

EXERCICE 1

Partie A

1) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + e^{-x}) = +\infty$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = -\infty$ et finalement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \right) = -\infty.$$

b) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel $x \geq 0$,

$$f'(x) = 0 - \frac{1}{2}(e^x + (-1)e^{-x}) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Soit $x > 0$. Alors, $x > -x$ puis $e^x > e^{-x}$ par stricte croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} . On en déduit que $e^x - e^{-x} > 0$ puis que $f'(x) < 0$.

Ainsi, la fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et sa dérivée est strictement négative sur $]0, +\infty[$. On sait alors que la fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

c) La fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. De plus, $f(0) = \frac{5}{2} > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty < 0$. D'après un corollaire au théorème des valeurs intermédiaires, on sait que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. On note α cette solution.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(-x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) = f(x)$.

Soit maintenant $x < 0$. Alors, $-x > 0$ puis

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = 0 \Leftrightarrow -x = \alpha \Leftrightarrow x = -\alpha.$$

L'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $] -\infty, 0]$ et même $] -\infty, 0[$, à savoir $-\alpha$. Finalement, l'équation $f(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} , exactement deux solutions, opposées l'une à l'autre.

Partie B

1) $f(0) = \frac{5}{2} = 2,5$. Donc, la hauteur d'un arceau est 2,5 m.

2) a) D'après la question 1)b) de la partie A, pour tout $x \in [0, \alpha]$, $f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Donc, pour tout $x \in [0, \alpha]$,

$$\begin{aligned} 1 + (f'(x))^2 &= 1 + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = 1 + \frac{1}{4}((e^x)^2 - 2 \times e^x \times e^{-x} + (e^{-x})^2) \\ &= \frac{4}{4} + \frac{1}{4}((e^x)^2 - 2 + (e^{-x})^2) = \frac{1}{4}((e^x)^2 + 2 + (e^{-x})^2) \\ &= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2. \end{aligned}$$

b) Pour $x \in [0, \alpha]$, $e^x + e^{-x} \geq 0$ et donc $\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Par suite,

$$I = \int_0^\alpha \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) dx = \left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right]_0^\alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha}) - \frac{1}{2}(e^0 - e^0) = \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha}).$$

Par symétrie, la longueur d'un arceau est $2 \times I$ ou encore $e^\alpha - e^{-\alpha}$.

Partie C

1) L'unité d'aire est ici le mètre carré. L'aire, exprimée en mètre carré, d'une facade est $\int_{-\alpha}^\alpha f(x) dx$ ou encore $2 \int_0^\alpha f(x) dx$ pour des raisons de symétrie. L'aire des deux facades est donc $4 \int_0^\alpha f(x) dx$. On retire à la facade sud un rectangle de dimensions 1 m et 2 m et donc d'aire 2 m^2 . Finalement, la quantité de bâche nécessaire pour recouvrir les facades nord et sud est $4 \int_0^\alpha f(x) dx - 2$.

2) D'autre part, la partie supérieure, une fois mise au sol est un rectangle de longueur $3 \times 1,5 = 4,5 = \frac{9}{2}$ mètres et de largeur la longueur d'un arceau calculée à la partie B. Donc, l'aire du toit de la serre est $\frac{9}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})$ puis l'aire de la bâche est

$$4 \int_0^\alpha f(x) \, dx - 2 + \frac{9}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha}).$$

Ensuite,

$$\int_0^\alpha f(x) \, dx = \int_0^\alpha \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \right) dx = \left[\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right]_0^\alpha = \frac{7\alpha}{2} - \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})$$

Finalement, l'aire demandée est :

$$4 \left(\frac{7\alpha}{2} - \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha}) \right) - 2 + \frac{9}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha}) = 14\alpha - 2 + \frac{5}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha}).$$

En prenant 1,92 pour valeur approchée de α , on obtient une aire de 42 m^2 au mètre carré près.

