Planche n° 2. Arithmétique. Corrigés.

I Divisibilité

Exercice 1

Compléter en utilisant une des phrases suivantes (plusieurs réponses possibles) : « divise », « est un multiple de », « est un diviseur de », « est divisible par », « n'est pas divisible par », « n'est pas un diviseur de », « n'est pas un multiple de », « ne divise pas ».

1) $441 \ldots\ldots 3$ $3 \ldots\ldots 441$.
2) $223 \ldots\ldots 11$ $11 \ldots\ldots 223$.

Solution 1

1) La somme des chiffres de 441 est égale à 9 et 9 est divisible par 3.
Donc, 441 **est divisible par** 3 ou aussi 441 **est un multiple de** 3. De fait, $441 = 3 \times 147$.
On peut aussi écrire 3 **est un diviseur de** 441 ou aussi 3 **divise** 441.

2) La division euclidienne de 223 par 11 s'écrit : $223 = 22 \times 11 + 3$ avec $0 \leqslant 3 \leqslant 10$. Le reste de la division euclidienne de 223 par 11 est égal à 3. Ce reste n'est pas nul.
Donc, 223 **n'est pas divisible par** 11 ou aussi 223 **n'est pas un multiple de** 11.
On peut aussi écrire 11 **n'est pas un diviseur de** 123 ou aussi 11 **ne divise pas** 123.

Rappels de cours et/ou commentaires.

Définition. Soient a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$. b divise a (ou aussi a est divisible par b ou aussi b est un diviseur de a) si et seulement si il existe un entier relatif q tel que $a = bq$.
Définition. Soient a et b deux entiers relatifs. a est un multiple de b si et seulement si il existe un entier relatif q tel que $a = bq$. ■

Exercice 2

Démontrer chacune des deux phrases suivantes :

1) 56 est un multiple de 7 **2)** 56 n'est pas un multiple de 11.

Solution 2

1) $56 = 7 \times 8$ et donc il existe un entier relatif q tel que $56 = 7q$, à savoir $q = 8$. Ceci montre que 56 est un multiple de 7.

2) La division euclidienne de 56 par 11 s'écrit $56 = 5 \times 11 + 1$ avec $0 \leqslant 1 \leqslant 10$. Le reste de la division euclidienne de 56 par 11 est égal à 1. Ce reste n'est pas nul et donc, 56 n'est pas divisible par 11 ou encore 56 n'est pas un multiple de 11.

Rappels de cours et/ou commentaires.

Pour montrer que 56 n'est pas divisible par 11, on pouvait aussi écrire : $\dfrac{56}{11} = 5,09\ldots$ et donc $\dfrac{56}{11} \notin \mathbb{Z}$ puis 56 n'est pas divisible par 11. ■

Exercice 3

Montrer que la somme de trois entiers relatifs consécutifs est un entier relatif divisible par 3.

Solution 3

Trois entiers relatifs consécutifs sont de la forme $n-1$, n et $n+1$ où n est un entier relatif. Or,

$$(n-1) + n + (n+1) = 3n.$$

Ainsi, il existe un entier relatif q tel que $(n-1) + n + (n+1) = 3q$, à savoir $q = n$. La somme $(n-1) + n + (n+1)$ est donc un entier relatif divisible par 3.

Rappels de cours et/ou commentaires.
• *Définition. Soient a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$. a est divisible par b si et seulement si il existe un entier relatif q tel que $a = bq$.*
• *Une autre solution possible était : $n+(n+1)+(n+2) = 3n+3 = 3(n+1)$ où de plus $n+1 \in \mathbb{Z}$. On en déduit que $n+(n+1)+(n+2)$ est un entier relatif divisible par 3.* ■

Exercice 4

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse dans chaque cas.

1) $36\,141$ est divisible par 3. **2)** $36\,141$ est un multiple de 9. **3)** 4 divise $41\,624$. **4)** 3015 divise 5.

Solution 4

1) et **2)** La somme des chiffres de $36\,141$ est $3+6+1+4+1$ ou encore 15. 15 est divisible par 3 et n'est pas divisible par 9. Donc, $36\,141$ est divisible par 3 et n'est pas divisible par 9. Donc, 1) est vrai et 2) est faux.

3) Les nombres formé par les chiffres des dizaines et des unités de $41\,624$ est 24. 24 est divisible par 4 et donc $41\,624$ est divisible par 4. 3) est vrai.

4) 5 divise $3\,015$ mais $3\,015$ ne divise pas 5 car par exemple, $\dfrac{5}{3\,015}$ n'est pas un entier. Donc, 4) est faux.

Rappels de cours et/ou commentaires.
Les critères de divisibilité. Soit n un entier naturel.
n est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3. n est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
n est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par les deux derniers chiffres de n (c'est-à-dire le chiffre des dizaines et le chiffre des unités) est divisible par 4.
n est divisible par 5 si et seulement si le chiffre des unités de n est 0 ou 5. ■

Exercice 5

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse dans chaque cas.

1) Si un entier n est divisible par 4 et par 6, alors n est divisible par 24.

2) Si un entier naturel non nul n est un multiple de 10 et de 3, alors n est divisible par 30.

3) Si un entier n est divisible par 12, alors n est divisible par 6.

4) Si un entier n est un multiple de 12, alors n est un multiple de 6.

5) Si 7 divise un entier n, alors n est divisible par 14.

Solution 5

1) L'entier 12 est divisible par 4 et par 6. Mais l'entier 12 n'est pas divisible par 24. Donc, 1) est faux.

2) Si l'entier n est multiple de 10 (avec $10 = 2 \times 5$) et de 3, cela entraine que les nombres premiers 2, 3 et 5, font partie de la décomposition en produit de facteurs premiers de n. Il existe donc un entier naturel q tel que $n = 2 \times 3 \times 5 \times q$ ou encore $n = 30q$. n est effectivement divisible par 30. 2) est vrai.

