Planche n° 1.
L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Corrigés.

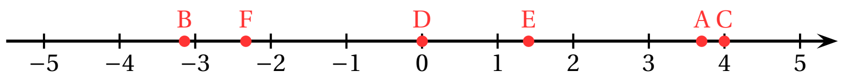
I Les nombres réels

Exercice 1

Placer sur la droite numérique les points A, B, C, D, E et F d'abscisses respectives :

1) $3,7$ **2)** $-\pi$ **3)** 4 **4)** 0 **5)** $\sqrt{2}$ **6)** $-\dfrac{7}{3}$.

Solution 1



Rappels de cours et/ou commentaires.

La droite numérique est une droite munie d'une origine, d'une graduation et d'un sens de parcours.
Tout nombre réel est associé à un et un seul point de cette droite et tout point de cette droite est associé à un et un seul nombre réel. ■

Exercice 2

Déterminer à quel(s) ensemble(s) appartiennent le réel x ci-dessous parmi les ensembles suivants : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Préciser en particulier le plus petit de ces cinq ensembles auquel appartient x.

1) $x = 3,7$ **2)** $x = -\pi$ **3)** $x = 4$ **4)** $x = 0$ **5)** $x = \sqrt{2}$ **6)** $x = -\dfrac{7}{3}$.

Solution 2

1) $3,7$ est un nombre décimal (car $10 \times 3,7$ est un entier relatif) qui n'est pas un entier relatif. $3,7$ appartient à $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ et n'appartient pas à $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$. Le plus petit des cinq ensembles auquel appartient $3,7$ est $\mathbb{D}$.

2) $-\pi$ est un nombre irrationnel. $-\pi$ appartient à $\mathbb{R}$ et à aucun des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$.

3) 4 est un entier naturel. 4 appartient à chacun des cinq ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Le plus petit de ces cinq ensembles est $\mathbb{N}$.

4) 0 est un entier naturel. 0 appartient à chacun des cinq ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Le plus petit de ces cinq ensembles est $\mathbb{N}$.

5) $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. $\sqrt{2}$ appartient à $\mathbb{R}$ et à aucun des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$.

6) $-\dfrac{7}{3}$ est un nombre rationnel qui n'est pas un nombre décimal (car sa partie décimale contient une infinité de décimales non nulles). $-\dfrac{7}{3}$ appartient à $\mathbb{Q}$ et à $\mathbb{R}$ et n'appartient pas à $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}$. Le plus petit des cinq ensembles auquel appartient $-\dfrac{7}{3}$ est $\mathbb{Q}$.

Exercice 3

Compléter avec l'un des symboles $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$:

1) $2,3 \ldots \mathbb{D}$ **2)** $\left\{-\dfrac{25}{4}\right\} \ldots \mathbb{D}$ **3)** $-\dfrac{75}{3} \ldots \mathbb{Z}$ **4)** $-1^2 \ldots \mathbb{N}$ **5)** $\{\sqrt{2}\} \ldots \mathbb{Q}$ **6)** $\{4, \pi\} \ldots \mathbb{Q}$.

Solution 3

1) $2,3 \in \mathbb{D}$. **2)** $\left\{-\dfrac{25}{4}\right\} \subset \mathbb{D}$ (car $-\dfrac{25}{4} = -6,25$) **3)** $-\dfrac{75}{3} \in \mathbb{Z}$ (car $-\dfrac{75}{3} = -25$) **4)** $-1^2 \notin \mathbb{N}$ (car $-1^2 = -1$) **5)** $\{\sqrt{2}\} \not\subset \mathbb{Q}$
6) $\{4, \pi\} \not\subset \mathbb{Q}$ (car π n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ et donc il existe un élément de l'ensemble $\{4, \pi\}$ qui n'appartient pas à $\mathbb{Q}$).

Rappels de cours et/ou commentaires.
• *Il ne faut pas confondre* -1^2 *et* $(-1)^2$. $-1^2 = -1 \times 1 = -1$ *et* $(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$.
• *Il ne faut pas confondre* $\in$ *et* $\subset$. $x \in \mathrm{E}$ *signifie que* x *est un élément de l'ensemble* E. $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ *signifie que l'ensemble* F *est contenu dans l'ensemble* E. *Ainsi,* $2 \in \mathbb{N}$ *est correct et* $2 \subset \mathbb{N}$ *n'est pas correct.* $\{2\} \subset \mathbb{N}$ *est correct et* $\{2\} \in \mathbb{N}$ *n'est pas correct.* ■

II Les nombres décimaux

Exercice 4

Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont des nombres décimaux ?

