, l'ensemble des réels négatifs est noté $\mathbb{R}^-$. L'ensemble des réels non nuls est noté $\mathbb{R}^*$. L'ensemble des réels strictement positifs est noté $\mathbb{R}^{+*}$ ou aussi $\mathbb{R}_+^*$ et l'ensemble des réels strictement négatifs est noté $\mathbb{R}^{-*}$ ou aussi $\mathbb{R}_-^*$.

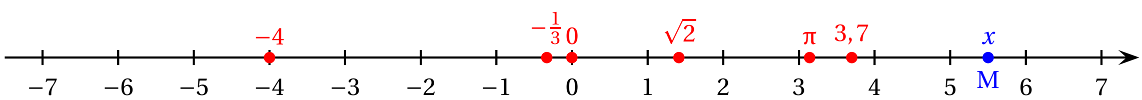
Pour retirer des nombres à ℝ, on utilise le symbole \ ou aussi −. Par exemple, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ou aussi $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}-\{0\}$. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ se lit « ℝ privé de 0 ». C'est l'ensemble des réels non nuls. $\mathbb{R}\setminus\left\{-1,\sqrt{2}\right\}$ se lit « ℝ privé de -1 et $\sqrt{2}$ ». $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ se lit « ℝ privé de ℤ » et est quant à lui l'ensemble de tous les nombres réels qui ne sont pas entiers.

B La droite numérique

Les réels peuvent se représenter graphiquement. On trace une droite et on munit cette droite, d'une origine, d'une unité et d'un sens de parcours :



A chaque point M de cette droite, on peut alors associer un réel et un seul, l'**abscisse** de M, et inversement, à chaque réel x, on peut associer un point de cette droite et un seul :



Cette droite graduée et orientée s'appelle la **droite numérique**.

C Valeur absolue d'un nombre réel

Les nombres $-\pi$ ou $+3,7$ peuvent être pensés en « deux morceaux » : un signe + ou − et une valeur numérique sans signe (π et $3,7$). Cette valeur numérique est la **valeur absolue** du réel (π pour $-\pi$ et $3,7$ pour $+3,7$). Cette valeur absolue est obtenue en supprimant le signe du réel considéré. Pour le nombre $-\pi$ (qui est négatif), cela s'obtient en prenant son opposé π et pour le nombre $+3,7$, on le garde à l'identique car $+3,7=3,7$. Ceci conduit à la définition :

Définition 1

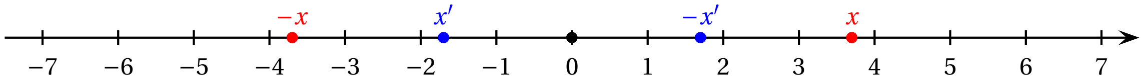
Soit x un réel.

La **valeur absolue** de x, notée $|x|$, est égale à x si x est positif et à $-x$ si x est négatif ou encore

$$|x| = \left\{\begin{array}{ll} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{array}\right. .$$

Ainsi, $|-\pi| = \pi$ et $|3,7| = 3,7$.

Le signe $-$ dans $-x$ est trompeur. Il ne faut pas croire que $-x$ est un nombre négatif. Si x est un réel positif, $-x$ est un réel négatif et si x est un réel négatif, $-x$ est un réel positif (ce qui fait que dans tous les cas $|x| \geqslant 0$). $-x$ est l'**opposé** de x. Sur la droite numérique, $-x$ est le symétrique de x par rapport à 0 :



Exercice 1

Déterminer la valeur absolue des réels suivants : **1)** $1-\sqrt{2}$ **2)** $2\sqrt{3}-\sqrt{11}$ **3)** $\pi - 4$.

Solution 1 :

1) $\sqrt{2}$ est strictement supérieur à 1 et donc $1-\sqrt{2}$ est strictement négatif. Par suite,

$$\left|1-\sqrt{2}\right| = -\left(1-\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}-1.$$

2) $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 4\times 3 = 12$ et $\left(\sqrt{11}\right)^2 = 11$. Puisque $12 > 11$, $2\sqrt{3}$ est strictement supérieur à $\sqrt{11}$ (nous admettons momentanément que deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées) et donc $2\sqrt{3}-\sqrt{11} > 0$. On en déduit que

$$\left|2\sqrt{3}-\sqrt{11}\right| = 2\sqrt{3}-\sqrt{11}.$$

3) $\pi < 4$ et donc $\pi - 4 < 0$. Par suite, $|\pi-4| = -(\pi-4) = 4-\pi$.

■

Exercice 2

Dans chacun des deux cas suivants, donner en fonction de x une autre écriture de l'expression considérée qui n'utilise pas de valeur absolue :

1) $|2x+3|$

2) $|3-6x|$

Solution 2 :

1) Soit x un réel. $2x+3 \geqslant 0$ équivaut à $2x \geqslant -3$ ou encore à $x \geqslant -\dfrac{3}{2}$. Donc, si $x \geqslant -\dfrac{3}{2}$, alors $2x+3 \geqslant 0$ puis $|2x+3| = 2x+3$ et si $x < -\dfrac{3}{2}$, alors $2x+3 < 0$ puis $|2x+3| = -(2x+3) = -2x-3$.

$$\text{Pour tout réel } x,\ |2x+3| = \left\{\begin{array}{l} 2x+3 \text{ si } x \geqslant -\dfrac{3}{2} \\ -2x-3 \text{ si } x < -\dfrac{3}{2} \end{array}\right. .$$