3) et **4)** Les deux affirmations signifient la même chose et elles sont toutes les deux vraies. En effet, si n est un multiple de 12, il existe un entier naturel q tel que $n = 12q$. Cette dernière égalité s'écrit encore $n = 6 \times (2q)$ où de plus $2q$ est un entier. Donc, n est un multiple de 6.

5) Un multiple de 7 n'est pas nécessairement un multiple de 14. Par exemple, 21 ou plus simplement 7, sont des multiples de 7 qui ne sont pas multiples de 14. 5) est faux.

Rappels de cours et/ou commentaires.
Montrer que 1) (ou aussi 5)) est faux, c'est montrer qu'il existe au moins un entier n pour lequel 1) est faux. Pour le montrer, on fournit un contre-exemple explicite. ■

Exercice 6

Combien y a-t-il de multiples de 67 compris entre 200 et 500 ?

Solution 6

Les multiples de 67 sont les entiers relatifs de la forme $67q$ où q est un entier relatif.
Ensuite, $200 \leqslant 67q \leqslant 500$ équivaut à $\dfrac{200}{67} \leqslant q \leqslant \dfrac{500}{67}$ (après division des trois membres de l'encadrement par le nombre strictement positif 67). Ce dernier encadrement s'écrit encore $2,9\ldots \leqslant q \leqslant 7,4\ldots$ puis $3 \leqslant q \leqslant 7$ car q est un entier.
Les multiples de 67 compris au sens large entre 200 et 500 sont 3×67, 4×67, 5×67, 6×67 et 7×67. Il y a cinq multiples de 67 compris au sens large entre 200 et 500.

Exercice 7

La somme de quatre multiples consécutifs de 7 est égale à 266. Déterminer ces quatre entiers.

Solution 7

Quatre multiples de 7 consécutifs sont quatre entiers de la forme $7n$, $7(n+1)$, $7(n+2)$ et $7(n+3)$ où n est un entier relatif.
Ensuite, $7n+7(n+1)+7(n+2)+7(n+3) = 7(n+n+1+n+2+n+3) = 7(4n+6) = 14(2n+3)$ puis $7n+7(n+1)+7(n+2)+7(n+3) = 266$ équivaut à $14(2n+3) = 266$ ou encore à $2n+3 = \dfrac{266}{14}$ ou encore à $2n+3 = 19$ ou encore à $2n = 16$ ou enfin $n = 8$.

Les quatre entiers cherchés sont 7×8, 7×9, 7×10 et 7×11 c'est-à-dire 56, 63, 70 et 77.

Exercice 8

1) Soit n un entier naturel à 2 chiffres. On note a le chiffre des dizaines et b le chiffre des unités.
Monter que n est divisible par 11 si et seulement si $-a+b$ est divisible par 11.

2) Soit n un entier naturel à 3 chiffres. On note a le chiffre des centaines, b le chiffre des dizaines et c le chiffre des unités.
a) Montrer qu'il existe un entier relatif k tel que $n = a-b+c+11k$.
b) En déduire que n est divisible par 11 si et seulement si $a-b+c$ est divisible par 11.
c) Les entiers suivants sont-ils divisibles par 11 : 673 et 627 et 495 ?

Solution 8

1) Soit n un entier naturel à 2 chiffres puis a le chiffre des dizaines de n et b le chiffre des unités. Donc,

$$n = 10a + b = (11-1)a + b = -a + b + 11a.$$

Supposons que $-a+b$ est divisible par 11. Alors, il existe un entier k tel que $-a+b = 11k$. On en déduit que $n = 11k + 11a$ ou encore $n = 11(k+a)$. Puisque $k+a$ est un entier relatif, n est divisible par 11.

Supposons que n est divisible par 11. Alors, il existe un entier k tel que $n = 11k$. On en déduit que $11k = -a+b+11a$ ou encore $11(k-a) = -a+b$ ou enfin $-a+b = 11(k-a)$. Puisque $k-a$ est un entier relatif, $-a+b$ est divisible par 11.

On a montré que n est divisible par 11 si et seulement si $-a+b$ est divisible par 11.

2) a) Soit n un entier à 3 chiffres puis a le chiffre des centaines, b le chiffre des dizaines et c le chiffre des unités. Donc,

$$n = 100a + 10b + c = (99+1)a + (11-1)b + c = a - b + c + 99a + 11b = a - b + c + 11(9a+b).$$

b) Si $a-b+c$ est divisible par 11, il existe un entier relatif k tel que $a-b+c = 11k$. On en déduit que $n = 11k + 11(9a+b) = 11(k+9a+b)$. Puisque $k+9a+b$ est un entier relatif, n est divisible par 11.
Si n est divisible par 11, il existe un entier relatif k tel que $n = 11k$. On en déduit que $a-b+c = n - 11(9a+b) = 11k - 11(9a+b) = 11(k-9a-b)$. Puisque $k-9a-b$ est un entier relatif, $a-b+c$ est divisible par 11.

On a montré que n est divisible par 11 si et seulement si $a-b+c$ est divisible par 11.

c) $6-7+3 = 2$. 2 n'est pas divisible par 11 et donc 673 n'est pas divisible par 11.
$6-2+7 = 11$. 11 est divisible par 11 et donc 627 est divisible par 11. De fait, $627 = 11 \times 57$.
$4-9+5 = 0$. 0 est divisible par 11 (ou encore 0 est un multiple de 11 car $0 = 11 \times 0$) et donc 495 est divisible par 11. De fait, $495 = 11 \times 45$.

Rappels de cours et/ou commentaires.

On peut montrer qu'un entier naturel est divisible par 11 *si et seulement si la « somme alternée de ses chiffres » est divisible par* 11*. Par exemple, la somme alternée des chiffres de* $194\,315$ *est* $1-9+4-3+1-5$ *ou encore* -11*.* -11 *est un multiple de* 11 *car* $-11 = 11 \times (-1)$*. Le nombre* $194\,315$ *est donc divisible par* 11*. De fait,* $194\,315 = 11 \times 17\,665$*.* ■

Exercice 9

Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
1) Tout entier naturel non nul divisible par 4 et par 5 est divisible par 20.
2) Tout entier naturel non nul divisible par 2 et 10 est divisible par 20.

