France métropolitaine/Réunion 2018. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

1) La largeur de la chaînette est $x - (-x) = 2x$. La hauteur de la chaînette est l'ordonnée du point M à savoir $\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x} - 2\right)$. Le problème posé équivaut à trouver $x > 0$ tel que $\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x} - 2\right) = 2x$ ou encore tel que $e^x + e^{-x} - 2 = 4x$ ou enfin tel que

$$e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0.$$

2) a) Soit $x > 0$.

$$f(x) = e^x - 4x + e^{-x} - 2 = x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) + e^{-x} - 2.$$

b) D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} - 4 = +\infty$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} - 2 = -2$. En additionnant, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

3) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = e^x + (-1)e^{-x} - 4 = e^x - e^{-x} - 4.$$

b) Soit x un réel. $e^x \neq 0$ puis

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{e^x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x}\left((e^x)^2 - 1 - 4e^x\right) = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0.$$

c) Le discriminant de l'équation $X^2 - 4X - 1 = 0$ est $\Delta = (-4)^2 - 4\times 1\times(-1) = 20 > 0$. Donc, l'équation $X^2 - 4X - 1 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions distinctes à savoir $X_1 = \frac{4-\sqrt{20}}{2} = \frac{4-2\sqrt{5}}{2} = 2-\sqrt{5}$ et $X_2 = 2+\sqrt{5}$.

Soit x un réel. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \text{le réel } e^x \text{ est solution de l'équation } X^2 - 4X - 1 = 0\\
&\Leftrightarrow e^x = 2-\sqrt{5} \text{ ou } e^x = 2+\sqrt{5}\\
&\Leftrightarrow e^x = 2+\sqrt{5} \text{ (car } e^x > 0 \text{ et } 2-\sqrt{5} < 0)\\
&\Leftrightarrow x = \ln\left(2+\sqrt{5}\right).
\end{aligned}$$

4) a) Tableau de variations de la fonction f.

x	0		$\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-2+2\sqrt{5}-4\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = e^0 + e^0 - 2 = 0$ et

$$\begin{aligned}
f\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right) &= e^{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)} + \frac{1}{e^{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}} - 4\ln\left(2+\sqrt{5}\right) - 2 = 2+\sqrt{5} + \frac{1}{2+\sqrt{5}} - 4\ln\left(2+\sqrt{5}\right) - 2\\
&= \sqrt{5} + \frac{2-\sqrt{5}}{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)} - 4\ln\left(2+\sqrt{5}\right) = \sqrt{5} + \frac{2-\sqrt{5}}{-1} - 4\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\\
&= -2+2\sqrt{5} - 4\ln\left(2+\sqrt{5}\right).
\end{aligned}$$

On note que le calcul explicite de $f\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)$ n'est pas utile pour la suite de l'exercice et que ce calcul n'était probablement pas attendu.

b) La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0, \ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right]$. On en déduit que pour x dans $\left]0, \ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right]$, on a $f(x) < f(0)$ ou encore $f(x) < 0$. En particulier, la fonction f ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]0, \ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right]$.

D'autre part, la fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\ln\left(2+\sqrt{5}\right), +\infty\right[$. On sait alors que pour tout réel k de $\left[f\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$, l'équation $f(x) = k$ a une solution et une seule dans l'intervalle $\left[\ln\left(2+\sqrt{5}\right), +\infty\right[$. Puisque $f\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, le réel 0 appartient à l'intervalle $\left[f\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$ et donc, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $\left[\ln\left(2+\sqrt{5}\right), +\infty\right[$.

Finalement, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $]0, +\infty[$.

5) a) Tableau complété

m	a	b	$b-a$
	2	3	1
2,5	2	2,5	0,5
2,25	2,25	2,5	0,25
2,375	2,375	2,5	0,125
2,4375	2,4375	2,5	0,0625

L'algorithme s'arrête alors car $b - a \leqslant 0,1$. En fin d'algorithme, les variables a et b contiennent respectivement les nombres $2,4375$ et $2,5$

b) A chaque étape de l'algorithme, on a $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$ et donc $2 \leqslant a \leqslant \alpha \leqslant b \leqslant f$ (car f est croissante sur l'intervalle $[2, 3]$). En particulier, $2,4375 \leqslant \alpha \leqslant 2,5$ avec $2,5 - 2,4375 \leqslant 0,1$. L'algorithme a fourni un encadrement de α d'amplitude au plus 10^{-1}.

6) Soit t_0 la solution strictement positive de l'équation (E'). La hauteur h cherchée, qui est aussi la largeur, est $2t_0$.