1) $\dfrac{75}{6}$ **2)** π **3)** $\dfrac{5}{6}$ **4)** 3×10^{-2} **5)** $-\dfrac{1}{5}$ **6)** $\sqrt{2}$ **7)** -3.

Solution 4

1) $\dfrac{75}{6} = \dfrac{3 \times 25}{3 \times 2} = \dfrac{25}{2} = 12,5$. Donc, $\dfrac{75}{6} \in \mathbb{D}$.

2) On a admis en cours que π est un nombre irrationnel. En particulier, $\pi \notin \mathbb{D}$.

3) $\dfrac{5}{6} = 0,833\,333\ldots$ Le développement décimal de $\dfrac{5}{6}$ admet une infinité de décimales non nulles. Donc, $\dfrac{5}{6} \notin \mathbb{D}$.

4) $3 \times 10^{-2} = 0,03$. Donc, $3 \times 10^{-2} \in \mathbb{D}$.

5) $-\dfrac{1}{5} = -\dfrac{2}{10} = -0,2$. Donc, $-\dfrac{1}{5} \in \mathbb{D}$.

6) On a démontré en cours que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. En particulier, $\sqrt{2} \notin \mathbb{D}$.

7) -3 est un entier relatif et en particulier $-3 \in \mathbb{D}$.

Exercice 5

La notation scientifique d'un nombre décimal x est : $x = d \times 10^n$ où d est un nombre décimal tel que $0 \leqslant d < 10$ et n est un entier relatif. Donner la notation scientifique de chacun des nombres décimaux suivants :

1) $2,7 \times 5,31$ **2)** $\dfrac{257}{4}$ **3)** $\dfrac{7}{1\,250}$.

Solution 5

1) $2,7 \times 5,31 = 14,337 = 1,433\,7 \times 10$. **2)** $\dfrac{257}{4} = 64,25 = 6,425 \times 10$. **3)** $\dfrac{7}{1\,250} = 0,0056 = 5,6 \times 10^{-3}$.

Rappels de cours et/ou commentaires.
$0,0056 = 0,1 \times 0,056 = 0,056 \times 10^{-1}$ *ou aussi* $0,0056 = 0,01 \times 0,56 = 0,56 \times 10^{-2}$ *ou aussi* $0,0056 = 0,001 \times 5,6 = 5,6 \times 10^{-3}$.
■

Exercice 6

Simplifier chacun des nombres suivants :

1) $\mathrm{A} = 10^3 \times \left(10^5\right)^2$ **2)** $\mathrm{B} = \dfrac{10^{-3} \times \left(10^4\right)^{-2}}{10^{-7}}$ **3)** $\mathrm{C} = \dfrac{\left(10^3\right)^2 \times 10^5}{10^7 \times 10^4}$.

Solution 6

1) $\mathrm{A} = 10^3 \times \left(10^5\right)^2 = 10^3 \times 10^{5 \times 2} = 10^3 \times 10^{10} = 10^{3+10} = 10^{13}$.

2) $\mathrm{B} = \dfrac{10^{-3} \times \left(10^4\right)^{-2}}{10^{-7}} = \dfrac{10^{-3} \times 10^{-8}}{10^{-7}} = 10^{-3-8-(-7)} = 10^{-4}$.

3) $\mathrm{C} = \dfrac{\left(10^3\right)^2 \times 10^5}{10^7 \times 10^4} = \dfrac{10^6 \times 10^5}{10^7 \times 10^4} = 10^{6+5-7-4} = 10^0 = 1$.

Exercice 7

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. On justifiera dans chacun sa prise de position.

1) 0 n'est pas un nombre décimal car 0 n'a pas de partie décimale.

2) La somme de deux nombres décimaux est un nombre décimal.

3) Le produit de deux nombres décimaux est un nombre décimal.

4) L'inverse d'un entier naturel non nul est un nombre décimal.

5) Il existe un entier naturel non nul dont l'inverse est un nombre décimal.