Solution 9

1) Un entier naturel non nul n divisible par 4 s'écrit sous la forme $n = 4q$ où q est un entier naturel non nul. Si $q = 1$ n n'est pas divisible par 5. Si $q \geqslant 2$, pour que n soit divisible par 5, il faut que 5 soit un facteur premier de q. q s'écrit donc sous la forme $q = 5q'$ où q' est un entier naturel non nul. On obtient alors $n = 4q = 4 \times 5q' = 20q'$ où q' est un entier. n est donc divisible par 20. L'affirmation 1) est vraie.

2) Le nombre $n = 10$ est un entier naturel non nul divisible par 2 et par 10 mais non divisible par 20. L'affirmation 2) est fausse.

Rappels de cours et/ou commentaires.

La phrase « si n *est divisible par* a *et* b*, alors* n *est divisible par* $a \times b$ *» est donc une phrase qui n'est pas tout le temps vraie (et par suite est une phrase fausse).* ■

Exercice 10

Montrer que pour tout entier naturel n, le nombre $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+3}$ est divisible par 11.

Solution 10

Soit n un entier naturel.

$$2^n + 2^{n+1} + 2^{n+3} = 2^n + 2 \times 2^n + 2^3 \times 2^n = 2^n \left(1 + 2 + 2^3\right) = 2^n \times (1 + 2 + 8) = 11 \times 2^n.$$

Ainsi, il existe un entier relatif q, à savoir $q = 2^n$, tel que $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+3} = 11q$. Ceci montre que $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+3}$ est un entier divisible par 11.

Exercice 11

On dispose de 20 jetons blancs et 12 jetons rouges à répartir entre un certain nombre (au moins égal à 2) de joueurs. Les joueurs doivent avoir le même nombre de jetons blancs et doivent avoir aussi le même nombre de jetons rouges. Tous les jetons doivent être distribués.

Quels sont les différents nombres de joueurs possibles ?

Solution 11

Soit n le nombre de joueurs. Le nombre de jetons blancs reçus par chaque joueur est $\dfrac{20}{n}$. Ce nombre doit être un entier et donc n doit être un diviseur de 20. De même, n doit être un diviseur de 12 et finalement n doit être un diviseur commun à 20 et 12.

Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12. Parmi ces diviseurs, ceux qui sont aussi des diviseurs de 20 sont 1, 2 et 4. Les divisieurs communs à 12 et 20, supérieurs ou égaux à 2, sont 2 et 4.

Il peut donc y avoir 2 ou 4 joueurs. S'il y a 2 joueurs, chaque joueur reçoit 10 jetons blancs et 6 jetons rouges. S'il y a 4 joueurs, chaque joueur reçoit 5 jetons blancs et 3 jetons rouges.

II Nombres pairs, nombres impairs

Exercice 12

On veut montrer que « la somme d'un entier pair et d'un entier impair est un entier impair ». La solution ci-dessous comporte une erreur. Trouvez cette erreur.

Solution. Soient n un entier relatif pair et m un entier relatif impair. Il existe un entier k tel que $n = 2k$ et il existe un entier k tel que $m = 2k+1$.
On a alors $n+m = 2k+2k+1 = 4k+1 = 2(2k)+1$ où de plus $2k$ est un entier relatif. Donc, $n+m$ est un entier impair.

Solution 12

Nous avons écrit $n = 2k$ et $m = 2k+1$ en utilisant la même lettre k. On peut l'écrire si $n = 2$ et $m = 3$ ou $n = 8$ et $m = 9$ ou plus généralement, si n et m sont consécutifs. Mais ce n'est pas le cas général. Par exemple, si $n = 14$ et $m = 23$, alors $n = 2 \times 7$ et $m = 2 \times 11 + 1$ et k ne peut pas être à la fois égal à 7 et égal à 11.

Il fallait utiliser deux lettres différentes k et k' par exemple (en posant $n = 2k$ et $m = 2k'+1$) pour désigner un nombre pair quelconque et un nombre impair quelconque.

Exercice 13

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Dans chaque cas, si l'affirmation est vraie, le démontrer et si l'affirmation est fausse, fournir un contre-exemple.
1) La somme de deux nombres impairs est un nombre impair.
2) Le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.
3) Si le carré d'un nombre est impair, alors ce nombre est impair.
4) Le produit de deux nombres est impair si et seulement si ces deux nombres sont impairs.
5) Le produit de deux nombres est pair si et seulement si ces deux nombres sont pairs.
6) Si la somme de deux nombres est un nombre pair, alors ces deux nombres sont pairs.
7) Le nombre 0 est à la fois pair et impair.

Solution 13

1) FAUX. 1 et 3 sont impairs mais $1+3 = 4$ est pair.

2) VRAI. Soient n et m deux nombres impairs. On sait d'après le cours que $n \times m$ est impair. Redémontrons-le. Il existe deux entiers relatifs k et k' tels que $n = 2k+1$ et $m = 2k'+1$. On en déduit que

$$n \times m = (2k+1)(2k'+1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1 = 2(2kk' + k + k') + 1$$

ou de plus, le nombre $q = 2kk' + k + k'$ est un nombre entier relatif. Ainsi, il existe un entier relatif q tel que $n \times m = 2q+1$ puis $n \times m$ est impair.

3) VRAI. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si n est un entier pair, on peut poser $n = 2k$ où k est un entier relatif. On a alors
$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times \left(2k^2\right)$ avec $2k^2$ entier relatif et donc n^2 est pair. Ainsi, si n est un entier pair, alors n^2 est un entier pair. Par contraposition, si n^2 est un entier impair. alors n est un entier impair.

4) VRAI. D'après 2) ou d'après le cours, si n et m sont deux entiers impairs, alors $n \times m$ est un entier impair. Maintenant, si l'un des deux entiers n ou m est pair, alors $n \times m$ est pair. Ainsi, si l'un des deux entiers n ou m n'est pas impair, alors $n \times m$ n'est pas impair. Par contraposition, si $n \times m$ est impair, les deux entiers n et m sont impairs.