D'après la question précédente, $2,4375 \leqslant \dfrac{t_0}{39} \leqslant 2,5$ puis $2 \times 39 \times 2,4375 \leqslant 2t_0 \leqslant 2 \times 39 \times 2,5$ et finalement

$$190,125 \leqslant h \leqslant 195.$$

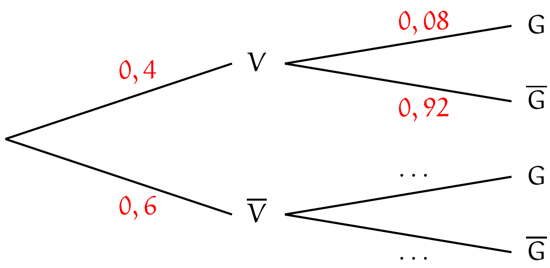
La hauteur de la Gateway Arch est comprise entre 190 et 195 mètres.

EXERCICE 2

Partie A

1) a) L'énoncé donne $P(G) = 0,2$.

b) Arbre pondéré complété.



2) La probabilité demandée est $P(V \cap G)$.

$$P(V \cap G) = P(V) \times P_V(G) = 0,4 \times 0,08 = 0,032.$$

3) Notons p la probabilité que la personne ait contracté la grippe sachant qu'elle n'est pas vaccinée ou encore posons $P_{\overline{V}}(G) = p$. D'après la formule des probabilités totales,

$$0,2 = P(G) = P(V) \times P_V(G) + P\left(\overline{V}\right) \times P_{\overline{V}}(G) = 0,032 + 0,6p$$

et donc

$$p = \frac{0,2 - 0,032}{0,6} = \frac{0,168}{0,6} = 0,28.$$

La probabilité qu'une personne non vaccinée ait contracté la grippe est égale à $0,28$.

Partie B

1) n expériences identiques et indépendantes sont effectuées. Chaque expérience a deux issues à savoir « la personne est vaccinée contre la grippe » avec une probabilité $p = 0,4$ et « la personne n'est pas vaccinée contre la grippe » avec une probabilité $1 - p = 0,6$. La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,4$.

2) a) La probabilité demandée est $P(X = 15)$ avec $P(X = 15) = \binom{40}{15} 0,4^{15} 0,6^{25}$.

La calculatrice fournit $P(X = 15) = 0,123$ arrondi à 10^{-3}.

b) La probabilité demandée est $P(X \geqslant 20)$. La calculatrice fournit $P(X \geqslant 20) = 1 - P(X \leqslant 19) = 0,130$ arrondi à 10^{-3}.

3) La variable X suit approximativement la loi normale de paramètres $\mu = 1500$ (on note que $np = 3750 \times 0,4 = 1500$) et d'écart-type $\sigma = 30$ (on note que $\sqrt{np(1-p)} = 30$).

La probabilité demandée est $P\left(-\frac{50}{3} \leqslant X \leqslant \frac{50}{3}\right) = P(1450 \leqslant X \leqslant 1550)$.

La calculatrice fournit $P(1450 \leqslant X \leqslant 1550) = 0,904$ arrondi à 10^{-3}.

EXERCICE 3

Partie A - Etude d'un cas particulier

1) a) Dans le carré $ADEH$, les côtés consécutifs $[AE]$ et $[AD]$ sont perpendiculaires et donc les droites (AE) et (AD) sont orthogonales. De même, les droites (AE) et (AB) sont orthogonales. Ainsi, la droite (AE) est orthogonale aux droites (AD) et (AB) qui sont deux droites sécantes du plan (ABD). On en déduit que la droite (AE) est perpendiculaire au plan (ABD), qui est aussi le plan (ABC), ou encore que la hauteur issue de E dans le tétraèdre $ABCE$ est la droite (AE).

De même, la droite (BC) est perpendiculaire au plan (ABE) ou encore la hauteur issue de C dans le tétraèdre $ABCE$ est la droite (BC).

b) La hauteur (AE) est contenue dans le plan (ADE) et la hauteur (BC) est contenue dans le plan (BCF). Les plans (ADE) et (BCF) sont strictement parallèles et donc, les plans (ADE) et (BCF) n'ont aucun point commun. En particulier, les hauteurs (AE) et (BC) ne sont pas concourantes.

2) a) Dans le repère considéré, le point A a pour coordonnées $(0, 0, 0)$, le point C a pour coordonnées $(1, 1, 0)$ et le point H a pour coordonnées $(0, 1, 1)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ (qui ont les mêmes coordonnées que les points C et H respectivement) ne sont pas colinéaires ou encore les points A, C et H ne sont pas alignés. Ils définissent un unique plan.

