Planche n$^{\text{o}}$ 1. Structures

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n$^{\text{o}}$ 1 (***) :

Soit $(G, \times)$ un groupe fini (la loi de G est donc notée multiplicativement). Montrer que le groupe $(G, \times)$ est isomorphe à un sous-groupe du $(S(G), \circ)$ où $S(G)$ est l'ensemble des permutations de G (théorème de Cayley). Indication : on pourra considérer les applications $\sigma_x \ : \ y \mapsto xy$, $x \in G$ donné.

Exercice n$^{\text{o}}$ 2 (***) :

On note $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

1) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de l'anneau $(\mathbb{C}, +, \times)$ (anneau des entiers de Gauss).

2) Montrer que pour tout $(z, z') \in \mathbb{Z}[i] \times (\mathbb{Z}[i] \setminus \{0\})$, il existe $(q, r) \in (\mathbb{Z}[i])^2$ tel que $z = qz' + r$ et $|r| < |z'|$.

3) Montrer que l'anneau $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau principal.

Exercice n$^{\text{o}}$ 3 (*) :

1) Quels sont les éléments d'ordre fini du groupe $(\mathbb{C}, +)$?

2) Quels sont les éléments d'ordre fini du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$?

Exercice n$^{\text{o}}$ 4 (**) :

Soit $(G, \times)$ un groupe fini de cardinal impair. Montrer que l'application $f \ : \ x \mapsto x^2$ est bijective.

Exercice n$^{\text{o}}$ 5 (***) :

Soit $(A, +, ., \times)$ une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension finie $n \geqslant 2$, intègre, dont l'élément neutre pour $\times$ est noté 1.

1) Soit $a \in A$. Montrer que a est inversible (pour $\times$) si et seulement si $a \neq 0$ (indication : considérer $f_a \ : \ x \mapsto ax$). Que peut-on en déduire ?

2) Soit $a \in A$.

a) Montrer que a admet un polynôme annulateur non nul.
b) Montrer que $\{P \in \mathbb{R}[X] / \ P(a) = 0\}$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{R}[X], +, \times)$. En déduire que a admet un polynôme minimal non nul.
c) Montrer que le polynôme minimal de a est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

3) (****) En déduire que l'algèbre $(A, +, ., \times)$ est isomorphe à l'algèbre $(\mathbb{C}, +, ., \times)$ ($\mathbb{C}$ est donc, à un isomorphisme près, la seule algèbre de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et intègre).

Exercice n$^{\text{o}}$ 6 (***) :

Soit $(G, \times)$ un groupe. Soient H et K deux sous-groupes. On pose $HK = \{hk, \ (h, k) \in H \times K\}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) HK est un sous-groupe du groupe $(G, \times)$
(2) KH est un sous-groupe du groupe $(G, \times)$
(3) $HK \subset KH$
(4) $KH \subset HK$.

Exercice n$^{\text{o}}$ 7 (*) :

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Soient x et y deux éléments de A tels que xy est nilpotent. Montrer que yx est nipotent.

Exercice n$^{\text{o}}$ 8 (*) :

Soit $(A, +, \times)$ un anneau dont l'élément neutre pour $\times$ est noté 1. Soit I un idéal de l'anneau $(A, +, \times)$. Montrer que $I = A \Leftrightarrow 1 \in I$.