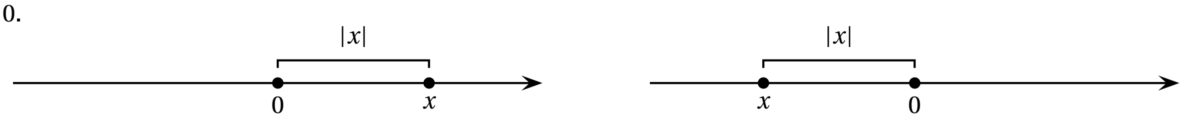
2) Soit x un réel. $3-6x \geqslant 0$ équivaut à $-3x \geqslant -6$ ou encore $x \leqslant \dfrac{-3}{-6}$ (nous reviendrons sur les manipulations d'inégalités dans les chapitres suivants) ou enfin à $x \leqslant \dfrac{1}{2}$. Donc, si $x \leqslant \dfrac{1}{2}$, alors $3-6x \geqslant 0$ puis $|3-6x| = 3-6x = -6x+3$ et si $x > \dfrac{1}{2}$, alors $3-6x < 0$ puis $|3-6x| = -(3-6x) = 6x-3$.

$$\text{Pour tout réel } x,\ |3-6x| = \left\{\begin{array}{l} -6x+3 \text{ si } x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 6x-3 \text{ si } x > \dfrac{1}{2} \end{array}\right. .$$

■

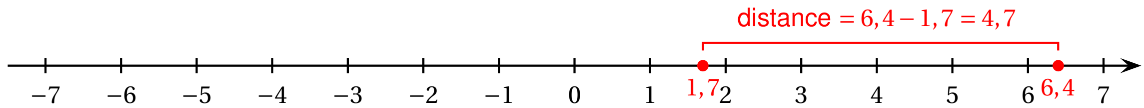
D Distance entre deux réels

La valeur absolue d'un réel x s'interprète géométriquement sur la droite numérique comme la distance du réel x au réel 0.

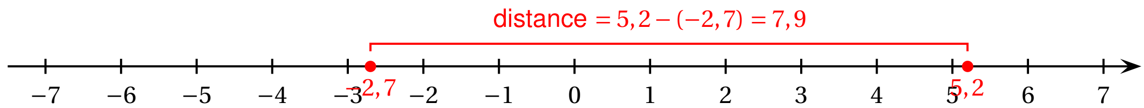


Par exemple, la distance de $-3,7$ à 0 est $3,7$ qui est la valeur absolue de $-3,7$.

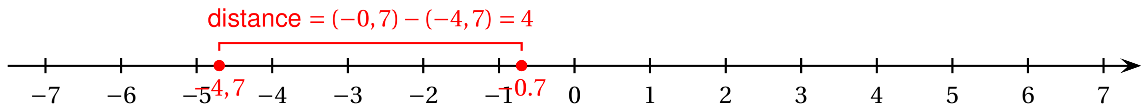
Plus généralement, la distance de $1,7$ à $6,4$ est $6,4-1,7$ ou encore $4,7$.



De même, la distance de $5,2$ à $-2,7$ est $5,2+2,7$ ou encore $7,9$. La somme $5,2+2,7$ doit en fait s'interpréter comme la différence $5,2-(-2,7)$.



La distance de $-4,7$ à $-0,7$ se calcule de la même façon. Elle est égale à la différence entre le plus grand des deux nombres $-0,7$ et le plus petit $-4,7$ c'est-à-dire $(-0,7)-(-4,7)$ ou encore $4,7-0,7$ ou enfin 4.



De manière générale, la distance $d(x,y)$ entre deux réels x et y est égale à la différence entre le plus grand des deux réels x et y et le plus petit : $d(x,y) = \begin{cases} y-x \text{ si } y \geqslant x \\ x-y \text{ si } x \geqslant y \end{cases}$. Or, $y \geqslant x$ équivaut à $y-x \geqslant 0$ et $x \geqslant y$ équivaut à $y-x \leqslant 0$. Donc,

$$d(x,y) = \begin{cases} y-x \text{ si } y-x \geqslant 0 \\ x-y \text{ si } y-x \leqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} y-x \text{ si } y-x \geqslant 0 \\ -(y-x) \text{ si } y-x \leqslant 0 \end{cases} = |y-x|.$$

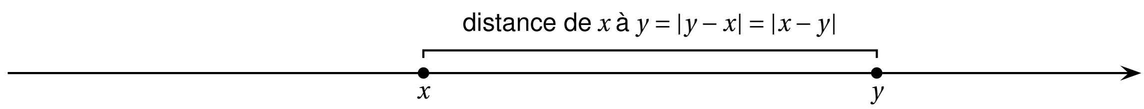
On peut donc énoncer le :

Theoreme 1

Soient x et y deux réels. La **distance** de x à y est $|y-x|$.

$|y-x|$ est égal à $y-x$ si $y \geqslant x$ et à $x-y$ si $x \geqslant y$ c'est-à-dire dans tous les cas, $|y-x|$ est égal à la différence entre le plus grand des deux nombres x et y et le plus petit.

On peut noter que le nombre $|x-y|$ est aussi égal à la différence entre le plus grand des deux nombres x ou y et le plus petit et donc $|x-y| = |y-x|$.



Exercice 3

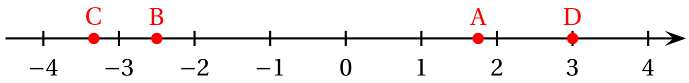
Sur la droite numérique, on considère les points A, B, C et D d'abscisses respectives $\frac{7}{4}$, $-2,5$, $-\frac{10}{3}$ et 3.

1) Faire un graphique.

2) Calculer les distances AB, BC et CD.

Solution 3 :

1) Graphique.