EXERCICE 2

Partie A

1) a) La durée moyenne d'une partie du type A est $E(X_A)$. La variable aléatoire X_A suit la loi uniforme sur $[9; 25]$. Donc, l'espérance de X_A est

$$E(X_A) = \frac{9 + 25}{2} = 17.$$

b) La durée moyenne d'une partie du type B est $E(X_B)$. Cette espérance est l'abscisse du sommet de la courbe fournie par l'énoncé. Donc,

$$\mu = E(X_B) = 17.$$

2) Notons A l'événement « on choisit le type A », B l'événement « on choisit le type B » et X la variable aléatoire égale à la durée de jeu exprimée en minutes. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(X \leq 20) = P(A) \times P_A(X \leq 20) + P(B) \times P_B(X \leq 20) = \frac{1}{2} \times P(X_A \leq 20) + \frac{1}{2} \times P(X_B \leq 20).$$

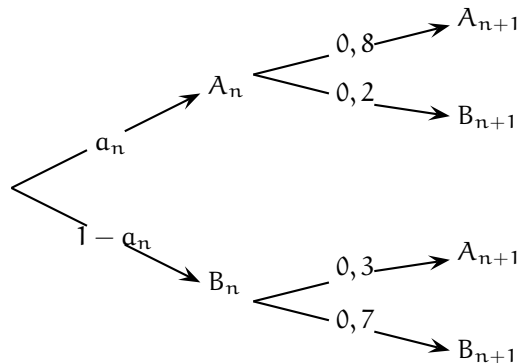
Maintenant, $P(X_A \leq 20) = \frac{20 - 9}{25 - 9} = \frac{11}{16} = 0,6875$. D'autre part, la calculatrice fournit $P(X_B \leq 20) = 0,841\dots$. Donc,

$$P(X \leq 20) = \frac{1}{2} (0,6875 + 0,841\dots) = 0,76 \text{ arrondi au centième.}$$

La probabilité que la durée d'une partie soit inférieure à 20 minutes est 0,76 arrondi au centième.

Partie B

1) a) Arbre recopié et complété.



b) Soit n un entier naturel. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) = 0,8a_n + 0,3(1 - a_n) \\ &= 0,5a_n + 0,3. \end{aligned}$$

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , $0 \leq a_n \leq 0,6$.

- $a_1 = a = 0,5$ et donc $0 \leq a_1 \leq 0,6$. L'encadrement à démontrer est vrai quand $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $0 \leq a_n \leq 0,6$. Alors, $0,5 \times 0 + 0,3 \leq 0,5 \times a_n + 0,3 \leq 0,5 \times 0,6 + 0,3$ ou encore $0,3 \leq a_{n+1} \leq 0,6$ et en particulier $0 \leq a_{n+1} \leq 0,6$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , $0 \leq a_n \leq 0,6$.

b) Soit n un entier naturel non nul. $a_{n+1} - a_n = 0,5a_n + 0,3 - a_n = 0,3 - 0,5a_n = 0,5(0,6 - a_n)$. D'après la question précédente, $a_n \leq 0,6$ et donc $a_{n+1} - a_n \geq 0$.

On a montré que pour tout entier naturel non nul n , $a_{n+1} \geq a_n$ et donc que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

c) La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 0,6. Donc, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. Notons ℓ sa limite. Pour tout entier naturel non nul n , on a $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ell = 0,5\ell + 0,3$. Par suite, $0,5\ell = 0,3$ puis $\ell = 0,6$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,6$.

3) a) Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} = a_{n+1} - 0,6 = 0,5u_n + 0,3 - 0,6 = 0,5u_n - 0,3 = 0,5(a_n - 0,6) = 0,5u_n.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $0,5$.

b) On en déduit que pour tout entier naturel non nul n , $u_n = 0,5^{n-1}u_1 = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1}$ puis

$$a_n = u_n + 0,6 = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6.$$

c) Puisque $-1 < 0,5 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^{n-1} = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,6$. Cette limite ne dépend pas de la valeur de a .

d) Puisque le joueur s'adonne intensivement aux jeux vidéo, il joue à un grand nombre n de parties. Or, pour n grand, la probabilité que le joueur joue une partie de type A est $0,6$ et $0,4$ pour une partie de type B avec $0,4 < 0,6$. La publicité la plus vue devrait donc être celle insérée en début des parties de type A.

