Planche n° 2. Arithmétique.

T = travailler le cours E = pour s'entrainer ou réviser R = recherche L = long

★ = facile ★★ = assez facile ★★★ = assez difficile ★★★★ = difficile

I Divisibilité

Exercice 1

T ★ (Divisible ou pas)

Compléter en utilisant une des phrases suivantes (plusieurs réponses possibles) : « divise », « est un multiple de », « est un diviseur de », « est divisible par », « n'est pas divisible par », « n'est pas un diviseur de », « n'est pas un multiple de », « ne divise pas ».

1) $441 \ldots\ldots 3$ $\quad 3 \ldots\ldots 441$. **2)** $223 \ldots\ldots 11$ $\quad 11 \ldots\ldots 223$.

Exercice 2

T ★ (Démontrer qu'un entier est divisible ou non par un autre)

Démontrer chacune des deux phrases suivantes :

1) 56 est un multiple de 7 **2)** 56 n'est pas un multiple de 11.

Exercice 3

T ★★ (Démontrer qu'un entier est divisible 3)

Montrer que la somme de trois entiers relatifs consécutifs est un entier relatif divisible par 3.

Exercice 4

T ★ (Vrai ou faux)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse dans chaque cas.

1) $36\,141$ est divisible par 3. **2)** $36\,141$ est un multiple de 9. **3)** 4 divise $41\,624$. **4)** 3015 divise 5.

Exercice 5

T ★★ (Vrai ou faux)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse dans chaque cas.

1) Si un entier n est divisible par 4 et par 6, alors n est divisible par 24.

2) Si un entier n est un multiple de 10 et de 3, alors n est divisible par 30.

3) Si un entier n est divisible par 12, alors n est divisible par 6.

4) Si un entier n est un multiple de 12, alors n est un multiple de 6.

5) Si 7 divise un entier n, alors n est divisible par 14.

Exercice 6

R ★★ (Nombre de multiples d'un entier compris entre deux entiers)

Combien y a-t-il de multiples de 67 compris entre 200 et 500 ?

Exercice 7

R ★★ (Une équation)

La somme de quatre multiples consécutifs de 7 est égale à 266. Déterminer ces quatre entiers.

Exercice 8

L ★★ (Un critère de divisibilité par 11)

1) Soit n un entier naturel à 2 chiffres. On note a le chiffre des dizaines et b le chiffre des unités.
Monter que n est divisible par 11 si et seulement si $-a+b$ est divisible par 11.

2) Soit n un entier naturel à 3 chiffres. On note a le chiffre des centaines, b le chiffre des dizaines et c le chiffre des unités.
a) Montrer qu'il existe un entier relatif k tel que $n=a-b+c+11k$.
b) En déduire que n est divisible par 11 si et seulement si $a-b+c$ est divisible par 11.
c) Les entiers suivants sont-ils divisibles par 11 : 673 et 627 et 495 ?

Exercice 9

T ★★ (Vrai ou faux)

Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
1) Tout entier naturel non nul divisible par 4 et par 5 est divisible par 20.
2) Tout entier naturel non nul divisible par 2 et 10 est divisible par 20.

Exercice 10

R ★★ (Divisible par 11 ?)

Montrer que pour tout entier naturel n, le nombre $2^n+2^{n+1}+2^{n+3}$ est divisible par 11.

Exercice 11

R ★★ (Distribution de jetons)

On dispose de 20 jetons blancs et 12 jetons rouges à répartir entre un certain nombre (au moins égal à 2) de joueurs. Les joueurs doivent avoir le même nombre de jetons blancs et doivent avoir aussi le même nombre de jetons rouges. Tous les jetons doivent être distribués.

Quels sont les différents nombres de joueurs possibles ?

II Nombres pairs, nombres impairs

Exercice 12

T ★★ (Une démonstration fausse)
On veut montrer que « la somme d'un entier pair et d'un entier impair est un entier impair ». La solution ci-dessous comporte une erreur. Trouvez cette erreur.

Solution. Soient n un entier relatif pair et m un entier relatif impair. Il existe un entier k tel que $n=2k$ et il existe un entier k tel que $m=2k+1$.
On a alors $n+m=2k+2k+1=4k+1=2(2k)+1$ où de plus $2k$ est un entier relatif. Donc, $n+m$ est un entier impair.

Exercice 13

T ★★ (Vrai ou faux)
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Dans chaque cas, si l'affirmation est vraie, le démontrer et si l'affirmation est fausse, fournir un contre-exemple.
1) La somme de deux nombres impairs est un nombre impair.
2) Le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.
3) Si le carré d'un nombre est impair, alors ce nombre est impair.
4) Le produit de deux nombres est impair si et seulement si ces deux nombres sont impairs.
5) Le produit de deux nombres est pair si et seulement si ces deux nombres sont pairs.
6) Si la somme de deux nombres est un nombre pair, alors ces deux nombres sont pairs.
7) Le nombre 0 est à la fois pair et impair.