2) $\text{AB} = \left|(-2,5) - \dfrac{7}{4}\right| = |-2,5-1,75| = |-4,25| = 4,25$. On a aussi $\text{AB} = \left|\dfrac{7}{4} - (-2,5)\right| = |1,75+1,25| = |4,25| = 4,25$.
$\text{BC} = \left|-\dfrac{10}{3} - (-2,5)\right|$. Or, $-\dfrac{10}{3} - (-2,5) = -\dfrac{10}{3} + 2,5 = -\dfrac{10}{3} + \dfrac{25}{10} = -\dfrac{10}{3} + \dfrac{5}{2} = -\dfrac{20}{6} + \dfrac{15}{6} = -\dfrac{5}{6}$ puis $\text{BC} = \left|-\dfrac{5}{6}\right| = \dfrac{5}{6}$.
$\text{CD} = \left|3 - \left(-\dfrac{10}{3}\right)\right| = \left|\dfrac{9}{3} + \dfrac{10}{3}\right| = \left|\dfrac{19}{3}\right| = \dfrac{19}{3}$.

■

E Intervalles de ℝ

Définition 2

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

L'intervalle $[a, b]$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$.
L'intervalle $[a, b[$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x < b$.
L'intervalle $]a, b]$ est l'ensemble des réels x tels que $a < x \leqslant b$.
L'intervalle $]a, b[$ est l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$.

On peut noter que pour l'intervalle $[a, b]$, on accepte le cas $a = b$. Par exemple, l'intervalle $[2, 2]$ est $\{2\}$.

L'intervalle $[a, b]$ est un intervalle **fermé**, ce qui signifie que les deux **bornes** a et b de l'intervalle appartiennent à l'intervalle (on dit aussi que les bornes sont comprises).
L'intervalle $]a, b[$ est un intervalle **ouvert**, ce qui signifie qu'aucune des deux bornes a et b de l'intervalle n'appartient à l'intervalle (on dit aussi que les bornes ne sont pas comprises).
L'intervalle $[a, b[$ est un intervalle **ouvert à droite et fermé à gauche**, ce qui signifie que la borne a appartient à l'intervalle et la borne b n'appartient pas à l'intervalle.
L'intervalle $]a, b]$ est un intervalle **ouvert à gauche et fermé à droite**, ce qui signifie que la borne a n'appartient pas à l'intervalle et la borne b appartient à l'intervalle.

De même, on veut décrire les réels x plus grands ou plus petits qu'un réel a donné. Par exemple, l'ensemble des réels x tels que $x \geqslant a$ est un ensemble qui démarre à a et qui finit ... à l'infini. On introduit un nouveau symbole : ∞. Ce 8 à l'horizontale se lit « l'infini ». Il y a « deux infinis » sur la droite numérique, l'un à sa droite noté $+\infty$ et l'un à sa gauche noté $-\infty$.

Définition 3

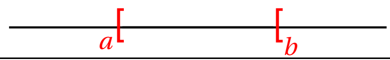
Soit a un réel.

L'intervalle $[a, +\infty[$ est l'ensemble des réels x tels que $x \geqslant a$.
L'intervalle $]a, +\infty[$ est l'ensemble des réels x tels que $x > a$.
L'intervalle $]-\infty, a]$ est l'ensemble des réels x tels que $x \leqslant a$.
L'intervalle $]-\infty, a[$ est l'ensemble des réels x tels que $x < a$.

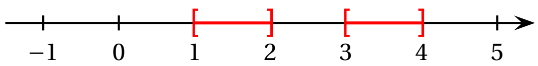
☞ *$+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres. Pour cette raison, les crochets en $+\infty$ et $-\infty$ sont toujours ouverts.*

On note enfin que ℝ est aussi un intervalle : c'est l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.

On peut résumer les différentes situations dans un tableau :

Intervalle	Ensemble des réels x	Représentation graphique
$[a,b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
$[a,b[$	$a \leqslant x < b$	
$]a,b]$	$a < x \leqslant b$	
$]a,b[$	$a < x < b$	
$[a,+\infty[$	$x \geqslant a$	
$]a,+\infty[$	$x > a$	
$]-\infty,a]$	$x \leqslant a$	
$]-\infty,a[$	$x < a$	
$]-\infty,+\infty[$	$\mathbb{R}$	

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties de $\mathbb{R}$ qui sont d'un seul tenant, sans trou. Ce n'est pas le cas de l'ensemble des réels x tels que $1 \leqslant x \leqslant 2$ **ou** $3 \leqslant x \leqslant 4$. Cet ensemble est la **réunion** des intervalles $[2,3]$ et $[4,5]$. Il se note $[2,3] \cup [4,5]$.



On peut définir de même l'**intersection** des intervalles $[1,3]$ et $[2,4]$. C'est l'ensemble des réels x tels que $1 \leqslant x \leqslant 3$ **et** $2 \leqslant x \leqslant 4$. Cette intersection se note $[1,3] \cap [2,4]$ et est égale à $[2,3]$. De manière générale,

Définition 4

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

La **réunion** de I et de J est l'ensemble des réels x tels que x appartient à I **ou** x appartient à J. Elle se note $\mathrm{I} \cup \mathrm{J}$.
L'**intersection** de I et de J est l'ensemble des réels x tels que x appartient à I **et** x appartient à J. Elle se note $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$.

Exercice 4

Ecrire à l'aide d'intervalles chacun des ensembles D suivants et le représenter graphiquement :

1) $3 \leqslant x < 5$.

2) $x \leqslant 3$.

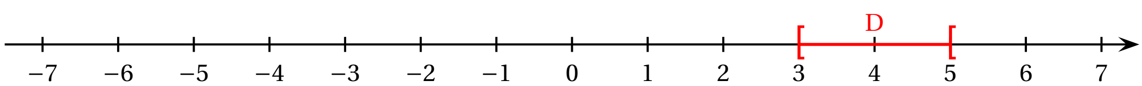
3) $-3 \leqslant x \leqslant 2$ ou $x < -4$.

4) $x \leqslant -2$ ou $x > -3$.