5) FAUX. Si $n = 2$ et $m = 3$, $n \times m = 6$ est pair mais m n'est pas pair.

6) FAUX. Si $n = 1$ et $m = 3$, alors $n+m$ est un entier pair mais l'un au moins des entiers n ou m est impair.

7) FAUX. 0 est un nombre pair car $0 = 2 \times 0$. D'autre part, un nombre ne peut pas être à la fois pair et impair.

Exercice 14

1) Montrer que la différence de deux carrés parfaits consécutifs est un nombre impair.
2) Calculer la somme des nombres impairs de 1 à 199.

Solution 14

1) Deux carrés parfaits consécutifs sont deux entiers de la forme n^2 et $(n+1)^2$ où n est un entier naturel. Ensuite,

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2 \times n \times 1 + 1^2 - n^2 = 2n+1.$$

Ainsi, la différence $(n+1)^2 - n^2$ est égale au nombre impair $2n+1$.

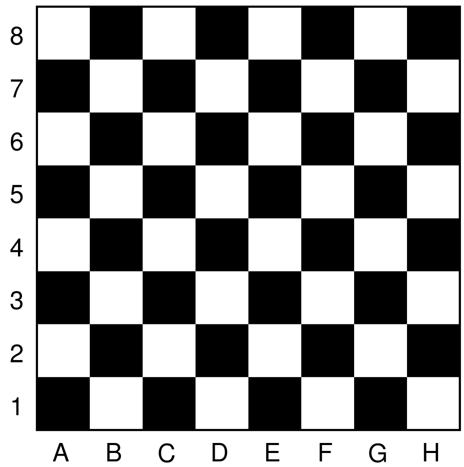
2) On a donc $1^2 - 0^2 = 1$, $2^2 - 1^2 = 3$, $3^2 - 2^2 = 5$, $4^2 - 3^2 = 7$, $5^2 - 4^2 = 9$, $6^2 - 5^2 = 11$, $\dots$, $98^2 - 97^2 = 2 \times 97 + 1 = 195$, $99^2 - 98^2 = 2 \times 98 + 1 = 197$, $100^2 - 99^2 = 2 \times 99 + 1 = 199$.
On additionne membre à membre ces égalités. Beaucoup de nombres se simplifient : $1^2 - 1^2$, $2^2 - 2^2$, $3^2 - 3^2$, $\dots$, $99^2 - 99^2$. Après simplification, il reste

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 195 + 197 + 199 = 100^2 - 0^2 = 10\,000.$$

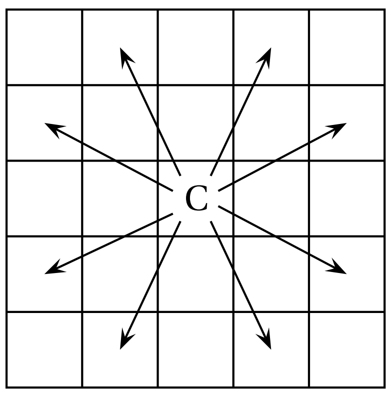
La somme de tous les entiers impairs compris, au sens large, entre 1 et 199 est égale à $10\,000$.

Exercice 15

Un échiquier est un carré ayant de 8 cases de côté et donc un carré constitué de 64 cases. Les cases sont noires et blanches en alternance.



Sur cet échiquier, un cavalier se déplace en un seul coup de trois carreaux horizontalement puis de deux carreaux verticalement ou aussi de trois carreaux verticalement puis de deux carreaux horizontalement, comme décrit ci-dessous :



On place le cavalier sur la case en bas à gauche (case A1). On veut faire parcourir à ce cavalier un trajet passant une et une seule fois par chaque case de l'échiquier et finissant sur la case en haut à droite (case H8). Peut-on trouver un tel trajet ?

Solution 15

Puisque l'échiquier est constitué de 64 cases, le cavalier doit effectuer 63 sauts pour aller une fois et une seule sur chacune des 63 cases de l'échiquier distinctes de la case A1. A chaque saut, la couleur de la case sur laquelle se trouve le cavalier change. Après un saut, le cavalier est sur une case blanche, après deux sauts sur une case noire, après trois sauts sur une case blanche, ... Au bout d'un nombre impair de sauts (1 saut, 3 sauts, 5 sauts, ...), le cavalier est sur une case blanche.

63 est un nombre impair et donc au bout de 63 sauts, le cavalier est sur une case blanche. La case H8 est noire et donc, au bout de 63 sauts, le cavalier ne peut pas se trouver sur cette case. Il n'existe donc pas un trajet du cavalier passant une et une seule fois par chaque case de l'échiquier et finissant sur la case en haut à droite.

Exercice 16

Montrer que la différence entre le carré d'un entier naturel n et l'entier n lui-même, est un entier pair.

Solution 16

Soit n un entier naturel. Alors $n^2 - n = n(n-1)$. Raisonnons par disjonction des cas.

1er cas. Si n est pair, il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$. Dans ce cas, $n^2 - n = 2k(2k-1) = 2 \times k(2k-1)$. Ainsi, il existe un entier relatif q tel que $n = 2q$, à savoir $q = k(2k-1)$. Le nombre $n^2 - n$ est donc un entier pair.

2ème cas. Si n est impair, il existe un entier naturel k tel que $n = 2k+1$. Dans ce cas, $n^2 - n = (2k+1)(2k) = 2 \times k(2k+1)$. Ainsi, il existe un entier relatif q tel que $n = 2q$, à savoir $q = k(2k+1)$. Le nombre $n^2 - n$ est donc aussi un entier pair.

On a montré dans tous les cas que $n^2 - n$ est un entier pair.

Rappels de cours et/ou commentaires.

On peut donner une solution plus courte sans disjonction des cas. $n^2 - n = n(n-1)$. *Puisque les entiers* $n-1$ *et* n *sont consécutifs, l'un de ces deux entiers est pair et l'autre est impair. Le produit d'un nombre pair par un nombre impair est un nombre pair. Donc,* $n^2 - n$ *est un nombre pair.* ■

Exercice 17

Les trois longueur des côtés d'un certain triangle rectangle sont des nombres entiers. Montrer qu'au moins un de ces nombres est un nombre pair.

