Logique - Résumé de cours

Les connecteurs logiques « et » et « ou »

Définition. $P \wedge Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont vraies. $P \vee Q$ est fausse si et seulement si P et Q sont fausses.

Théorème. $\wedge$ et $\vee$ sont commutatifs, associatifs et distributifs l'un sur l'autre.
Théorème. Lois de DE MORGAN : $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$ et $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$.

L'implication et l'équivalence

Définition. Si P et Q sont deux propositions, l'implication $P \Rightarrow Q$ est la proposition $\overline{P} \vee Q$.
L'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse si et seulement si P est vraie et Q est fausse.

La négation de l'implication $P \Rightarrow Q$ est la proposition $P \wedge \overline{Q}$
La contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$ est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$. Elle est équivalente à $P \Rightarrow Q$.
La réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$. Elle n'a aucun rapport avec $P \Rightarrow Q$.

$P \Leftrightarrow Q$ est la proposition $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.
Une équivalence signifie donc deux implications, une de gauche à droite et une de droite à gauche.

Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$

Soit $P(x)$ une proposition dont les valeurs de vérité sont fonction d'un élément variable x d'un ensemble E.
Quand $P(x)$ est vraie pour chaque élément x de E, on écrit : $\forall x \in E,\ P(x)$.
Quand $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E, on écrit : $\exists x \in E/\ P(x)$.
Quand $P(x)$ est vraie pour exactement un élément x de E, on écrit : $\exists! x \in E/\ P(x)$.

$$\overline{(\forall x \in E,\ P(x))} \Leftrightarrow (\exists x \in E/\ \overline{P(x)}) \text{ et } \overline{(\exists x \in E,\ P(x))} \Leftrightarrow (\forall x \in E/\ \overline{P(x)}).$$

On peut permuter des quantificateurs de même nature,
mais on ne peut pas permuter des quantificateurs de nature différente.

On peut distribuer $\forall$ sur « et » et $\exists$ sur « ou »,
mais on ne peut pas distribuer $\forall$ sur « ou » et $\exists$ sur « et ».