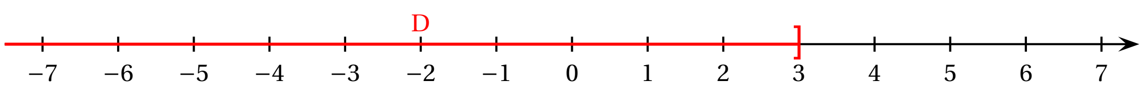
5) $x \leqslant -2$ et $x > -3$.

Solution 4 :

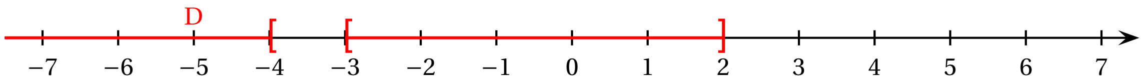
1) Les bornes de l'intervalle sont 3 et 5. La borne 3 est comprise et la borne 5 n'est pas comprise. Donc, $\mathrm{D} = [3,5[$.



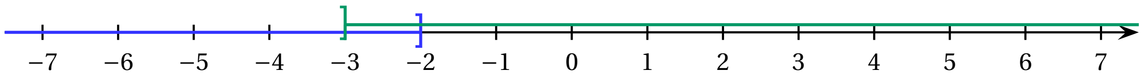
2) D est l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à 3. La borne 3 est comprise. Donc, $\mathrm{D} =]-\infty,3]$.



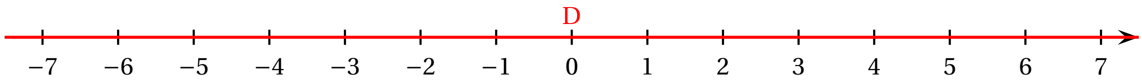
3) D est la réunion de deux intervalles, l'intervalle $[-3,2]$ et l'intervalle $]-\infty,-4[$. Donc, $\mathrm{D}=]-\infty,-4[\cup[-3,2]$.



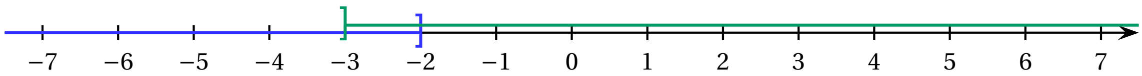
4) D est la réunion de deux intervalles, l'intervalle $]-\infty,-2]$ et l'intervalle $]-3,+\infty[$. Donc, $\mathrm{D}=]-\infty,-2]\cup]-3,+\infty[$.



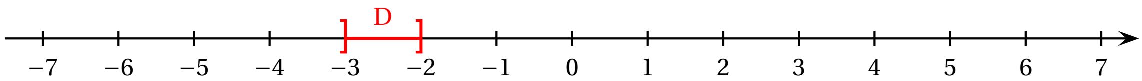
La réunion de ces deux intervalles est l'ensemble des réels x « qui ont été colorés au moins une fois » c'est-à-dire tous les réels. Donc, $\mathrm{D}=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$.



5) D est l'intersection de deux intervalles, l'intervalle $]-\infty,-2]$ et l'intervalle $]-3,+\infty[$. Donc, $\mathrm{D}=]-\infty,-2]\cap]-3,+\infty[$.



L'intersection de ces deux intervalles est l'ensemble des réels x « qui ont été colorés deux fois ». Ce sont les réels x tels que $-3<x\leqslant-2$. Donc, $\mathrm{D}=]-3,-2]$.



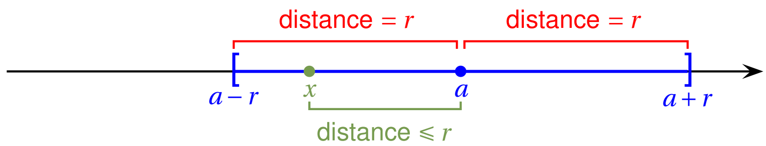
■

On va maintenant voir que certains des intervalles du tableau de la page 6 peuvent être décrits à l'aide de la valeur absolue. On rappelle que pour tout réel x, $|x|$ est la distance de x à 0 et plus généralement, pour tous réels x et y, $|x-y|$ est la distance de x à y.

Theoreme 2

Soient a un réel et r un réel positif. L'ensemble des réels x tels $|x-a|\leqslant r$ est l'intervalle $[a-r,a+r]$.

Démonstration : Soient a un réel et r un réel positif. Pour tout réel x, la condition $|x-a|\leqslant r$ équivaut au fait que la distance du réel x au réel a est inférieure ou égale à r. Pour obtenir le réel qui est à la droite de a et à une distance r de a, on ajoute r à a et on obtient $a+r$ et pour obtenir le réel qui est à la gauche de a et à une distance r de a, on retranche r à a et on obtient $a-r$. Dans le graphique ci-dessous, la lettre d désigne la distance de x à a :



Ainsi, les réels x dont la distance au réel a est inférieure ou égale à r sont les réels x vérifiant $a-r\leqslant x\leqslant a+r$. La condition $|x-a|\leqslant r$ est donc équivalente à $a-r\leqslant x\leqslant a+r$ c'est-à-dire au fait que x appartient à l'intervalle $[a-r,a+r]$.

■

Définition 5

Soient a un réel et r un réel positif.

L'intervalle $[a-r,a+r]$ est appelé l'**intervalle fermé de centre** a **et de rayon** r.

Revenons sur l'intervalle $[a,b]$. Un tel intervalle s'appelle un **segment** (intervalle fermé des deux côtés). Cet intervalle a un centre et un rayon. Le rayon de l'intervalle $[a,b]$ est la longueur du segment $[a,b]$, à savoir $b-a$, divisée en 2 : $r=\dfrac{b-a}{2}$. Il reste à déterminer le centre de l'intervalle qui est le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$.

Theoreme 3

Soient A et B deux points de la droite numérique dont les abscisses sont notées a et b avec $a \leqslant b$. Soit I le milieu du segment $[AB]$.

