

# Centres étrangers 2011. Enseignement spécifique

## EXERCICE 4

### 1) Etude des fonctions f et g

a) **Limite de f en  $-\infty$ .**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ . En multipliant, on obtient  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{1-x} = -\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

**Limite de g en  $-\infty$ .**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty$ . Donc,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{1-x} = +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty.$$

b) **Limite de f en  $+\infty$ .** Pour tout réel non nul x,  $f(x) = x \times e \times \frac{1}{e^x} = e \times \frac{1}{e^{x/x}}$ . D'après un théorème de croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  puis  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x/x}} = 0$  et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e \times \frac{1}{e^{x/x}} = e \times 0 = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

**Limite de g en  $+\infty$ .** Soit x un réel non nul.

$$g(x) = x^2 \times e \times \frac{1}{e^x} = e \times \frac{1}{e^{x/x^2}} = \frac{e}{4} \times \frac{1}{\frac{x^2}{4}} = \frac{e}{4} \times \frac{1}{\left(\frac{e^{x/2}}{(x/2)^2}\right)^2} = \frac{e}{4} \times \frac{1}{\left(\frac{e^{x/2}}{x/2}\right)^2}.$$

D'après un théorème de croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x/2}}{x/2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  puis  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{x/2}}{x/2}\right)^2 = +\infty$  puis  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^{x/2}}{x/2}\right)^2} = 0$  et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{4} \times \frac{1}{\left(\frac{e^{x/2}}{x/2}\right)^2} = \frac{e}{4} \times 0 = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

c) **Variations de f.** La fonction f est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 \times e^{1-x} + x \times (-1) \times e^{1-x} = (1-x)e^{1-x}.$$

Pour tout réel x,  $e^{1-x} > 0$  et donc, pour tout réel x,  $f'(x)$  est du signe de  $1-x$ . En tenant compte de  $f(1) = 1 \times e^0 = 1$ , on en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)		+	0 -
f	$-\infty$	↗ 1 ↘	0

**Variations de g.** La fonction g est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel x,

$$g'(x) = 2x \times e^{1-x} + x^2 \times (-1) \times e^{1-x} = (2x - x^2)e^{1-x} = x(2-x)e^{1-x}.$$

Pour tout réel x,  $e^{1-x} > 0$  et donc, pour tout réel x,  $g'(x)$  est du signe de  $x(2-x)$ . On en déduit le tableau de variations de la fonction g.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
g'(x)		-	0 + 0 -	
g	$+\infty$	↘ 0 ↗	$4e^{-1}$	↘ 0

## 2) Calcul d'intégrales

a) La fonction  $x \mapsto e^{1-x}$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ . Donc  $I_0$  existe.

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx = [-e^{1-x}]_0^1 = (-e^{1-1}) - (-e^{1-0}) = e - 1.$$

$$I_0 = e - 1.$$

b) Soit  $n$  un entier naturel. La fonction  $g_{n+1} : x \mapsto x^{n+1}e^{1-x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,

$$g'_{n+1}(x) = (n+1)x^n e^{1-x} + x^{n+1} \times (-1)e^{1-x} = (n+1)g_n(x) - g_{n+1}(x).$$

Intégrons cette égalité. Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} (n+1)I_n - I_{n+1} &= (n+1) \int_0^1 g_n(x) dx - \int_0^1 g_{n+1}(x) dx = \int_0^1 ((n+1)g_n(x) - g_{n+1}(x)) dx \\ &= \int_0^1 g'_{n+1}(x) dx = [g_{n+1}(x)]_0^1 = 1^{n+1}e^{1-1} - 0^{n+1}e^{1-0} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Par suite,  $(n+1)I_n - I_{n+1} = 1$  puis  $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$ .

$$\text{Pour tout entier naturel } n, I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n.$$

c)  $I_1 = -1 + 1 \times I_0 = -1 + (e - 1) = e - 2$  et  $I_2 = -1 + 2 \times I_1 = -1 + 2(e - 2) = 2e - 5$ .

$$I_1 = e - 2 \text{ et } I_2 = 2e - 5.$$

## 3) Calcul d'une aire plane

a) La position relative de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  est donnée par le signe de  $f(x) - g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ . Soit  $x$  un réel.

$$f(x) - g(x) = xe^{1-x} - x^2e^{1-x} = x(1-x)e^{1-x}.$$

Le signe de  $f(x) - g(x)$  est donné dans le tableau suivant :

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$	
$f(x) - g(x)$		$-$	$+$	$0$	$-$