Solution 7

1) FAUX. 0 est un entier naturel et en particulier 0 est un nombre décimal. 0 a, comme tout nombre réel, une partie décimale. Cette partie décimale n'est constituée que de zéros : $0 = 0,000\,000\ldots$

2) VRAI. Soient x et y deux nombres décimaux. Il existe deux entiers relatifs a et b et deux entiers naturels n et m tels que $x = \frac{a}{10^n}$ et $y = \frac{b}{10^p}$. Si n est le plus grand des deux entiers n et p, on a $n - p \geqslant 0$ puis

$$x + y = \frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^p} = \frac{a}{10^n} + \frac{b \times 10^{n-p}}{10^p \times 10^{n-p}} = \frac{a}{10^n} + \frac{b \times 10^{n-p}}{10^n} = \frac{a + b \times 10^{n-p}}{10^n}.$$

Puisque $n - p \geqslant 0$, $a + b \times 10^{n-p}$ est un entier relatif et donc $x + y$ est un entier relatif.

Si p est le plus grand des deux entiers n et p, on applique ce qui précède à y et x et on obtient : $y + x$ est un nombre décimal ou encore $x + y$ est un nombre décimal.

On a montré que la somme de deux nombres décimaux est un nombre décimal.

3) VRAI. Soient x et y deux nombres décimaux. Il existe deux entiers relatifs a et b et deux entiers naturels n et m tels que $x = \frac{a}{10^n}$ et $y = \frac{b}{10^p}$.

$$x \times y = \frac{a}{10^n} \times \frac{b}{10^p} = \frac{a \times b}{10^n \times 10^p} = \frac{ab}{10^{n+p}}.$$

ab est un entier relatif et $n+p$ est un entier naturel. Donc, $x \times y$ est un nombre décimal. On a montré que le produit de deux nombres décimaux est un nombre décimal.

4) FAUX. 3 est un entier naturel non nul mais $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

5) VRAI. 10 est un entier naturel non nul et $\frac{1}{10}$ est un nombre décimal.

Rappels de cours et/ou commentaires.

• *Les nombres décimaux sont les nombres de la forme* $\frac{a}{10^n}$ *où a est un entier relatif et n un entier naturel.*

• *Dans les questions 2) et 3), on ne devait pas vérifier les affirmations sur un exemple. On devait considérer deux nombres décimaux x et y quelconques. D'où l'utilisation des lettres a, b, n et p.*

• *Dans la question 4), au contraire, pour vérifier que l'affirmation est fausse, c'est-à-dire pas toujours vraie, il faut fournir un contre-exemple.*

• *Dans la question 5), pour vérifier qu'**il existe** ..., il faut fournir un exemple explicite.* ■

Exercice 8

Déterminer un nombre décimal d tel que $\frac{8}{7} < d < \frac{9}{7}$.

Solution 8

$\frac{8}{7} = 1,14\ldots$ et $\frac{9}{7} = 1,28\ldots$ Donc, $\frac{8}{7} < 1,2 < \frac{9}{7}$. Le nombre $d = 1,2$ est un nombre décimal tel que $\frac{8}{7} < d < \frac{9}{7}$.

Exercice 9

Soient a un entier relatif et p et q des entiers naturels. Montrer que $\dfrac{a}{2^p5^q}$ est un nombre décimal.

Solution 9

Soient a un entier relatif et p et q des entiers naturels. Si $p \geqslant q$, alors $p-q \geqslant 0$ puis

$$\frac{a}{2^p5^q} = \frac{a\times 5^{p-q}}{2^p\times 5^q\times 5^{p-q}} = \frac{a\times 5^{p-q}}{2^p\times 5^p} = \frac{a\times 5^{p-q}}{(2\times 5)^p} = \frac{a\times 5^{p-q}}{10^p}.$$

Puisque $a\times 5^{p-q}$ est un entier relatif et p est un entier naturel, ceci montre que $\dfrac{a}{2^p5^q}$ est un nombre décimal.

Si $p<q$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par 2^{q-p} et on obtient de nouveau le fait que $\dfrac{a}{2^p5^q}$ est un nombre décimal.

Rappels de cours et/ou commentaires.