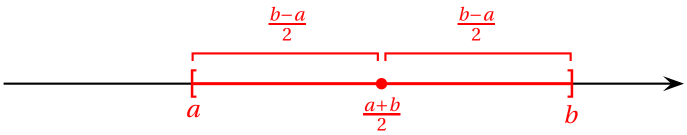
Alors, l'abscisse du point I est $\dfrac{a+b}{2}$.

Démonstration : On note x l'abscisse du point I. Le point I est à égale distance de A et de B. La distance de A à I est $x-a$ (car $x \geqslant a$) et la distance de I à B est $b-x$ (car $b \geqslant x$). Donc, $x-a=b-x$ puis $2x=a+b$ et finalement

$$x=\frac{a+b}{2}.$$

■

Ainsi, l'intervalle $[a,b]$ est l'intervalle fermé de centre $\dfrac{a+b}{2}$ et de rayon $\dfrac{b-a}{2}$:



II L'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$

On va maintenant découvrir que les nombres réels peuvent être classés en différentes catégories. On connaît déjà les réels particuliers que sont les entiers naturels et les entiers relatifs :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}.$$

On découvre maintenant les **nombres décimaux** que l'on définit avec précision.

A Définition des nombres décimaux

Définition 6

Soit x un nombre réel.

x est un nombre décimal si et seulement si il existe un entier relatif a et un entier naturel n tel que $x=\dfrac{a}{10^n}$.

On représente traditionnellement un nombre décimal positif sous la forme d'une **partie entière** et d'une **partie décimale** (finie) séparées par une virgule. Par exemple,

$$\frac{1704}{10^2}=\frac{1704}{100}=\frac{1\,700}{100}+\frac{4}{100}=17+\frac{4}{100}=17+0,04=17,04.$$

Inversement, le nombre $0,33$, qui est égal à $\dfrac{33}{10^2}$, ou le nombre -7, qui est égal à $\dfrac{-7}{10^0}$ (on rappelle que $10^0=1$) sont des nombres décimaux. De manière générale, tout entier relatif a est un nombre décimal car $a=\dfrac{a}{10^0}$ où a est un entier relatif et 0 est un entier naturel. Donc,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{R}.$$

Certaines fractions d'entiers sont des nombres décimaux. Par exemple, $\dfrac{7}{25}=\dfrac{7\times 4}{25\times 4}=\dfrac{28}{100}=0,28$. Mais certaines fractions d'entiers ne sont pas des nombres décimaux :

Theoreme 4

Le nombre $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal ou encore $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Démonstration : (au programme)

Supposons que $\frac{1}{3}$ soit un nombre décimal. Il existe donc un entier a (strictement positif) et un entier naturel n tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$. Cette égalité s'écrit encore $10^n = 3a$, ce qui entraine le fait que 10^n est divisible par 3.

Mais, 10^n s'écrit $1\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ chiffres}}$. La somme des chiffres de 10^n est égale à 1 et n'est pas divisible par 3. Donc, 10^n n'est pas divisible par 3 et il n'est donc pas possible que $\frac{1}{3}$ soit un nombre décimal.

■

On peut avoir une autre idée pour montrer l'impossibilité de l'égalité $10^n = 3a$. Le membre de droite est divisible par le nombre premier 3. Le membre de gauche 10^n s'écrit $2^n \times 5^n$ où 2 et 5 sont des nombres premiers. La décomposition en produit de facteurs premiers de 10^n ne contient donc pas le facteur premier 3. D'après le théorème fondamental de l'arithmétique, $10^n \neq 3a$.

☞ *Dans la démonstration, nous avons utilisé un certain type de raisonnement : le* ***raisonnement par l'absurde****. Nous avons supposé que $\frac{1}{3}$ était un nombre décimal puis, après différents raisonnements, nous sommes parvenus à une phrase totalement fausse ($10^n = 3a$). Nous en avons conclu que l'hypothèse initiale était en fait fausse ou encore, nous en avons conclu que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.*

De manière générale, les nombres décimaux sont les nombres dont l'écriture décimale comporte un nombre fini de chiffres non nuls. Par exemple, $7 = 7,0 = 7,0000\ldots$ est un nombre décimal ou aussi $\frac{7}{25} = 0,28 = 0,280000\ldots$ est un nombre décimal. Si on pose la division de 7 par 25, la division s'arrête :

$$\begin{array}{l|l} 7 & 25 \\ \cline{2-2} 7\ 0 & 0,28 \\ 2\ 0\ 0 & \\ \quad\ \ 0 & \end{array}$$

Par contre, si on pose la division de 1 par 3, la division ne s'arrête jamais :

$$\begin{array}{l|l} 1 & 3 \\ \cline{2-2} 1\ 0 & 0,33\ldots \\ \ \ 1\ 0 & \\ \quad 1\ 0 & \\ \qquad \ddots & \end{array}$$

On obtient ainsi $\frac{1}{3} = 0,3333\ldots$ et le nombre $\frac{1}{3}$ admet une écriture décimale avec une infinité de décimales non nulles.

B Approximations décimales d'un nombre réel

Les nombres décimaux sont des nombres assez simples qui permettent d'avoir une idée de la valeur d'un réel plus compliqué. Par exemple, $1,4^2 = 1,96$ et donc $1,4^2 \leqslant 2$. De même, $1,5^2 = 2,25$ et donc $1,5^2 > 2$. On en déduit que

$$1,4 \leqslant \sqrt{2} < 1,5$$

(on admet de nouveau que deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leur carré, ce qui sera démontré plus tard dans l'année) ou encore $\sqrt{2} = 1,4\ldots$ Notons que si on avait écrit $1,4 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,5$ on aurait eu un doute sur la première décimale. Celle-ci pouvait être 4 ou 5.

