Antilles Guyane 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) a) $F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$.

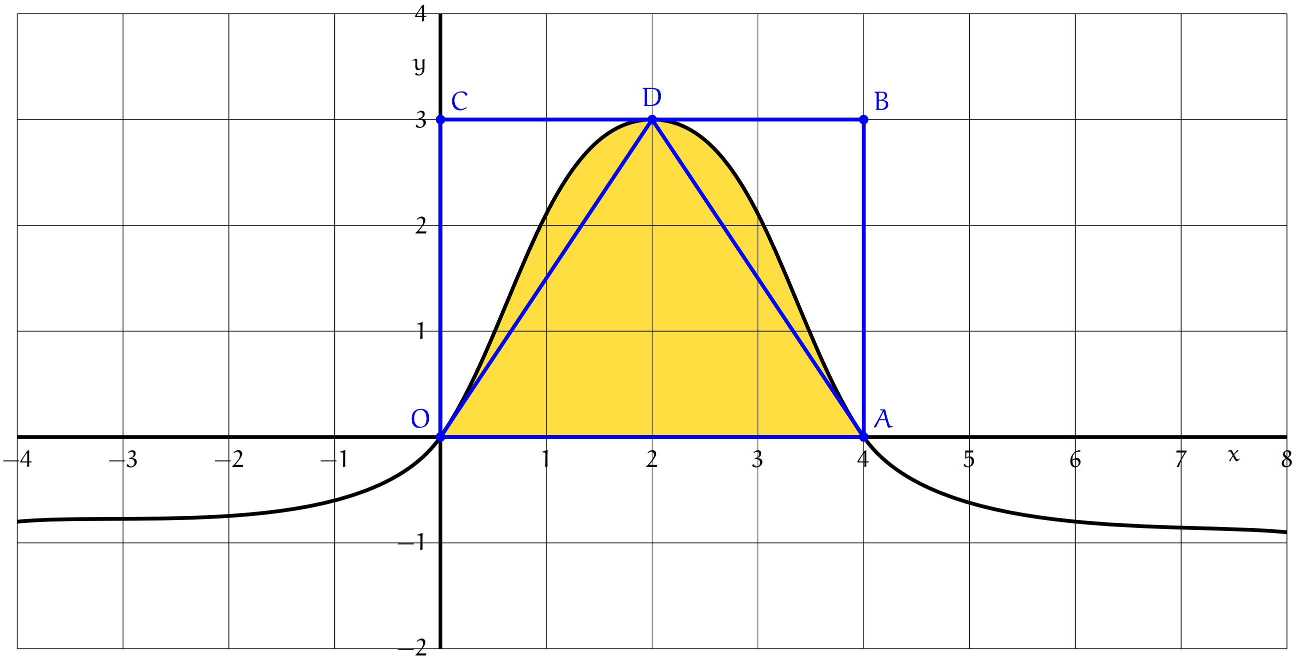
b) • Soit $x \in]0,4]$. Le graphique montre que la fonction f est positive sur $[0,4]$. En particulier, pour tout réel $t \in [0,x]$, $f(t) \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale on en déduit que $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \geqslant 0$. Ceci reste vrai pour $x = 0$ car $F(0) = 0$.

• Soit $x \in [-3,0]$. Le graphique montre que la fonction f est négative sur $[-3,0]$. En particulier, pour tout réel $t \in [x,0]$, $f(t) \leqslant 0$. On en déduit que $\int_x^0 f(t)\,dt \leqslant 0$ puis que $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = -\int_x^0 f(t)\,dt \geqslant 0$.

En résumé,

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ de } [-3,4],\ F(x) \geqslant 0.}$$

c) La fonction f est positive sur l'intervalle $[0,4]$. Donc $F(4)$ est l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 4$.



$F(4)$ est plus petit que l'aire du rectangle OABC qui est égale à $4 \times 3 = 12$ et $F(4)$ est plus grand que l'aire du triangle OAD qui est égale à $\frac{4 \times 3}{2} = 6$. Donc

$$\boxed{6 \leqslant F(4) \leqslant 12.}$$

2) a) La fonction f est continue sur l'intervalle $[-3,8]$. On sait alors que la fonction F est une primitive de la fonction f ou encore F est dérivable sur $[-3,8]$ et $F' = f$.

$$\boxed{f \text{ est la dérivée de } F.}$$

b) La fonction $f = F'$ est strictement négative sur $[-3,0[$, strictement positive sur $]0,4[$ et négative sur $]4,8]$. Donc la fonction F est strictement décroissante sur $[-3,0]$, strictement croissante sur $[0,4]$ et strictement décroissante sur $[4,8]$.

3) Les deux courbes représentées sont les graphes de fonctions décroissantes sur $[-3,0]$, croissantes sur $[0,4]$ et décroissantes sur $[4,8]$. La fonction représentée par la courbe A ne s'annule pas en 0 contrairement à F (d'après la question 1.a)). La courbe A ne peut donc représenter la fonction F. D'après la question 1.c), on a $6 \leqslant F(4) \leqslant 12$. La fonction représentée par la courbe B prend en 4 une valeur inférieure à 5. Donc, la courbe B ne peut représenter la fonction F. Finalement

$$\boxed{\text{aucune des deux courbes ne peut représenter la fonction } F.}$$