On en déduit que  $\mathcal{C}$  est strictement au-dessous de  $\mathcal{C}'$  sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]1, +\infty[$ , strictement au-dessus de  $\mathcal{C}'$  sur  $]0, 1[$  et  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  se coupent aux points de coordonnées  $(0, f(0))$  et  $(1, f(1))$  c'est-à-dire  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ .

b) D'après la question précédente,  $\mathcal{C}$  est au-dessus de  $\mathcal{C}'$  sur  $[0, 1]$ . Donc, d'après la question 2)c),

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx = I_1 - I_2 = (e - 2) - (2e - 5) = 3 - e.$$

$$\mathcal{A} = 3 - e.$$

## 4) Etude de l'égalité de deux aires

a) Soit  $a > 1$ .

$$\begin{aligned} S(a) = \mathcal{A} &\Leftrightarrow 3 - e^{1-a}(a^2 + a + 1) = 3 - e \Leftrightarrow e \times \frac{1}{e^a}(a^2 + a + 1) = e \Leftrightarrow \frac{1}{e^a}(a^2 + a + 1) = 1 \\ &\Leftrightarrow a^2 + a + 1 = e^a \text{ (car } e^a \neq 0). \end{aligned}$$

b) Pour  $a \geq 1$ , posons  $h(a) = e^a - a^2 - a - 1$  de sorte que  $S(a) = \mathcal{A} \Leftrightarrow h(a) = 0$ .

La fonction  $h$  est dérivable sur  $[1, +\infty[$  et pour  $a \geq 1$ ,  $h'(a) = e^a - 2a - 1$ . De même, la fonction  $h'$  est dérivable sur  $[1, +\infty[$  et pour  $a \geq 1$ ,  $h''(a) = e^a - 2$ .

Pour  $a \geq 1$ ,  $h''(a) \geq e^1 - 2 > 0$ . Donc la fonction  $h'$  est strictement croissante sur  $[1, +\infty[$ .

Puisque la fonction  $h'$  est continue et strictement croissante sur  $[1, +\infty[$ , on sait que pour tout réel  $k$  de  $\left[ h'(1), \lim_{a \rightarrow +\infty} h'(a) \right[$ , l'équation  $h'(a) = k$  admet une solution et une seule dans  $[1, +\infty[$ .

En particulier, puisque  $\lim_{a \rightarrow +\infty} h'(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} e^a - 2a - 1 = \lim_{a \rightarrow +\infty} e^a \left( 1 - 2\frac{a}{e^a} - \frac{1}{e^a} \right) = +\infty > 0$  et que d'autre part  $h'(1) = e - 2 - 1 = e - 3 < 0$ , il existe un unique réel  $\alpha$  de  $[1, +\infty[$  et même  $]1, +\infty[$  tel que  $h'(\alpha) = 0$ .

Puisque la fonction  $h'$  est strictement croissante sur  $[1, +\infty[$ , on en déduit que la fonction  $h'$  est strictement négative sur  $[1, \alpha[$  et strictement positive sur  $] \alpha, +\infty[$  puis que la fonction  $h$  est strictement décroissante sur  $[1, \alpha]$  et strictement croissante sur  $[\alpha, +\infty[$ .

Puisque  $h(1) = e - 3 < 0$  et que  $h$  est strictement décroissante sur  $[1, \alpha]$ , pour tout réel  $a$  de  $[1, \alpha]$ , on a  $h(a) < 0$ . En particulier, pour tout réel  $a$  de  $[1, \alpha]$ , on a  $h(a) \neq 0$  et d'autre part,  $h(\alpha) < 0$ .

Ensuite, la fonction  $h$  est continue et strictement croissante sur  $[\alpha, +\infty[$ .

On en déduit que pour tout réel  $k$  de  $\left[ h(\alpha), \lim_{a \rightarrow +\infty} h(a) \right[$ , l'équation  $h(a) = k$  admet une unique solution dans  $[\alpha, +\infty[$ .

En particulier, puisque  $\lim_{a \rightarrow +\infty} h(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} e^a \left( 1 - \frac{a^2}{e^a} - \frac{a}{e^a} - \frac{1}{e^a} \right) = +\infty > 0$  et que  $h(\alpha) < 0$ , l'équation  $h(a) = 0$  admet une unique solution dans  $[\alpha, +\infty[$ .

En résumé, l'équation  $h(a) = 0$  admet une unique solution dans  $[1, +\infty[$  ou encore l'équation  $S(a) = \mathcal{A}$  admet une unique solution  $a_0$  dans  $[1, +\infty[$ . On peut montrer que  $1,79 < a_0 < 1,80$ .