On peut améliorer. $1,41^2 = 1,9881$ et $1,42^2 = 2,0164$. Donc,

$$1,41 \leqslant \sqrt{2} < 1,42$$

ou encore $\sqrt{2} = 1,41\ldots$ Dans le premier calcul, nous avons donné un encadrement de $\sqrt{2}$ par deux nombres décimaux et l'**amplitude** de l'encadrement est $1,5 - 1,4$ c'est-à-dire $0,1$ ou encore 10^{-1}. On dit que l'on a obtenu un encadrement décimal de $\sqrt{2}$ à $0,1$ près ou encore à 10^{-1} près.
Dans le deuxième calcul, nous avons donné un encadrement de $\sqrt{2}$ par deux nombres décimaux et l'amplitude de l'encadrement est $1,42 - 1,41$ c'est-à-dire $0,01$ ou encore 10^{-2}. On a obtenu un encadrement décimal de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près. De manière générale,

Définition 7

Soit x un réel.

Un **encadrement décimal du réel x à 10^{-n} près** est un encadrement de la forme $d \leqslant x \leqslant d + 10^{-n}$ où d est un nombre décimal et n un entier naturel.

Dans cet encadrement, d est une valeur décimale approchée de x à 10^{-n} près **par défaut** et d est une valeur décimale approchée de x à 10^{-n} près **par excès**.

Si $d \geqslant 0$ et si la dernière décimale (non nulle) de d n'est pas 9, ajouter 10^{-n} à d revient à ajouter 1 à sa n-ème décimale. Par exemple, $4{,}371 + 10^{-3} = 4{,}371 + 0{,}001 = 4{,}372$. Mais si la dernière décimale est 9 : $3{,}19 + 10^{-2} = 3{,}19 + 0{,}01 = 3{,}20$.

La notion d'encadrement décimal à 10^{-n} permet de donner l'**arrondi** à 10^{-n}. x étant un réel donné, on admet qu'il est possible encadrer x par deux nombres décimaux d_1 et d_2 **à n décimales** tels que $d_2 - d_1 = 10^{-n}$. Par exemple, $1{,}41 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1{,}42$. $1{,}41$ et $1{,}42$ sont des valeurs décimales approchées de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près. Pour arrondir, on va choisir celle des deux valeurs d_1 ou d_2 qui est la plus proche de $\sqrt{2}$. Pour faire ce choix, on a besoin de connaître la décimale suivante : $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ et donc $1{,}41$ est plus proche de $\sqrt{2}$ que $1{,}42$. On écrit alors

$$\sqrt{2} = 1{,}41 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

De même, $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ Donc, $1{,}4142135 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1{,}4142136$ puis $1{,}4142135$ et $1{,}4142136$ sont des valeurs décimales approchées de $\sqrt{2}$ à 10^{-7} près. De plus, $1{,}4142136$ est plus proche de $\sqrt{2}$ que $1{,}4142135$. On écrit alors

$$\sqrt{2} = 1{,}4142136 \text{ arrondi à } 10^{-7}.$$

Exercice 5

Une calculatrice fournit $\pi = 3{,}141592654$.

1) Donner un encadrement décimal de π d'amplitude 10^{-2} près et un encadrement décimal de π d'amplitude 10^{-4}.

2) Donner une valeur décimale approchée de π à 10^{-6} par excès.

3) Donner l'arrondi à 10^{-4}.

Solution 5 :

1) Un encadrement décimal de π d'amplitude 10^{-2} est $3{,}14 \leqslant \pi \leqslant 3{,}15$. Un encadrement décimal de π d'amplitude 10^{-4} est $3{,}1415 \leqslant \pi \leqslant 3{,}1416$.

2) $3{,}141592 \leqslant \pi \leqslant 3{,}141593$. Une valeur décimale approchée de π à 10^{-6} par excès est $3{,}141593$.

3) $\pi = 3{,}14159\ldots$ et donc $3{,}1415 \leqslant \pi \leqslant 3{,}1416$. De plus, $\pi = 3{,}14159\ldots$ et donc $3{,}1416$ est plus proche de π que $3{,}1415$. On a ainsi obtenu

$$\pi = 3{,}1416 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

■

III L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

A Définition des nombres rationnels

Définition 8

Soit x un nombre réel.

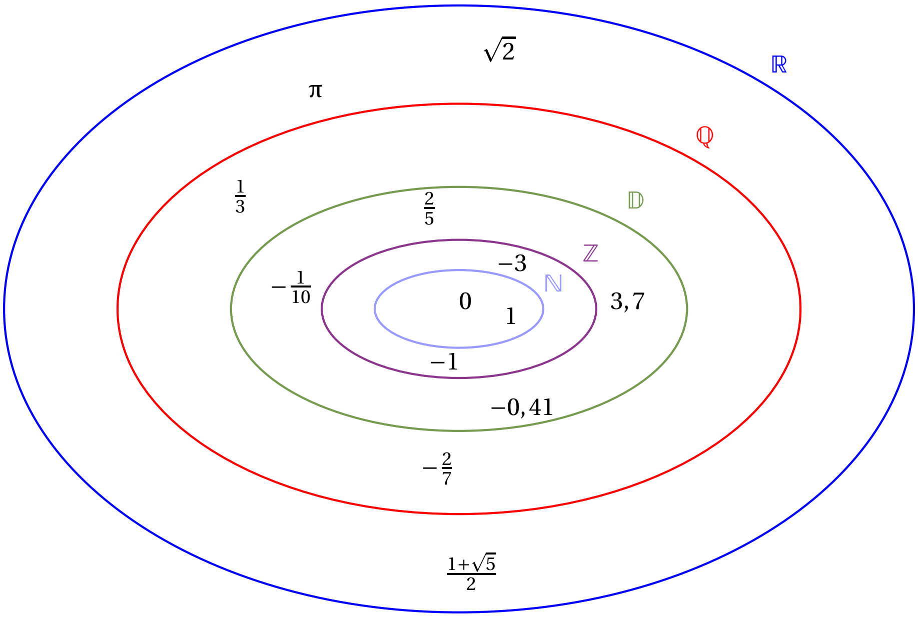
x est un **nombre rationnel** si et seulement si il existe un entier relatif a et un entier naturel non nul b tel que $x = \dfrac{a}{b}$. x est dit **irrationnel** dans le cas contraire.