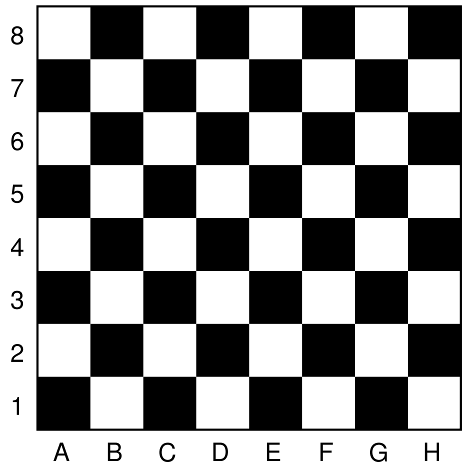
Exercice 14

R ⋆⋆⋆⋆ (Somme d'entiers impairs consécutifs)

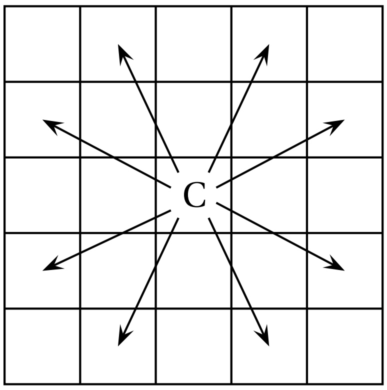
1) Montrer que la différence de deux carrés parfaits consécutifs est un nombre impair.
2) Calculer la somme des nombres impairs de 1 à 199.

Exercice 15

R ⋆⋆⋆ (Déplacement d'un cavalier aux échecs)
Un échiquier est un carré ayant de 8 cases de côté et donc un carré constitué de 64 cases. Les cases sont noires et blanches en alternance.



Sur cet échiquier, un cavalier se déplace en un seul coup de trois carreaux horizontalement puis de deux carreaux verticalement ou aussi de trois carreaux verticalement puis de deux carreaux horizontalement, comme décrit ci-dessous :



On place le cavalier sur la case en bas à gauche (case A1). On veut faire parcourir à ce cavalier un trajet passant une et une seule fois par chaque case de l'échiquier et finissant sur la case en haut à droite (case H8). Peut-on trouver un tel trajet ?

Exercice 16

R ⋆⋆ (Montrer qu'un nombre est pair)

Montrer que la différence entre le carré d'un entier naturel n et l'entier n lui-même, est un entier pair.

Exercice 17

R ⋆⋆⋆ (Triangle rectangle à côtés entiers)

Les trois longueurs des côtés d'un certain triangle rectangle sont des nombres entiers. Montrer qu'au moins un de ces nombres est un nombre pair.

III Nombres premiers

Exercice 18

T ★ (Forme irréductible d'une fraction)

Trouver la forme irréductible de la fraction $\dfrac{4\,312}{1\,008}$

Exercice 19

T ★★ (Nombre premier pair)

Soit p un nombre premier. Montrer que p est pair si et seulement si $p=2$.

Exercice 20

T ★ (premier ou pas premier ?)

Les nombres suivants sont-ils des nombres premiers ?

1) 47,

2) 247,

3) 331,

Exercice 21

R ★ ★ ★ (Infinité de l'ensemble des nombres premiers)

On suppose par l'absurde qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers. On les range dans l'ordre croissant : $2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ p$ (p est donc le plus grand nombre premier). On pose $\mathrm{N}=(2\times3\times5\times7\times\ldots\times p)+1$.

1) Montrer que $\mathrm{N}\geqslant 2$.
2) N est-il divisible par l'un des nombres premiers $2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ p$?
3) Conclure.

Exercice 22

R ★★ (Sans calculatrice)

Sans calculatrice, montrer que le nombre $1\,728$ est le cube d'un entier. Préciser cet entier.

Exercice 23

R ★★ (Sans calculatrice)

Vérifier très rapidement que $2\,323$ n'est pas un nombre premier.

IV Divers

Exercice 24

R ★★ (Divisible par 4 ?)

Soit p un nombre premier différent de 2. Montrer que p^2-1 est divisible par 4.

Exercice 25

R ★ ★ ★ (Des ampoules allumées en même temps)

A midi, deux ampoules s'allument ensemble. Ensuite, les deux ampoules clignotent. La première ampoule s'allume toutes les 78 secondes et la deuxième ampoule s'allume toutes les 110 secondes.

1) Déterminer la première heure, après midi, à laquelle les deux ampoules s'allumeront de nouveau ensembles.
2) Les deux ampoules s'allumeront-elles ensemble à minuit ?

