FICHE n° 1. LES ENSEMBLES DE NOMBRES

I Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Définition 1

Les **entiers naturels** sont les nombres qui servent à compter. L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$. Les **entiers relatifs** sont les nombres $\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. On a donc

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} \text{ et } \mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

• $\mathbb{N}^*$ (respectivement $\mathbb{Z}^*$) est l'ensemble des entiers naturels non nuls (respectivement l'ensemble des entiers relatifs non nuls). $\mathbb{N}^*$ (respectivement $\mathbb{Z}^*$) se note aussi $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ (respectivement $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$) ce qui se lit « $\mathbb{N}$ privé de $\{0\}$ ».
• $\mathbb{Z}^+$ (respectivement $\mathbb{Z}^-$) est l'ensemble des entiers relatifs positifs (respectivement négatifs) et $\mathbb{Z}^{+*}$ (respectivement $\mathbb{Z}^{-*}$) l'ensemble des entiers relatifs strictement positifs (respectivement strictement négatifs).

$\mathbb{N}$ est une **partie** (ou un **sous-ensemble**) de $\mathbb{Z}$ ce qui se note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ et se lit « $\mathbb{N}$ est contenu dans $\mathbb{Z}$ » ou aussi « $\mathbb{N}$ est **inclus** dans $\mathbb{Z}$ ». Mais $\mathbb{Z}$ n'est pas une partie de $\mathbb{N}$ ce qui se note $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ et se lit « $\mathbb{N}$ n'est pas contenu dans $\mathbb{Z}$ ». $\mathbb{N}$ est donc strictement inclus dans $\mathbb{Z}$ ce qui s'écrit $\mathbb{N} \underset{\neq}{\subset} \mathbb{Z}$.

3 appartient à $\mathbb{N}$ ou est un élément de $\mathbb{N}$, ce qui se note $3 \in \mathbb{N}$. -7 n'est pas un élément de $\mathbb{N}$, ce qui se note $-7 \notin \mathbb{N}$.

II Les ensembles $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$

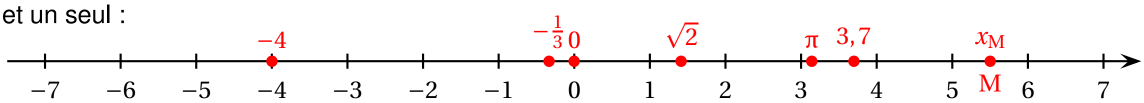
A L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Définition 2

Les **nombres réels** sont les nombres qui servent à mesurer n'importe quelle grandeur, positive ou négative. L'ensemble des nombres réels se note $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est l'ensemble des réels non nuls, $\mathbb{R}^+$ (respectivement $\mathbb{R}^-$) est l'ensemble des réels positifs (respectivement négatifs), $\mathbb{R}^{+*}$ (respectivement $\mathbb{R}^{-*}$) est l'ensemble des réels strictement positifs (respectivement strictement négatifs).

Les réels peuvent se représenter graphiquement sur la **droite numérique**. On trace une droite et on munit cette droite d'une origine, d'une unité et d'un sens de parcours. A chaque point M de cette droite, on peut alors associer un réel et un seul, l'**abscisse** de M, notée x_M, et inversement, à chaque réel x, on peut associer un point de cette droite et un seul :



B L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux.

1 Définition des nombres décimaux.

Définition 3

Les **nombres décimaux** sont les nombres réels de la forme $\dfrac{a}{10^n}$ où a est un entier relatif et n un entier naturel. L'ensemble des nombres décimaux se note $\mathbb{D}$.

Par exemple, le nombre $-12,105$ est un nombre décimal car $-12,105 = \dfrac{-12\,105}{10^3}$. $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal ou encore $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

2 Approximations décimales d'un réel.

$\sqrt{2} = 1,414\ldots$. Donc, $1,41 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,42$. Puisque $1,42 = 1,41 + 0,01 = 1,41 + 10^{-2}$, L'encadrement $1,41 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,42$ est un encadrement décimal du réel $\sqrt{2}$ à 10^{-2}, $1,41$ est une valeur décimale approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près par défaut et $1,42$ est une valeur décimale approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près par excès.

Définition 4

Soit x un réel.

Un **encadrement décimal du réel x à 10^{-n} près** est un encadrement de la forme $d \leqslant x \leqslant d + 10^{-n}$ où d est un nombre décimal et n un entier naturel.

Dans cet encadrement, d est une valeur décimale approchée de x à 10^{-n} près **par défaut** et d est une valeur décimale approchée de x à 10^{-n} près **par excès**.

C L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

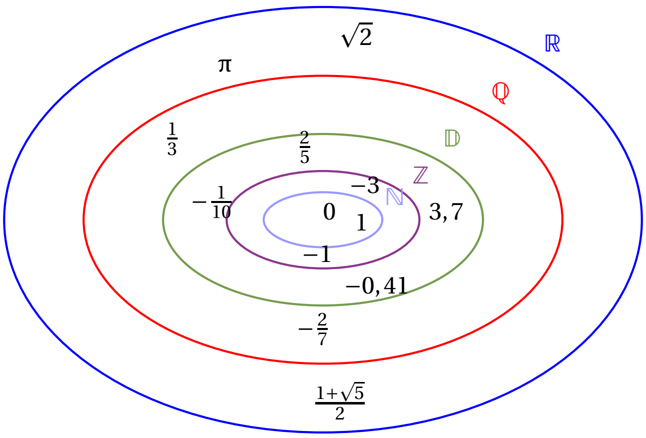
1 Définition des nombres rationnels.

Définition 5

Les **nombres rationnels** sont les nombres réels de la forme $\dfrac{a}{b}$ où a est un entier relatif et b un entier naturel non nul. L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$. Les nombres qui ne sont pas de cette forme sont les **nombres irrationnels**.

$\sqrt{2}$ et π sont des nombres irrationnels ou encore $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $\pi \notin \mathbb{Q}$.

On a $\mathbb{N} \underset{\neq}{\subset} \mathbb{Z} \underset{\neq}{\subset} \mathbb{D} \underset{\neq}{\subset} \mathbb{Q} \underset{\neq}{\subset} \mathbb{R}$.



2 Forme irréductible d'une fraction d'entiers.

Tout nombre rationnel non nul r peut s'écrire de manière unique sous la forme $r = \dfrac{a}{b}$ où a est un entier relatif non nul, b est un entier naturel non nul et a et b n'ont pas d'autre diviseur strictement positif commun que 1.

Définition 6

L'écriture $\dfrac{a}{b}$ précédente s'appelle la **forme irréductible** du rationnel non nul r.

Par exemple, la forme irréductible de $r = \dfrac{48}{54}$ est $\dfrac{8}{9}$.

3 Développement décimal d'un réel.

Tout nombre réel admet une écriture décimale. Par exemple, $-\pi = -3,141\,592\,6\ldots$

• Les entiers relatifs sont les nombres réels dont les décimales après la virgule sont toutes nulles.
• Les nombres décimaux sont les nombres réels n'admettant qu'un nombre fini, éventuellement nul, de décimales après la virgule qui sont non nulles.
• Les nombres rationnels sont les nombres réels dont la partie décimale est périodique, c'est-à-dire qu'une même séquence de chiffres se répète à l'infini.
• Les nombres irrationnels sont les nombres réels admettant une infinité de décimales non nulles et dont la partie décimale n'est pas périodique.