L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$.

Tout nombre décimal est en particulier un nombre rationnel car un nombre décimal est de la forme $\dfrac{a}{10^n}$ où a est un entier relatif et n un entier naturel et en particulier, un nombre décimal est le quotient d'un entier relatif et d'un entier naturel non nul. On a donc

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Certains nombres réels ne pas des nombres rationnels. On montrera plus loin que le nombre $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. On admet que le nombre π est lui aussi un nombre irrationnel. La démonstration de ce résultat est d'un niveau bien supérieur au niveau d'une classe de seconde. Il faut attendre la première année après le bac pour cette démonstration. On peut alors se représenter les différents ensembles de nombres :



On peut donner d'autres exemples de nombres irrationnels. Les nombres $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ..., et plus généralement $\sqrt{n}$ où n n'est pas le carré d'un entier, sont tous des nombres irrationnels. Des nombres comme $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $3-\sqrt{7}$ sont aussi des irrationnels.

B Forme irréductible d'une fraction d'entiers non nulle

Theoreme 5

Tout nombre rationnel non nul $x = \dfrac{a}{b}$ avec a entier relatif non nul et b entier naturel non nul, peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = \dfrac{p}{q}$ où de plus p est un entier relatif non nul, q est un entier naturel non nul et les nombres p et q n'admettent qu'un seul diviseur positif commun, le nombre 1.

Définition 9

La fraction $\dfrac{p}{q}$ du théorème précédent s'appelle la **forme irréductible** de la fraction $\dfrac{a}{b}$.

Nous ne démontrerons pas ce résultat. Par contre, on doit savoir comment parvenir à la forme irréductible : on décompose le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers et on simplifie le plus possible tous les facteurs premiers que l'on peut simplifier. Par exemple,

$$\frac{72}{108} = \frac{2^3 \times 3^2}{2^2 \times 3^3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{2}{3}.$$

$\dfrac{2}{3}$ est la forme irréductible de la fraction $\dfrac{72}{108}$.

On démontre maintenant que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Theoreme 6

$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Démonstration : (au programme)

Supposons par l'absurde que le nombre $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. Il existe donc deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ($a > 0$ car $\sqrt{2} > 0$). On écrit ensuite la fraction $\frac{a}{b}$ sous forme irréductible : $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers naturels non nuls n'admettant pas d'autre diviseur positif commun que 1.

En élevant au carré les deux membres de l'égalité $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, on obtient $\frac{p^2}{q^2} = 2$ puis $p^2 = 2q^2$. Le nombre p^2 est donc un nombre pair. On a vu dans le chapitre précédent que le carré d'un nombre pair est un nombre pair et le carré d'un nombre impair est un nombre impair. Puisque p^2 est un nombre pair, l'entier p est nécessairement un nombre pair.

On peut donc poser $p = 2p'$ où p' est un entier naturel non nul. L'égalité $p^2 = 2q^2$ s'écrit $(2p')^2 = 2q^2$ puis $4p'^2 = 2q^2$ puis $2p'^2 = q^2$ après simplification par 2. On en déduit que le nombre q^2 est un nombre pair puis que le nombre q est lui aussi un nombre pair.

En résumé, les nombres p et q sont tous les deux des nombres pairs et on peut donc simplifier par 2 le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{p}{q}$. Mais ceci est impossible car la faction $\frac{p}{q}$ est irréductible. L'hypothèse « $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel » est donc fausse et on a montré que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

■

Exercice 6

1) On admet que le nombre π est irrationnel. Montrer que les nombres $\frac{2\pi+1}{3}$ et $\frac{1}{\pi}$ sont irrationnels (raisonner par l'absurde).

2) On admet que le nombre π est irrationnel. Montrer que le nombre $\sqrt{\pi}$ est irrationel.

3) Que pensez-vous de l'affirmation : pour tout réel a, si a est irrationel, alors a^2 est irrationnel ?

Solution 6 :

1) Supposons que le nombre $\frac{2\pi+1}{3}$ soit un nombre rationnel. Il existe deux entiers naturels non nuls a et b (car $\frac{2\pi+1}{3} > 0$) tels que $\frac{2\pi+1}{3} = \frac{a}{b}$. On en déduit que $2\pi + 1 = \frac{3a}{b}$ puis $2\pi = \frac{3a}{b} - 1 = \frac{3a-b}{b}$ puis $\pi = \frac{3a-b}{2b}$. Puisque $3a - b$ est un entier relatif et $2b$ est un entier naturel non nul, ceci montre que π est un rationnel, ce qui est faux. Donc, $\frac{2\pi+1}{3}$ est un irrationnel.

Supposons que le nombre $\frac{1}{\pi}$ soit un nombre rationnel. Il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\frac{1}{\pi} = \frac{a}{b}$. En prenant l'inverse, on en déduit que $\pi = \frac{b}{a}$. Puisque b est un entier relatif et a est un entier naturel non nul, ceci montre que π est un rationnel, ce qui est faux. Donc, $\frac{1}{\pi}$ est un irrationnel.

2) Supposons que le nombre $\sqrt{\pi}$ soit un nombre rationnel. Il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\sqrt{\pi} = \frac{a}{b}$. En élevant au carré, on en déduit que $\pi = \frac{a^2}{b^2}$. Puisque a^2 est un entier relatif et b^2 est un entier naturel non nul, ceci montre que π est un rationnel, ce qui est faux. Donc, $\sqrt{\pi}$ est un irrationnel.

