Fiche n° 2. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

I Divisibilité

Définition 1

Soient a et b deux entiers relatifs.
b est **multiple** de a si et seulement si il existe un entier relatif q tel que $b = a \times q$.

Définition 2

Soient a et b deux entiers relatifs, a étant non nul.
a est un **diviseur** de b ou encore a divise b si et seulement si il existe un entier relatif q tel que $b = a \times q$.

Si a n'est pas nul, les phrases « a est un diviseur de b » et « b est un multiple de a » sont équivalentes.

Théoreme 1

Soient a, b et c trois entiers relatifs.
Si b et c sont multiples de a, **alors** $b + c$ et $b - c$ sont multiples de a.

Soit n un entier naturel. Les critères de divisibilité usuels sont :

• n est divisible par 2 si et seulement si n est pair. Ceci équivaut à dire que le chiffre des unités de n est 0, 2, 4, 6 ou 8.

• n est divisible par 4 si et seulement le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4. Par exemple, 1524 est divisible par 4 alors que 2018 ne l'est pas.

• n est divisible par 5 si et seulement si le chiffre des unités de n est 0 ou 5.

• n est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

• n est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

II Nombres pairs, nombres impairs

Définition 3

Les entiers relatifs **pairs** sont les multiples de 2 c'est-à-dire les entiers relatifs de la forme $2k$ où k est un entier relatif.
Les entiers relatifs **impairs** sont les entiers relatifs de la forme $2k + 1$ où k est un entier relatif.

Tout entier est soit pair, soit impair. 0 est un nombre pair

Théoreme 2

La somme de deux entiers pairs est un entier pair.
La somme de deux entiers impairs est un entier pair.
La somme d'un entier pair et d'un entier impair est un entier impair.

Théoreme 3

Le carré d'un entier pair est un entier pair.
Le carré d'un entier impair est un entier impair.

III Nombres premiers

Définition 4

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

n est un nombre **premier** si et seulement si n admet exactement deux diviseurs dans $\mathbb{N}$. Dans le cas contraire, l'entier n est dit **composé**.

Théorème 4

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

n est premier si et seulement si les seuls diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$ sont 1 et n.
n est non premier si et seulement si n admet dans $\mathbb{N}^*$ au moins un diviseur autre que 1 et n.

Il existe une infinité de nombres premiers. Les dix premiers nombres premiers sont

$$2 \qquad 3 \qquad 5 \qquad 7 \qquad 11 \qquad 13 \qquad 17 \qquad 19 \qquad 23 \qquad 29$$

Le **théorème fondamental de l'arithmétique** s'énonce ainsi :

Théorème 5

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2, est soit un nombre premier, soit un produit de nombres premiers. De plus, cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Exemple.

$$\begin{aligned}
20\,328 &= 2 \times 10\,164 = 2 \times 2 \times 5\,082 = 2 \times 2 \times 2 \times 2\,541 = 2^3 \times 2\,541 \\
&= 2^3 \times 3 \times 847 \\
&= 2^3 \times 3 \times 7 \times 121 = 2^3 \times 3 \times 7 \times 11 \times 11 \\
&= 2^3 \times 3 \times 7 \times 11^2.
\end{aligned}$$

Théorème 6

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 4.

n n'est pas premier si et seulement si n est divisible par au moins un nombre premier inférieur ou égal à sa racine carrée.
n est premier si et seulement si n n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à sa racine carrée.

Exemple. 151 est-t-il premier ? Puisque $144 < 151 < 169$ ou encore $12^2 < 151 < 13^2$, on a $\sqrt{151} = 12,\dots$ Les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{151}$ sont 2, 3, 5, 7 et 11. 151 n'est divisible par aucun de ces nombres premiers après vérification (à l'aide des critères de divisibilité usuels et à l'aide de la calculatrice). Donc, 151 est un nombre premier.