EXERCICE 3

1) Le discriminant de l'équation (E) est

$$\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 \times 3 - 16 = -4 = (2i)^2.$$

L'équation (E) admet deux solutions complexes non réelles conjuguées : $\mathbf{a} = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i$ et $\mathbf{b} = \bar{\mathbf{a}} = \sqrt{3} - i$. Soient A et B les points du plan d'affixes respectives \mathbf{a} et \mathbf{b} .

Ensuite, $OA = |\mathbf{a}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ et $OB = |\mathbf{b}| = |\bar{\mathbf{a}}| = 2$. Enfin,

$$BA = |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i| = |2i| = 2.$$

Ainsi, $OA = OB = BA = 2$ et donc le triangle OAB est équilatéral.

L'affirmation 1 est vraie.

2) $|u| = |\mathbf{a}| = 2$ puis

$$\mathbf{u} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{2019} + \bar{\mathbf{u}}^{2019} &= (2e^{i\frac{\pi}{6}})^{2019} + (2e^{-i\frac{\pi}{6}})^{2019} = 2^{2019} \left(e^{i\frac{2019\pi}{6}} + e^{-i\frac{2019\pi}{6}} \right) \\ &= 2^{2019} \left(\cos\left(\frac{2019\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2019\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{2019\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{2019\pi}{6}\right) \right) \\ &= 2^{2020} \cos\left(\frac{2019\pi}{6}\right) = 2^{2020} \cos\left(\frac{(3 + 168 \times 12)\pi}{6}\right) = 2^{2020} \cos\left(\frac{3\pi}{6} + 168 \times 2\pi\right) \\ &= 2^{2020} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

En particulier, $\mathbf{u}^{2019} + \bar{\mathbf{u}}^{2019} \neq 2^{2019}$.

L'affirmation 2 est fausse.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour $x \geq 0$,

$$f'_n(x) = 1 \times e^{-nx+1} + x \times (-ne^{-nx+1}) = (1 - nx)e^{-nx+1}.$$

Pour tout $x \geq 0$, $e^{-nx+1} > 0$ et donc $f'_n(x)$ est du signe de $1 - nx$. Or, $1 - nx > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{n}$ et $1 - nx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{n}$. Donc, la fonction f'_n est positive sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ (en tenant compte de $\frac{1}{n} > 0$) et négative sur $\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$. La fonction f_n est croissante sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$. La fonction f_n admet donc un maximum sur $[0, +\infty[$, atteint en $\frac{1}{n}$.

L'affirmation 3 est vraie.

4) Pour tout réel x , $|f(x)| = |\cos(x)|e^{-x} \leq 1 \times e^{-x} = e^{-x}$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. La courbe \mathcal{C} admet donc l'axe des abscisses pour asymptote en $+\infty$.

L'affirmation 4 est vraie.

5) En fin d'exécution, $I = 15$. La dernière boucle du programme est 1) $2^{14} \leq A$, 2) $I = 15$ 3) $2^{15} > A$ car le programme s'arrête avec $I = 15$. Donc, $2^{14} \leq A < 2^{15}$. Par croissance du logarithme népérien sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $14 \ln(2) \leq \ln(A) < 15 \ln(2)$.

L'affirmation 5 est fausse.

EXERCICE 4.

Partie A

1) Les coefficients de A sont des entiers relatifs. De plus, $6 \times (-4) - 5 \times (-5) = -24 + 25 = 1$. Donc, la matrice A appartient à l'ensemble S .

2) Soient a et d deux entiers relatifs puis $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$.

La matrice A est un élément de S si et seulement si $ad - 6 = 1$ ou encore $ad = 7$. Il existe exactement 4 couples (a, d) d'entiers relatifs tels que $ad = 7$ à savoir $(1, 7)$, $(7, 1)$, $(-1, -7)$ et $(-7, -1)$. Il existe exactement quatre matrices A qui sont éléments de S à savoir $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

3) a) $5 \times 1 - 2 \times 2 = 1$ et donc le couple $(x_0, y_0) = (1, 2)$ est une solution de l'équation proposée.

Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs.

$$5x - 2y = 1 \Leftrightarrow 5x - 2y = 5x_0 - 2y_0 \Leftrightarrow 5(x - x_0) = 2(y - y_0).$$

Si (x, y) est solution de l'équation, alors 2 divise $2(y - y_0) = 5(x - x_0)$ et de plus, 2 est premier à 5 (nombres premiers distincts). D'après le théorème de GAUSS, 2 divise $x - x_0$. Donc, il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 2k$ ou encore $x = x_0 + 2k$. De même, il existe un entier relatif k' tel que $y - y_0 = 5k'$ ou encore $y = y_0 + 5k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 2k$ et $y = y_0 + 5k'$. Alors,

$$5x - 2y = 5(x_0 + 2k) - 2(y_0 + 5k') = 5x_0 - 2y_0 + 10(k - k') = 1 + 10(k - k')$$

puis

$$5x - 2y = 1 \Leftrightarrow 1 + 10(k - k') = 1 \Leftrightarrow 10(k - k') = 0 \Leftrightarrow k = k'.$$

Les couples solutions de l'équation proposée sont les couples de la forme $(1 + 2k, 2 + 5k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Soient a et b deux entiers relatifs puis $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. $A \in S \Leftrightarrow 5a - 2b = 1$. D'après la question précédente, ceci équivaut à l'existence d'un entier relatif k tel que $a = 1 + 2k$ et $b = 2 + 5k$.

Les matrices solutions sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 + 2k & 2 + 5k \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Partie B

1) Soient a, b, c et d quatre entiers relatifs tels que $ad - bc = 1$. Soient $u = d$ et $v = -c$. u et v sont deux entiers relatifs tels que $au + bv = 1$. D'après le théorème de BÉZOUT, a et b sont premiers entre eux.

2) a)

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

D'après le résultat admis par l'énoncé, on a aussi $BA = I$.

b) Ainsi, $AB = BA = I$. Donc, A est inversible et $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

c) Les coefficients de A^{-1} sont des entiers relatifs et de plus $da - (-b)(-c) = ad - bc = 1$. Donc, A^{-1} appartient à l'ensemble S .

3) a) Soient x, y, x' et y' quatre entiers relatifs.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = dx' - by' \text{ et } y = -cx' + ay'.$$

b) Soit δ un diviseur commun à x' et y' . Alors, δ divise $dx' - by' = x$ et δ divise $-cx' + ay' = y$. δ est donc un diviseur commun à x et y .

Inversement, soit δ un diviseur commun à x et y . Alors, δ divise $ax + by = x'$ et δ divise $cx + dy = y'$. δ est donc un diviseur commun à x' et y' .

Ainsi, x et y d'une part et x' et y' d'autre part ont même ensemble de diviseurs communs. En particulier, x et y d'une part et x' et y' d'autre part ont même PGCD. Donc, $D = D'$.

4) La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est un élément de S et pour tout entier naturel n , $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $\text{PGCD}(x_n, y_n) = \text{PGCD}(x_0, y_0)$.

- Le résultat est vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $\text{PGCD}(x_n, y_n) = \text{PGCD}(x_0, y_0)$. Alors, d'après la question précédente,

$$\text{PGCD}(x_{n+1}, y_{n+1}) = \text{PGCD}(x_n, y_n) = \text{PGCD}(x_0, y_0).$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n , $\text{PGCD}(x_n, y_n) = \text{PGCD}(x_0, y_0)$.

Il reste à déterminer le PGCD de $x_0 = 2019$ et $y_0 = 673$. Mais $2019 = 3 \times 673$ et donc le PGCD de $x_0 = 2019$ et $y_0 = 673$ est 673 . Finalement,

$$\text{pour tout entier naturel } n, \text{PGCD}(x_n, y_n) = 673.$$