3) Prenons $a = \sqrt{2}$. On sait que a est irrationnel. Mais $a^2 = 2$ et donc a^2 est rationnel. Ainsi, il existe au moins un réel a tel que a est irrationnel et a^2 est rationnel. L'affirmation de l'énoncé est fausse.

■

C Développement décimal d'un réel

C'est une notion difficile qui ne peut être correctement étudiée qu'au cours de la première année d'études après le bac. On donne ici quelques résultats admis.

On a déjà dit que les nombres décimaux sont les nombres réels qui admettent une écriture décimale avec un nombre fini de décimales non nulles : $7,31$ ou $0,407\,964$.

On a vu que certains nombres rationnels comme $\dfrac{1}{3}$ ne sont pas des nombres décimaux et admettent une écriture décimale avec une infinité de décimales non nulles

$$\frac{1}{3} = 0,333\,33\ldots$$

On peut démontrer que le développement décimal d'un nombre rationnel qui n'est pas un nombre décimal n'est pas aussi « complètement quelconque » qu'on le désire. Il est nécessairement **périodique** c'est-à-dire que dans ce développement décimal, à partir d'un certain moment, une même séquence de chiffres va se répéter à l'infini. Par exemple,

$$\frac{2}{7} = 0,285714\,285714\,2857142\ldots$$

ou aussi

$$\frac{1219}{9900} = 0,12\,31\,31\,31\,31\ldots$$

Pour comprendre pourquoi la partie décimale de $\dfrac{2}{7}$ est obligatoirement périodique, il faut poser la division de 2 par 7 :

$$\begin{array}{llllllllll|l}
2 & & & & & & & & & & 7 \\ \cline{11-11}
2 & 0 & & & & & & & & & 0,28571428 \\
 & 6 & 0 & & & & & & & & \\
 & & 4 & 0 & & & & & & & \\
 & & & 5 & 0 & & & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & & & & & \\
 & & & & & 3 & 0 & & & & \\
 & & & & & & 2 & 0 & & & \\
 & & & & & & & 6 & 0 & &
\end{array}$$

A chaque étape de la division, on obtient un reste qui est l'un des 7 nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 (le reste étant strictement inférieur au diviseur 7). Au bout de $7+1=8$ étapes au maximum, on aura forcément obtenu deux fois le même reste (ce raisonnement est un raisonnement classique en mathématiques connu sous le nom de « **principe des tiroirs** » : si dans n tiroirs, on place $n+1$ chaussettes, il est obligatoire que deux chaussettes au moins se retrouvent dans le même tiroir). On recommencera alors la même séquence de décimales … jusqu'à l'infini.

Inversement, quand un développement décimal est périodique, le nombre réel correspondant est nécessairement un nombre rationnel. Considérons par exemple le nombre $x = 0,27\,27\,27\ldots$. Alors

$$100x = 27,27\,27\,27\ldots = 27 + 0,27\,27\ldots = 27 + x$$

puis $100x - x = 27$ ou encore $99x = 27$ ou enfin

$$x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}.$$

En admettant que tout nombre réel admet un développement décimal fini ou infini, les nombres irrationnels admettent donc des développements décimaux avec une infinité de décimales non nulles et **non périodiques** (on dit aussi apériodiques). On peut aller aussi loin qu'on veut, on ne trouvera jamais une même séquence de chiffres qui se répète. C'est le cas de $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1,414\,213\,562\ldots$$

Exercice 7

Une calculatrice fournit $\dfrac{1\,980\,127}{630\,294} = 3,141\,592\,654$ et $\pi = 3,141\,592\,654$. Donc, $\pi = \dfrac{1\,980\,127}{630\,294}$.

Que pensez-vous de ce raisonnement ?

Solution 7 : Le nombre π est irrationnel et le nombre $\dfrac{1\,980\,127}{630\,294}$ est rationnel. On a donc nécessairement

$$\pi \neq \frac{1\,980\,127}{630\,294}.$$

Une calculatrice ne connaît qu'un nombre fini de décimales de n'importe quel nombre et ne permet donc pas de savoir si deux nombres sont égaux ou différents dès que le nombre de décimales non nulles est un peu important. C'est un raisonnement qui permet de le savoir.

■

On connaît aujourd'hui énormément de décimales du nombre π. Voici les premières décimales :

$$\pi = 3,141\,592\,653\,5\ldots$$

A ce sujet, on peut citer le début d'un « poème » datant du XIXème siècle permettant de mémoriser les premières décimales de π.

Que	j	'	aime	à	faire	apprendre	un	nombre	utile	aux	sages
3	1		4	1	5	9	2	6	5	3	5

Résumons maintenant les différentes situations :

- Si x est un entier, on peut considérer que x n'a pas de partie décimale (par exemple, $x = 7$) ou que x a une partie décimale illimitée qui n'est constituée que de 0 ($x = 7,0000\ldots$).

- Si x est un nombre décimal qui n'est pas un entier, on peut considérer que x a une partie décimale ayant un nombre fini de décimales non nulles (par exemple, $x = 7,301$) ou que x a une partie décimale illimitée qui n'est constituée que de 0 à partir d'un certain moment ($x = 7,3010000\ldots$).

- Si x est un nombre rationnel qui n'est pas un nombre décimal, x a une partie décimale ayant un nombre infini de décimales non nulles et ce développement décimal est périodique à partir d'un certain moment (par exemple, $x = \dfrac{4}{330} = 0,0\,12\,12\,12\,\ldots$).

- Si x est un nombre réel qui n'est pas un nombre rationnel, x a une partie décimale ayant un nombre infini de décimales non nulles et ce développement décimal n'est pas périodique (par exemple, $x = \sqrt{2} = 1,414\,213\,562\,\ldots$).