Solution 17

On considère un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont des nombres entiers. On note a la longueur de l'hypoténuse et b et c les longueurs des deux autres côtés.

• Si b ou c sont des nombres pairs, alors l'un au moins des trois nombres a, b ou c est un nombre pair.

Supposons maintenant que b et c soient tous les deux des nombres impairs. D'après le théorème de PYTHAGORE, $a^2 = b^2 + c^2$. Puisque b est impair, on sait que b^2 est impair. De même, c^2 est impair. On sait que le somme de deux nombres impairs est un nombre pair et donc $b^2 + c^2$ est un nombre pair et donc a^2 est un nombre pair. Enfin, puisque a^2 est pair, on sait que a est nécessairement pair.

On a montré dans tous les cas que l'un au moins des trois nombres a, b ou c, est un nombre pair.

III Nombres premiers

Exercice 18

Trouver la forme irréductible de la fraction $\dfrac{4\,312}{1\,008}$

Solution 18

Décomposons $4\,312$ et $1\,008$ en produit de facteurs premiers.
$4\,312 = 2 \times 2\,156 = 2^2 \times 1\,078 = 2^3 \times 539 = 2^3 \times 7 \times 77 = 2^3 \times 7^2 \times 11$ et
$1\,008 = 2 \times 504 = 2^2 \times 252 = 2^3 \times 126 = 2^4 \times 63 = 2^4 \times 3 \times 21 = 2^4 \times 3^2 \times 7$.

On en déduit que $\dfrac{4\,312}{1\,008} = \dfrac{2^3 \times 7^2 \times 11}{2^4 \times 3^2 \times 7} = \dfrac{7 \times 11}{2 \times 3^2} = \dfrac{77}{18}$. Il n'y a plus aucun nombre premier à simplifier au numérateur et au dénominateur de la fraction $\dfrac{77}{18}$. Cette fraction est donc irréductible.

Exercice 19

Soit p un nombre premier. Montrer que p est pair si et seulement si $p = 2$.

Solution 19

Soit p un nombre premier. Si $p = 2$, p est un entier pair.

Inversement, supposons que p est un entier pair. Il existe donc un entier naturel non nul q tel que $p = 2q$. Supposons par l'absurde que $q \geqslant 2$. p est alors un entier supérieur ou égal à 4 divisible par 2. p admet ainsi un diviseur strictement positif autre que 1 et p et donc p n'est pas premier. Ceci contredit le fait que p est premier et donc $q = 1$ puis $p = 2$.

On a montré que pour tout nombre premier p, p est pair si et seulement si $p = 2$.

Exercice 20

Les nombres suivants sont-ils des nombres premiers ?

1) 47,

2) 247,

3) 331,

Solution 20

1) 47 est premier si et seulement si 47 n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à sa racine carrée. Or, $\sqrt{47} = 6{,}8\ldots$ et donc les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{47}$ sont 2, 3 et 5. 47 n'est pas divisible par 2 car 47 est impair. 47 n'est pas divisible par 3 car la somme de ses chiffres, à savoir 11 n'est pas divisible par 3. 47 n'est pas divisible par 5 car le chiffre des unités de 47 n'est ni 0, ni 5. Donc,

47 est un nombre premier.

2) $\sqrt{247} = 15{,}7\ldots$ et donc les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{247}$ sont 2, 3, 5, 7, 11 et 13. 247 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.
$247 = 7 \times 35 + 2$ avec $0 \leqslant 2 \leqslant 6$ et donc le reste de la division euclidienne de 247 par 7, à savoir 2, n'est pas nul. 247 n'est pas divisible par 7.
$247 = 11 \times 22 + 5$ avec $0 \leqslant 5 \leqslant 10$ et donc 247 n'est pas divisible par 11.
$247 = 13 \times 19$. Donc,

247 n'est pas un nombre premier.

3) $\sqrt{331} = 18{,}1\ldots$ et donc les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{331}$ sont 2, 3, 5, 7, 11, 13 et 17. 331 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.
$331 = 7 \times 47 + 2$ avec $0 \leqslant 2 \leqslant 6$ et donc le reste de la division euclidienne de 331 par 7, à savoir 2, n'est pas nul. 331 n'est pas divisible par 7.
$331 = 11 \times 30 + 3$ avec $0 \leqslant 3 \leqslant 10$ et donc 331 n'est pas divisible par 11.
$331 = 13 \times 25 + 6$ avec $0 \leqslant 6 \leqslant 12$ et donc 331 n'est pas divisible par 13.
$331 = 17 \times 19 + 8$ avec $0 \leqslant 8 \leqslant 16$ et donc 331 n'est pas divisible par 17. Donc,

331 est un nombre premier.

Exercice 21

Infinité de l'ensemble des nombres premiers. On suppose par l'absurde qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers. On les range dans l'ordre croissant : $2, 3, 5, 7, \ldots, p$ (p est donc le plus grand nombre premier). On pose $\mathrm{N} = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times p) + 1$.

1) Montrer que $\mathrm{N} \geqslant 2$.
2) N est-il divisible par l'un des nombres premiers $2, 3, 5, 7, \ldots, p$?
3) Conclure.

Solution 21

1) $\mathrm{N} \geqslant 2 + 1$ ou encore $\mathrm{N} \geqslant 3$. En particulier, $\mathrm{N} \geqslant 2$.

2) Soit q l'un des nombres premiers $2, 3, 5, \ldots, p$. q est donc un diviseur de $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times p$. Supposons par l'absurde que q divise N. Alors, q divise N et q divise $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times p$ puis q divise $\mathrm{N} - 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times p$ ou encore q divise 1. Ceci est une contradiction et donc N n'est pas divisible par q.

Ainsi, N n'est divisible par aucun des nombres premiers $2, 3, 5, \ldots, p$.