Exercice 26

R ⋆⋆⋆⋆ (Quelles sont les lampes allumées ?)

Des lampes, installées en ligne, sont numérotées de 1 à 100. Chaque lampe est munie d'un interrupteur. Au début, toutes les lampes sont éteintes.
A la première étape, on appuie sur tous les interrupteurs (et donc toutes les lampes sont allumées).
A la deuxième étape, on appuie sur tous les interrupteurs des lampes ayant un numéro pair (et donc les lampes ayant un numéro pair sont éteintes et les lampes ayant un numéro impair sont allumées).
A la troisième étape, on appuie sur les interrupteurs des lampes portant un numéro multiple de 3.
A la quatrième étape, on appuie sur les interrupteurs des lampes portant un numéro multiple de 4.
Et ainsi de suite jusqu'à la centième étape où on appuie sur l'interrupteur de la lampe numéro 100.

Quelles lampes sont éclairées après la centième étape ? (on admettra que si un entier n supérieur ou égal à 2 s'écrit $n = p^a q^b r^c \dots$ où p, q, r, $\dots$ sont des nombres premiers deux à deux distincts et a, b, c, $\dots$ sont des entiers naturels non nuls, le nombre de diviseurs (strictement positifs) de n est $(a+1)(b+1)(c+1)\dots$ (vois exercice nº 28).

Exercice 27

R ⋆⋆ (Un carré fait avec des rectangles)

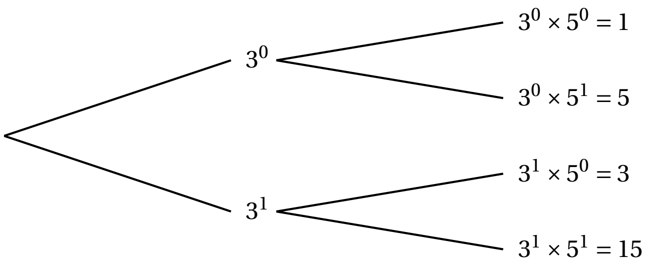
On dispose de plusieurs rectangles dont les côtés mesurent 48 cm et 72 cm. Déterminer le plus petit carré que l'on peut former avec ces rectangles, tous disposés horizontalement.

Exercice 28

R ⋆⋆⋆ (Nombre de diviseurs d'un entier).

Un entier naturel non nul n (y compris $n = 1$) peut s'écrire sous la forme $n = 2^a 3^b 5^c \dots$ où les exposants a, b, c, $\dots$ sont des entiers naturels éventuellement nuls (si $n = 1$, tous les exposants sont nuls). On veut déterminer le nombre de ses diviseurs (strictement positifs) en fonction des exposants a, b, c, $\dots$
On admet que les diviseurs de n sont les entiers de la forme $2^{a'} 3^{b'} 5^{c'} \dots$ où $0 \leqslant a' \leqslant a$, $0 \leqslant b' \leqslant b$, $0 \leqslant c' \leqslant c$, $\dots$

1) Dresser la liste des diviseurs de 13. Combien y en a-t-il ?
2) Les diviseurs de 15 sont les nombres de la forme $3^{a'} 5^{b'}$ où $0 \leqslant a' \leqslant 1$ et $0 \leqslant b' \leqslant 1$.
On peut représenter la situation par un arbre :



Dresser la liste des diviseurs de 15. Combien y en a-t-il ?
3) En vous inspirant de la question 2), combien 72 a-t-il de diviseurs ? En dresser la liste.
4) a) Un nombre entier naturel non nul est de la forme $n = 2^a$ où a est un entier naturel.
Combien n a-t-il de diviseurs ?
b) Combien de diviseurs a le nombre 16 ? Dresser la liste des diviseurs de 16.
5) a) Un nombre entier naturel non nul est de la forme $n = 2^a 3^b$ où a et b sont deux entiers naturels.
Combien n a-t-il de diviseurs ?
b) Dresser la liste des diviseurs de 45.
6) a) Un nombre entier naturel non nul est de la forme $n = 2^a 3^b 5^c$ où a, b et c sont trois entiers naturels.
Combien n a-t-il de diviseurs ?
b) Dresser la liste des diviseurs de 600.

Exercice 29

R ⋆⋆ (Diffrérence de deux carrés).

Deux carrés ont des côtés de longueurs respectives a et b avec $a < b$. De plus, a et b sont des entiers naturels non nuls. La différence des aires des deux carrés est égale à 55 cm^2. De plus, a est inférieur à 10.

Déterminer a et b.

Exercice 30

R ⋆⋆ (Divisible par 3 ?).

Déterminer tous les entiers naturels n supérieurs ou égaux à 3 tels que $n^2 - 1$ soit divisible par 3.