

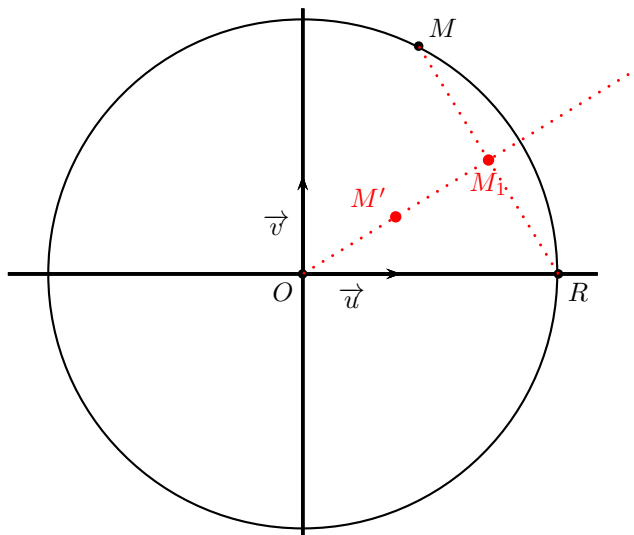
Antilles Guyane 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) Le point $|z_R| = |z_M| = |z|$ et $\arg(z_R) = 0 [2\pi]$. Par suite, $x_R = |z| \times \cos(0) = |z|$ et $y_R = |z| \times \sin(0) = 0$. Le point R a pour coordonnées $(|z|, 0)$.

2) On construit d'abord M_1 le milieu du segment $[MR]$. M' est alors le milieu du segment $[OM_1]$.



Partie B

1) Soit z_0 un réel négatif. Alors, $|z_0| = -z_0$ puis $z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{4} = 0$. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $z_n = 0$.

- L'égalité est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $z_n = 0$. Alors, $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4} = 0$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $z_n = 0$.

En particulier, la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

2) Soit z_0 un réel positif. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$, z_n est un réel positif.

- L'affirmation est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que z_n soit un réel positif. Alors $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}$ est un réel positif.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 0$, z_n est un réel positif.

Puisque pour $n \geq 0$, z_n est un réel positif, pour tout $n \geq 0$, on a $z_{n+1} = \frac{z_n + z_n}{4} = \frac{z_n}{2}$.

La suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc la suite géométrique de premier terme z_0 et de raison $\frac{1}{2}$. On en déduit que

$$\text{pour tout entier naturel } n, z_n = z_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on en déduit que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

3) a) Il semble que la suite $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0$.

b) Soit $n \geq 0$.

$$|z_{n+1}| = \frac{1}{4} |z_n + |z_n|| \leq \frac{1}{4} (|z_n| + |z_n|) = \frac{1}{4} (|z_n| + |z_n|) = \frac{|z_n|}{2}.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $|z_n| \leq \frac{|z_0|}{2^n}$.

- Puisque $\frac{|z_0|}{2^0} = |z_0|$, l'inégalité est vraie quand $n = 0$.

- Soit $n \geq 0$. Supposons que $|z_n| \leq \frac{|z_0|}{2^n}$. Alors $|z_{n+1}| \leq \frac{|z_n|}{2} \leq \frac{1}{2} \times \frac{|z_0|}{2^n} = \frac{|z_0|}{2^{n+1}}$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $0 \leq |z_n| \leq \frac{|z_0|}{2^n}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z_0|}{2^n} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = 0$.