3) N est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Donc, N est divisible par au moins un nombre premier d'après le théorème fondamental de l'arithmétique. D'après la question précédente, ce diviseur premier de N n'est ni 2, ni 3, ni $5, \ldots$, ni p et est donc un nouveau nombre premier. Ceci contredit l'hypothèse que $2, 3, \ldots, p$ sont tous les nombres premiers.

Il était donc absurde de supposer qu'il y a un nombre fini de nombres premiers et on a donc montré qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice 22

Sans calculatrice, montrer que le nombre $1\,728$ est le cube d'un entier. Préciser cet entier.

Solution 22

$1728 = 2 \times 864 = 2^2 \times 432 = 2^3 \times 216 = 2^4 \times 108 = 2^5 \times 54 = 2^6 \times 27 = 2^6 \times 3^3$ puis

$$1728 = \left(2^2 \times 3\right) \times \left(2^2 \times 3\right) \times \left(2^2 \times 3\right) = 12^3.$$

Exercice 23

Vérifier très rapidement que $2\,323$ n'est pas un nombre premier.

Solution 23

$2\,323 = 23 \times 100 + 23 = 23 \times (100 + 1) = 23 \times 101$. Donc, $2\,323$ n'est pas premier.

IV Divers

Exercice 24

Soit p un nombre premier différent de 2. Montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 4.

Solution 24

p est un nombre premier différent de 2. Donc, p est un nombre impair supérieur ou égal à 3. Par suite, il existe un entier naturel non nul k tel que $p = 2k + 1$.
On en déduit que $p - 1 = 2k$ et $p + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1)$ puis que

$$p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1) = 2k \times 2(k + 1) = 4k(k + 1).$$

Le nombre $q = k(k + 1)$ est un entier relatif tel que $p^2 - 1 = 4q$. Donc, $p^2 - 1$ est divisible par 4.

Exercice 25

A midi, deux ampoules s'allument ensemble. Ensuite, les deux ampoules clignotent. La première ampoule s'allume toutes les 78 secondes et la deuxième ampoule s'allume toutes les 110 secondes.

1) Déterminer la première heure, après midi, à laquelle les deux ampoules s'allumeront de nouveau ensembles.
2) Les deux ampoules s'allumeront-elles ensemble à minuit ?

Solution 25

1) Soient n et m deux entiers naturels non nuls. Au bout de n clignotements de la première ampoule, il s'est écoulé $78 \times n$ secondes et au bout de m clignotements de la deuxième ampoule, il s'est écoulé $110 \times m$ secondes.

Les ampoules s'allument en même temps si et seulement si $78n = 110n$. Le nombre de secondes écoulées est alors un multiple commun à 78 et 110. Plus précisément, le nombre de secondes écoulées jusqu'au premier moment de l'après-midi où les lampes s'allument ensembles est le plus petit multiple commun à 78 et 110.

$78 = 2 \times 39 = 2 \times 3 \times 13$ et $110 = 2 \times 5 \times 11$. Un multiple commun à 78 et 110 est divisible par 2, 3, 5, 11 et 13 et donc par $2 \times 3 \times 5 \times 11 \times 13$ ou encore par 4290. Inversement, 4290 est un multiple de 78 car $4290 = 55 \times 78$ et 4290 est un multiple de 110 car $4290 = 39 \times 110$. Le plus petit multiple commun à 78 et 110 est 4290.

$4290 = 71 \times 60 + 30$ et donc 4290 secondes sont encore 71 minutes et 30 secondes ou encore 1 heure, 11 minutes et 30 secondes. La première après midi à laquelle les deux ampoules s'allumeront en même temps est 13 h11'30".

2) De midi à minuit, il y a $12 \times 60 \times 60$ secondes ou encore $43\,200$ secondes. $\dfrac{43\,200}{78} = 553,8\ldots$ et donc $43\,200$ n'est pas divisible par 78. La première ampoule ne s'annulera donc pas à minuit et en particulier les deux ampoules ne s'allumeront pas en même temps à minuit.

Exercice 26

Des lampes, installées en ligne, sont numérotées de 1 à 100. Chaque lampe est munie d'un interrupteur. Au début, toutes les lampes sont éteintes.
A la première étape, on appuie sur tous les interrupteurs (et donc toutes les lampes sont allumées).
A la deuxième étape, on appuie sur tous les interrupteurs des lampes ayant un numéro pair (et donc les lampes ayant un numéro pair sont éteintes et les lampes ayant un numéro impair sont allumées).
A la troisième étape, on appuie sur les interrupteurs des lampes portant un numéro multiple de 3.
A la quatrième étape, on appuie sur les interrupteurs des lampes portant un numéro multiple de 4.
Et ainsi de suite jusqu'à la centième étape où on appuie sur l'interrupteur de la lampe numéro 100.

Quelles lampes sont éclairées après la centième étape ?

Solution 26

Soit n un entier compris entre 1 et 100 au sens large. Le nombre de fois que l'on appuie sur l'interrupteur de la lampe n° n est le nombre d'entiers compris au sens large entre 1 et 100 dont n est multiple. Dit autrement, le nombre de fois que l'on appuie sur l'interrupteur de la lampe n° n est le nombre de diviseurs de n.

Quand on appuie une fois sur l'interrupteur de la lampe n° n, la lampe est allumée. Quand on appuie deux fois, la lampe est éteinte puis allumée quand on appuie 3 fois ... Plus généralement, la lampe n° n est allumée quand on appuie un nombre impair de fois sur son interrupteur et éteinte quand on appuie un nombre impair de fois.

En cumulant les résultats précédents, la lampe n° n est allumée si et seulement si l'entier n admet un nombre impair de diviseurs.

Le nombre 1 admet exactement un diviseur (strictement positif). La lampe n° 1 est donc éclairée après la centième étape.

Soit $n \geqslant 2$. La décomposition de n en produit de facteurs premiers s'écrit $n = p^a q^b r^c \dots$ où p, q, r, $\dots$ sont des nombres premiers deux à deux distincts et a, b, c, $\dots$ sont des entiers naturels non nuls. D'après le résultat admis par l'énoncé, le nombre de diviseurs de n est $(a+1)(b+1)(c+1)\dots$. Ce nombre est impair si et seulement si chacun des nombres $a+1$, $b+1$, $c+1$, $\dots$ est un nombre impair ce qui équivaut au fait que les exposants a, b, c, $\dots$ sont des nombres pairs.