On peut montrer que si $r = \dfrac{a}{b}$ ($a\in\mathbb{Z}^*$, $b\in\mathbb{N}^*$) est un nombre rationnel non nul ***sous forme irréductible****, $\dfrac{a}{b}$ est un nombre décimal si et seulement si b est de la forme 2^p5^q avec p et q entiers naturels.* ■

III Approximations décimales

Exercice 10

Soit $x=\sqrt{7}$.

1) Donner une encadrement de x d'amplitude 10^{-2} par deux nombres décimaux.

2) Donner une valeur décimale approchée de x à 10^{-3} près par défaut.

3) Donner une valeur décimale approchée de x à 10^{-4} près par excès.

4) Donner l'arrondi à 10^{-4} de x.

Solution 10

La calculatrice fournit $\sqrt{7} = 2,645\,751\ldots$

1) $2,64 \leqslant \sqrt{7} \leqslant 2,65$. **2)** $2,645 \leqslant \sqrt{7} \leqslant 2,646$ et en particulier $\sqrt{7} = 2,645$ à 10^{-3} près par défaut.
3) $2,6457 \leqslant \sqrt{7} \leqslant 2,6458$ et en particulier $\sqrt{7} = 2,6458$ à 10^{-4} près par excès.

4) $\sqrt{7} = 2,645\,751\ldots$. Donc, parmi les deux valeurs décimales approchées à 10^{-4} près $2,645\,7$ et $2,645\,8$, celle qui est la valeur la plus proche de $\sqrt{7}$ est $2,645\,8$. L'arrondi à 10^{-4} est $2,645\,8$.

Exercice 11

Dans 60 centilitres d'eau non salée, on verse $4,3$ grammes de sel. Donner un encadrement décimal d'amplitude 10^{-1} de la concentration du sel dans l'eau exprimée en grammes par litre.

Solution 11

On note V le volume d'eau exprimé en litres, m la masse de sel, exprimée en grammes, que l'on verse dans l'eau et C la concentration de sel dans l'eau exprimée en grammes par litre.

$$\mathrm{C} = \frac{m}{\mathrm{V}} = \frac{4,3}{0,6} = \frac{43}{6} = 7,16\ldots$$

Donc, $7,1 \leqslant \mathrm{C} \leqslant 7,2$.

Exercice 12

Un automobiliste parcourt 97 kilomètres en une heure et 12 minutes.

1) Donner un encadrement décimal d'amplitude 10^{-1} de sa vitesse moyenne exprimée en kilomètres par heure.

2) Donner un encadrement décimal d'amplitude 10^{-1} de sa vitesse moyenne exprimée en mètres par seconde.

Solution 12

1) On note d la distance parcourue exprimée en kilomètres, t le temps mis pour parcourir cette distance exprimé en heures et v la vitesse moyenne exprimée en kilomètres par heure. $t = 1 + \frac{12}{60} = 1 + \frac{1}{5} = 1{,}2$ puis $v = \frac{d}{t} = \frac{97}{1{,}2} = 80{,}83\ldots$ Donc, $80{,}8 \leqslant v \leqslant 80{,}9$.

2) On note d la distance parcourue exprimée en mètres, t le temps mis pour parcourir cette distance exprimé en secondes et v la vitesse moyenne exprimée en mètres par seconde. $t = 60 \times 60 + 12 \times 60 = 72 \times 60 = 4\,320$ et $d = 97\,000$ puis $v = \frac{d}{t} = \frac{97\,000}{4\,320} = 22{,}45\ldots$ Donc, $22{,}4 \leqslant v \leqslant 22{,}5$.

Exercice 13

On donne l'encadrement $3{,}14 \leqslant \pi \leqslant 3{,}15$. On rappelle que le volume d'une sphère est $\mathrm{V} = \frac{4}{3}\pi \mathrm{R}^3$ où R est le rayon de la sphère.

1) Une orange a un rayon de 3 cm. Donner un encadrement décimal de son volume.

2) La terre a un rayon de $6\,372$ km. Donner un encadrement décimal de son volume (faites les calculs à la main si votre calculatrice n'affiche pas tous les chiffres de $\frac{4}{3} \times 6\,372^3$).

3) Quel commentaire (constructif) vous inspire les deux encadrements ?

