Asie 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On donne le nombre complexe $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

1) a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

b) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.

2) Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.

3) Démontrer les égalités suivantes :

a) $j^3 = 1$;

b) $\mathrm{j}^2 = -1 - j$.

4) On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.
Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B.

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + jb + j^2c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1) En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = j(c - b)$.

2) En déduire que $AC = BC$.

3) Démontrer l'égalité : $a - b = j^2(b - c)$.

4) En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