L'entier n s'écrit donc sous la forme $n = p^{2a'} q^{2b'} r^{2c'} \dots$ où a', b', c', $\dots$, sont des entiers naturels non nuls ou encore l'entier n s'écrit sous la forme $n = \left(p^{a'} q^{b'} r^{c'} \dots\right)^2$. L'entier n est donc un carré parfait. Inversement, si l'entier n est un carré parfait, les exposants de sa décomposition en produit de facteurs premiers sont des nombres pairs.

En n'oubliant par la lampe n° 1, les numéros des lampes qui sont allumées après la centième étape sont 1^2, 2^2, 3^2, $\dots$, 9^2, 10^2. Finalement, il y a 10 lampes allumées après la centième étape.

Exercice 27

On dispose de plusieurs rectangles dont les côtés mesurent 48 cm et 72 cm. Déterminer le plus petit carré que l'on peut former avec ces rectangles, tous disposés horizontalement.

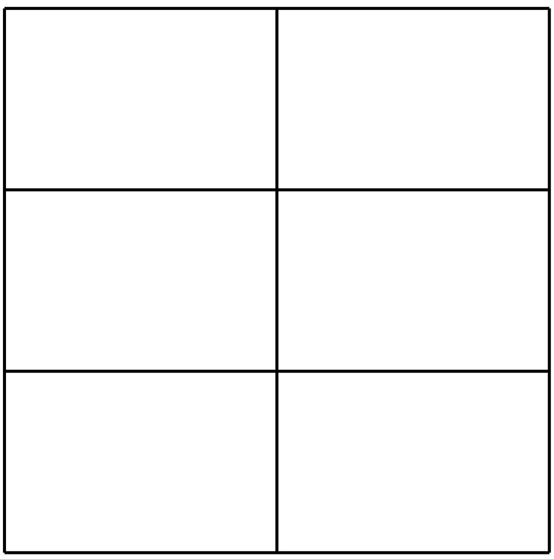
Solution 27

On note ℓ la longueur du côté du carré. On note ensuite n le nombre de longueurs de rectangles constituant l'un des côtés du carré et m le nombre de largeur. Le côté du carré a donc a la fois pour longueur $72n$ et $48m$:

$$\ell = 72n = 48m.$$

Si ℓ est la longueur du plus petit carré formé avec ces rectangles, alors ℓ est le plus petit multiple commun à 72 et 48 c'est-à-dire 144.

Le plus petit carré que l'on peut former avec les rectangles est constitué de 6 rectangles.



Exercice 28

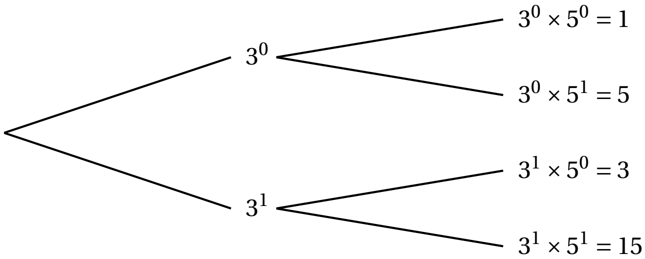
Un entier naturel non nul n (y compris $n = 1$) peut s'écrire sous la forme $n = 2^a 3^b 5^c \dots$ où les exposants a, b, c, $\dots$ sont des entiers naturels éventuellement nuls (si $n = 1$, tous les exposants sont nuls). On veut déterminer le nombre de ses diviseurs (strictement positifs) en fonction des exposants a, b, c, $\dots$

On admet que les diviseurs de n sont les entiers de la forme $2^{a'} 3^{b'} 5^{c'} \dots$ où $0 \leqslant a' \leqslant a$, $0 \leqslant b' \leqslant b$, $0 \leqslant c' \leqslant c$, $\dots$

1) Dresser la liste des diviseurs de 13. Combien y en a-t-il ?

2) Les diviseurs de 15 sont les nombres de la forme $3^{a'} 5^{b'}$ où $0 \leqslant a' \leqslant 1$ et $0 \leqslant b' \leqslant 1$.

On peut représenter la situation par un arbre :



Dresser la liste des diviseurs de 15. Combien y en a-t-il ?

3) En vous inspirant de la question 2), combien 72 a-t-il de diviseurs ? En dresser la liste.

4) a) Un nombre entier naturel non nul est de la forme $n = 2^a$ où a est un entier naturel.
Combien n a-t-il de diviseurs ?

b) Combien de diviseurs a le nombre 16 ? Dresser la liste des diviseurs de 16.

5) a) Un nombre entier naturel non nul est de la forme $n = 2^a 3^b$ où a et b sont deux entiers naturels.
Combien n a-t-il de diviseurs ?

b) Dresser la liste des diviseurs de 45.

6) a) Un nombre entier naturel non nul est de la forme $n = 2^a 3^b 5^c$ où a, b et c sont trois entiers naturels.
Combien n a-t-il de diviseurs ?

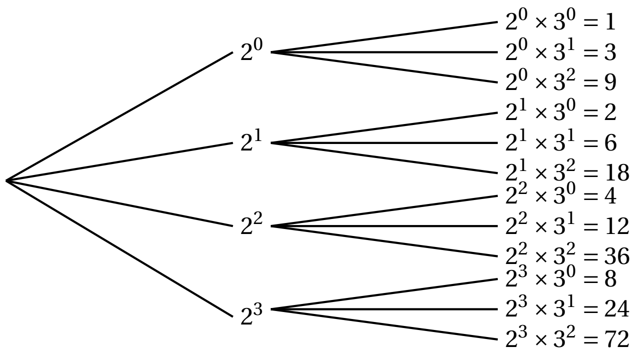
b) Dresser la liste des diviseurs de 600.

Solution 28

1) 13 est un nombre premier. 13 admet exactement deux diviseurs à savoir 1 et 13.