Solution 13

1) Notons V le volume de l'orange exprimé en cm^3. $\mathrm{V} = \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi$. On en déduit que $3{,}14 \times 36 \leqslant \mathrm{V} \leqslant 3{,}15 \times 36$ ou encore

$$113{,}04 \leqslant \mathrm{V} \leqslant 113{,}4.$$

2) Notons V le volume de la terre exprimé en km^3. $\mathrm{V} = \frac{4}{3}\pi \times 6\,372^3$ avec $\frac{4}{3} \times 6\,372^3 = 344\,957\,854\,464$. On en déduit que $3{,}14 \times 344\,957\,854\,464 \leqslant \mathrm{V} \leqslant 3{,}15 \times 344\,957\,854\,464$ ou encore

$$1\,083\,167\,663\,016{,}96 \leqslant \mathrm{V} \leqslant 1\,086\,617\,241\,561{,}6.$$

3) L'amplitude de l'encadrement du 1) est $0{,}36$ ou encore, on connaît le volume de l'orange à $0{,}36$ cm^3 près. L'amplitude de l'encadrement du 2) est $3\,449\,578\,544{,}64$ ou encore on connaît le volume de la terre à $3\,449\,578\,544{,}64$ km^3 près c'est-à-dire environ 3 milliards de km^3.

L'encadrement décimal du nombre π était tout à fait satisfaisant pour la question 1) et totalement insuffisant pour la question 2). Pour obtenir un rendacrement acceptable en 2), il fallait un nombre de décimales exactes de π bien plus important.

Rappels de cours et/ou commentaires.
Quand on dit que π *vaut « environ »* $3{,}14$*, cela ne veut rien dire. Tout dépend de l'usage que l'on fait de cette valeur « approchée ».* ■

Exercice 14

La masse de la terre exprimée en kg et $m = 5{,}972 \times 10^{24}$ et le rayon de la terre exprimé en km est $6\,372$.

Calculer la masse volumique de la terre. On rappelle qu'un corps de masse m exprimée en kilogrammes et de volume V exprimé en m^3, a pour masse volumique, exprimée en kg par m^3, $\mu = \frac{m}{\mathrm{V}}$ (on arrondira au kilogramme par mètre cube).

Solution 14

On note R le rayon de la terre exprimé en m. Donc, $R = 6\,372 \times 10^3$.

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} = m \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{\pi R^3} = \frac{3m}{4\pi R^3} = \frac{3 \times 5{,}972 \times 10^{24}}{4 \times \pi \times 6372^3 \times \left(10^3\right)^3} = \frac{3 \times 5{,}972 \times 10^{24}}{4 \times \pi \times 6\,372^3 \times 10^9} \\ &= \frac{3 \times 5{,}972}{4 \times \pi \times 6\,372^3} \times 10^{15} = 5{,}510\,6\ldots \times 10^{-12} \times 10^{15} = 5{,}510\,6\ldots \times 10^3 \\ &= 5\,510{,}6\ldots\end{aligned}$$

La masse volumique de la terre, arrondie au kilogramme par mètre cube, est $\mu = 5511$ kg/m^3.

IV Nombres rationnels

Exercice 15

Calculer les nombres suivants (les résultats seront donnés sous forme irréductible) :

1) $A = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ **2)** $B = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{5}{6}$ **3)** $C = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{5}{4} + \frac{1}{7}\right)$ **4)** $\dfrac{\frac{2}{5} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{6}}$ **4)** $D = \frac{3}{5} - \dfrac{\frac{4}{3} - 2}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$ **5)** $E = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$.

Solution 15

1) $A = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{4 \times 3} + \frac{4}{3 \times 4} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$.

2) $B = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{5}{6} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} - \frac{3}{4 \times 3} + \frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} + \frac{10}{12} = \frac{8 - 3 + 10}{12} = \frac{15}{12} = \frac{3 \times 5}{3 \times 4} = \frac{5}{4}$.

3) $C = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{5}{4} + \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6}\right)\left(-\frac{35}{28} + \frac{4}{28}\right) = \frac{5}{6} \times \left(-\frac{31}{28}\right) = -\frac{155}{168}$.

4) $D = \frac{3}{5} - \dfrac{\frac{4}{3} - 2}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{5} - \dfrac{\frac{4}{3} - \frac{6}{3}}{\frac{6}{6} - \frac{3}{6} + \frac{2}{6}} = \frac{3}{5} - \dfrac{-\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$.

5)

$$\begin{aligned}E &= \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\frac{2}{2} + \frac{1}{2}}}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\frac{3}{2}}}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\frac{3}{3} + \frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\frac{5}{3}}} = \dfrac{1}{1 + \frac{3}{5}} = \dfrac{1}{\frac{5}{5} + \frac{3}{5}} \\ &= \dfrac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8}.\end{aligned}$$

Exercice 16

Déterminer un nombre rationnel q tel que $\frac{3}{11} < q < \frac{4}{11}$.

Solution 16

$\frac{3}{11} = \frac{6}{22}$ et $\frac{4}{11} = \frac{8}{22}$. Donc, $\frac{3}{11} < \frac{7}{22} < \frac{4}{11}$. Le nombre $q = \frac{7}{22}$ est un nombre rationnel tel que $\frac{3}{11} < q < \frac{4}{11}$.

Rappels de cours et/ou commentaires.

Il y a une idée sous-jacente à la solution ci-dessus. Le nombre rationnel que nous avons intercalé entre $\frac{3}{11}$ *et* $\frac{4}{11}$ *est « le milieu de ces deux nombres » :* $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{11}+\frac{4}{11}\right)$. ■

Exercice 17

R ★★ (Développements décimaux périodiques)

1) Soit $x = 0,999\,99\ldots$ En calculant $10x$, déterminer un nombre très simple auquel x est égal.

2) Soit $x = 0,927\,927\,927\ldots$ En adaptant l'idée de la première question, montrer que x est un nombre rationnel dont on donnera l'écriture irréductible.

Solution 17

1) $10x = 9,999\ldots = 9 + 0,999\ldots = 9 + x$ puis $9x = 9$ et finalement $x = 1$.

$$0,999\,999\,\ldots = 1.$$

2) $1\,000x = 927,927\,927\,\ldots = 227 + 0,927\,927\,\ldots = 927 + x$ puis $999x = 927$ et donc

$$x = \frac{927}{999} = \frac{9\times 103}{9\times 111} = \frac{103}{111}.$$

Exercice 18

Montrer que les nombres suivants sont irrationnels :

1) $3\sqrt{2}-2$ **2)** $\sqrt{\pi}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}$.

Solution 18

1) Supposons par l'absurde que $3\sqrt{2}-2$ est rationnel. Il existe alors un entier relatif a et un entier naturel non nul b tels que $3\sqrt{2}-2 = \frac{a}{b}$. Mais alors, $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}+2 = \frac{a+2b}{b}$ puis $\sqrt{2} = \frac{a+2b}{3b}$. Puisque $a+2b$ est un entier relatif et que $3b$ est un entier naturel non nul, on en déduit que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, ce qui est faux. Donc, $3\sqrt{2}-2$ est un nombre irrationnel.

2) Supposons par l'absurde que $\sqrt{\pi}$ est rationnel. Il existe alors deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\sqrt{\pi}-2 = \frac{a}{b}$. En élevant au carré, on obtient $\pi = \frac{a^2}{b^2}$. $\frac{a^2}{b^2}$ est un nombre rationnel en tant que quotient de deux entiers naturels non nuls et on en déduit que π est un nombre rationnel, ce qui est faux. Donc, $\sqrt{\pi}$ est un nombre irrationnel.

3) Supposons par l'absurde que $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}$ est rationnel. Il existe alors deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} = \frac{a}{b}$. En prenant l'inverse, on obtient $\sqrt{\sqrt{\pi}} = \frac{b}{a}$ puis en élevant à l'exposant 4, on obtient $\pi = \frac{b^4}{a^4}$. $\frac{b^4}{a^4}$ est un nombre rationnel en tant que quotient de deux entiers naturels non nuls et on en déduit que π est un nombre rationnel, ce qui est faux. Donc, $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 19

On appelle fraction unitaire toute fraction de la forme $\frac{1}{n}$ où n est un entier naturel non nul.

1) Décomposer le nombre $\frac{1}{6}$ d'au moins deux façons différentes en somme de deux fractions unitaires distinctes.

2) Décomposer le nombre $\frac{2}{5}$ en somme de trois fractions unitaires deux à deux distinctes.