2) 15 admet exactement quatre diviseurs : $3^0 \times 5^0 = 1$, $3^0 \times 5^1 = 5$, $3^1 \times 5^0 = 3$ et $3^1 \times 5^1 = 15$.

3) $72 = 2^3 \times 3^2$. Représentons la situation par un arbre.



On obtient 4×3 diviseurs ou encore 12 diviseurs. Les douze diviseurs de 72 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 et 72.

4) a) Les diviseurs de n sont 2^0, 2, 2^2, $\ldots$, 2^a. n admet donc $a+1$ diviseurs.

b) Puisque $16 = 2^4$, 16 admet cinq diviseurs à savoir 1, 2, 4, 8 et 16.

5) a) On se représente les différents diviseurs de n par un arbre (sans dessiner cet arbre). La première étape est la liste 2^0, 2^1, $\ldots$, 2^a. Elle est constituée de $a+1$ branches. Chacune de ces branches se divise en $b+1$ branches (nombre des exposants possibles de 3). Il y a donc $(a+1) \times (b+1)$ « chemins » dans l'arbre ou encore l'entier n admet $(a+1)(b+1)$ diviseurs.

b) $45 = 3^2 \times 5$. 45 admet 3×2 diviseurs ou encore 6 diviseurs. Ce sont les nombres $3^0 \times 5^0$, $3^0 \times 5^1$, $3^1 \times 5^0$, $3^1 \times 5^1$, $3^2 \times 5^1$ ou encore les nombres 1, 3, 5, 9, 15 et 45.

6) a) De la même façon, l'arbre démarre avec $a+1$ branches. Chacune de ces branches se divise en $b+1$ branches fournissant ainsi $(a+1)(b+1)$ « chemins de longueur 2 » dans l'arbre. Chacun de ces chemins se divise encore en $c+1$ branches fournissant au total $(a+1)(b+1)(c+1)$ chemins ou encore $(a+1)(b+1)(c+1)$ diviseurs de n.

b) $600 = 6 \times 10^2 = 2^3 \times 3 \times 5^2$. Donc, 600 admet $4 \times 2 \times 3$ diviseurs ou encore 24 diviseurs. Ce sont les nombres $2^0 \times 3^0 \times 5^0 = 1$, $2^0 \times 3^0 \times 5^1 = 5$, $2^0 \times 3^0 \times 5^2 = 25$, $2^0 \times 3^1 \times 5^0 = 3$, $2^0 \times 3^1 \times 5^1 = 15$, $2^0 \times 3^1 \times 5^2 = 75$, $2^1 \times 3^0 \times 5^0 = 2$, $2^1 \times 3^0 \times 5^1 = 10$, $2^1 \times 3^0 \times 5^2 = 50$, $2^1 \times 3^1 \times 5^0 = 6$, $2^1 \times 3^1 \times 5^1 = 15$, $2^1 \times 3^1 \times 5^2 = 150$, $2^2 \times 3^0 \times 5^0 = 4$, $2^2 \times 3^0 \times 5^1 = 20$, $2^2 \times 3^0 \times 5^2 = 100$, $2^2 \times 3^1 \times 5^0 = 12$, $2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 30$, $2^2 \times 3^1 \times 5^2 = 300$, $2^3 \times 3^0 \times 5^0 = 8$, $2^3 \times 3^0 \times 5^1 = 40$, $2^3 \times 3^0 \times 5^2 = 200$, $2^3 \times 3^1 \times 5^0 = 24$, $2^3 \times 3^1 \times 5^1 = 60$, $2^3 \times 3^1 \times 5^2 = 600$.

Exercice 29

Deux carrés ont des côtés de longueurs respectives a et b avec $a < b$. De plus, a et b sont des entiers naturels non nuls. La différence des aires des deux carrés est égale à 55 cm^2. De plus, a est inférieur à 10.

Déterminer a et b.

Solution 29

On a $b^2 - a^2 = 55$ ou encore $(b-a)(b+a) = 55$. En particulier, $b-a$ et $b+a$ sont des diviseurs de 55. Puisque $55 = 5 \times 11$, les diviseurs de 55 sont 1, 5, 11 et 55. Puisque $b-a < b+a$, on a deux cas.

1er cas. $b-a = 1$ et $b+a = 55$. En additionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient $2b = 56$ puis $b = 28$. L'égalité $b-a = 1$ fournit $a = 27$. Réciproquement, si $b = 28$ et $a = 27$, alors $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) = (28-27)(28+27) = 1 \times 55 = 55$.

2ème cas. $b-a = 5$ et $b+a = 11$. En additionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient $2b = 16$ puis $b = 8$. L'égalité $b-a = 5$ fournit $a = 3$. Réciproquement, si $b = 8$ et $a = 3$, alors $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) = (8-3)(8+3) = 5 \times 11 = 55$.

Il y a deux solutions : $a = 1$ et $b = 55$ ou $a = 3$ et $b = 8$.

Exercice 30

Déterminer tous les entiers relatifs n tels que n^2-1 soit divisible par 3.

Solution 30

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On a $n^2-1=(n-1)(n+1)$. Les deux entiers $n-1$ et $n+1$ sont supérieurs ou égaux à 2.
Si le nombre premier 3 n'est ni un facteur premier de $n-1$, ni un facteur premier de $n+1$, alors n^2-1 n'est pas divisible par 3.
Sinon, le nombre premier 3 est un facteur premier de $n-1$ ou de $n+1$ et donc un facteur premier de n^2-1. Dans ce cas, n^2-1 est divisible par 3.

En résumé, n^2-1 est divisible par 3 si et seulement si $n-1$ est divisible par 3 ou $n+1$ est divisible par 3. Dit autrement, n^2-1 est divisible par 3 si et seulement si il existe un entier k supérieur ou égal à 1 tel que $n=3k+1$ ou il existe un entier k supérieur ou égal à 1 tel que $n=3k-1$.

Les entiers solutions sont : $4, 5, 7, 8, 10, 11, \dots$ Il y en a une infinité.