3) a) Soit n un entier naturel non nul. Calculer $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

b) Décomposer $\frac{1}{13}$ en somme de de deux fractions unitaires distinctes puis en somme de quatre fractions unitaires deux à deux distinctes.

Solution 19

1) $\frac{1}{6} = \frac{4}{24} = \frac{3}{24} + \frac{1}{34} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24}$ et aussi $\frac{1}{6} = \frac{7}{42} = \frac{6}{42} + \frac{1}{42} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$.

2) $\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{6}{30} = \frac{1}{5} + \frac{5}{30} + \frac{1}{30} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30}$.

3) a) Soit n un entier naturel non nul. $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$. On en déduit encore que pour tout entier naturel non nul n, $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$.

b) En appliquant à $n = 13$, on obtient $\frac{1}{13} = \frac{14}{+} \frac{1}{13 \times 14} = \frac{1}{14} + \frac{1}{182}$. Ensuite, $\frac{1}{14} = \frac{1}{15} + \frac{1}{210}$ et $\frac{1}{182} = \frac{1}{183} + \frac{1}{33\,306}$. Finalement,

$$\frac{1}{13} = \frac{1}{15} + \frac{1}{183} + \frac{1}{210} + \frac{1}{33\,306}.$$

Exercice 20

T ★★ (Vrai ou faux)

Dans chacun des cas suivants, dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Si elle est vraie, le démontrer et si elle est fausse fournir un contre-exemple.

1) La somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.

2) La somme de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.

3) La somme de deux nombres irrationnels est un nombre rationnel.

4) Si la somme de deux nombres réels est un nombre rationnel, alors ces deux nombres sont des nombres rationnels.

4) Si la somme de deux nombres réels est un nombre irrationnel, alors l'un au moins de ces deux nombres est un nombres irrationnel.

5) Le produit de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.

6) Si le produit de deux nombres réels est un nombre rationnel, alors ces deux nombres sont des nombres rationnels.

7) Le produit de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.

8) Le produit d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

9) Le quotient d'un nombre rationnel et d'un nombre rationnel non nul est un nombre rationnel.

10) Le carré d'un nombre irrationnel non nul est un nombre irrationnel.

Solution 20

1) VRAI. Soient x et y deux nombres rationnels. Il existe deux entiers relatifs a et c et deux entiers naturels non nuls b et d tels que $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$. On a

$$x + y = \frac{ad + bc}{bd}$$

où de plus $ad + bc$ est un entier relatif et bd est un entier naturel non nul. Donc, $x + y$ est un nombre rationnel.

2) FAUX. $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont des nombres irrationnels mais $\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) = 0$ est un nombre rationnel.

3) FAUX. $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ sont des nombres irrationnels et leur somme à savoir $2\sqrt{2}$ est aussi un nombre irrationnel.

4) FAUX. $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont des nombres irrationnels mais $\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) = 0$ est un nombre rationnel.

5) VRAI. Soient x et y deux nombres réels dont la somme est un nombre irrationnel. Supposons par l'absurde que x et y sont tous deux des nombres rationnels. Alors leur somme est un nombre rationnel d'après 1), ce qui est faux. Donc, l'un au moins des deux nombres x ou y est un nombre irrationnel.

6) VRAI. Soient x et y deux nombres rationnels. Il existe deux entiers relatifs a et c et deux entiers naturels non nuls b et d tels que $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$. On a

$$x \times y = \frac{ac}{bd}$$

où de plus ac est un entier relatif et bd est un entier naturel non nul. Donc, $x \times y$ est un nombre rationnel.

7) FAUX. $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ sont deux nombres dont le produit, à savoir 2, est un nombre rationnel. Mais aucun de ces deux nombres n'est rationnel.

8) FAUX. $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ sont deux nombres irrationnels dont le produit, à savoir 2, est un nombre rationnel.

9) FAUX. Soit x un nombre irrationnel. 0 est un nombre rationnel et $0 \times x = 0$ est aussi un nombre rationnel.

10) VRAI. Soient x un nombre rationnel et y un nombre rationnel non nul. Il existe deux entiers relatifs a et c tels que $c \neq 0$ et deux entiers naturels non nuls b et d tels que $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$. On a

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Ceci montre que $\frac{x}{y}$ est un nombre rationnel.

11) FAUX. $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel amis son carré, à savoir 2, est un nombre rationnel.