$x_A - y_A + z_A = 0 - 0 + 0 = 0$. Donc, le point A appartient au plan d'équation $x - y + z = 0$.
$x_C - y_C + z_C = 1 - 1 + 0 = 0$. Donc, le point C appartient au plan d'équation $x - y + z = 0$.
$x_H - y_H + z_H = 0 - 1 + 1 = 0$. Donc, le point H appartient au plan d'équation $x - y + z = 0$.

Donc, le plan (ACH) est le plan d'équation $x - y + z = 0$.

b) En particulier, un vecteur normal au plan (ACH) est le vecteur de coordonnées $(1, -1, 1)$. D'autre part, le point D a pour coordonnées $(0, 1, 0)$ et le point F a pour coordonnées $(1, 0, 1)$. Donc, le vecteur $\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées $(1, -1, 1)$. Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}$ et donc le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal au plan (ACH) ou encore la hauteur issue de F du tétraèdre $ACHF$ est la droite (FD).

c) De même, la hauteur issue de A du tétraèdre $ACHF$ est la droite (AG), la hauteur issue de C du tétraèdre $ACHF$ est la droite (CE) et la hauteur issue de H du tétraèdre $ACHF$ est la droite (BH).

Ainsi, les quatre hauteurs du tétraèdre $ACFH$ sont donc les quatre grandes diagonales du cube. D'après le résultat admis par l'énoncé, ces quatre hauteurs sont concourantes.

Partie B

1) a) La droite (MK) est perpendiculaire au plan (NPQ) et donc la droite (MK) est orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier, la droite (MK) est orthogonale à la droite (PQ).

b) La droite (PQ) est orthogonale aux droites (MK) et (NK) qui sont deux droites sécantes du plan (MNK). Donc, la droite (PQ) est perpendiculaire au plan (MNK).

2) Puisque la droite (PQ) est perpendiculaire au plan (MNK), la droite (PQ) est orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier, la droite (PQ) est orthogonale à la droite (MN).

Partie C

Le vecteur $\overrightarrow{RS}$ a pour coordonnées $(4, -1, -4)$ et le vecteur $\overrightarrow{TU}$ a pour coordonnées $(0, 8, -2)$.

$$\overrightarrow{RS}.\overrightarrow{TU} = 4 \times 0 + (-1) \times 8 + (-4) \times (-2) = -8 + 8 = 0.$$

Donc, les arêtes opposées $[RS]$ et $[TU]$ sont orthogonales.

Le vecteur $\overrightarrow{RT}$ a pour coordonnées $(7, -6, 3)$ et le vecteur $\overrightarrow{SU}$ a pour coordonnées $(3, 3, 5)$.

$$\overrightarrow{RT}.\overrightarrow{SU} = 7 \times 3 + (-6) \times 3 + 3 \times 5 = 21 - 18 + 15 = 18 \neq 0.$$

Donc, les arêtes opposées $[RT]$ et $[SU]$ ne sont pas orthogonales.

D'après la partie B, le tétraèdre $RSTU$ n'est pas orthocentrique.

EXERCICE 4.

Partie A

1) $1^2 - 8 \times 0^2 = 1$. Donc, le couple $(x_0, y_0) = (1, 0)$ est un couple d'entiers naturels solution de l'équation (E).

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, le couple (x_n, y_n) est un couple solution de l'équation (E).

- $(x_0, y_0) = (1, 0)$ est un couple solution de (E) d'après la première question.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que (x_n, y_n) est un couple solution de l'équation (E). Alors, $x_{n+1} = 3x_n + 8y_n$ et $y_{n+1} = x_n + 3y_n$ sont deux entiers naturels puis

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 &= (3x_n + 8y_n)^2 - 8(x_n + 3y_n)^2 = 9x_n^2 + 48x_n y_n + 64y_n^2 - 8x_n^2 - 48x_n y_n - 72y_n^2 \\ &= x_n^2 - 8y_n^2 = 1, \end{aligned}$$

et donc le couple (x_{n+1}, y_{n+1}) est un couple solution de l'équation (E).

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, le couple (x_n, y_n) est un couple solution de l'équation (E).

b) Soit n un entier naturel. $x_{n+1} = 3x_n + 8y_n$ et donc $x_{n+1} \geqslant 3x_n = x_n + 2x_n$ puis $x_{n+1} > x_n + 0$. Finalement, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} > x_n$.

3) En particulier, les nombres x_n, $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux distincts. Mais alors, les couples (x_n, y_n) constituent une infinité de couples deux à deux distincts, solutions de (E).

Partie B

1) $8 = 2^3 = 2^2 \times 2$ et $9 = 3^2$ sont deux nombres puissants inférieurs ou égaux à 10 et consécutifs.

2) On supposera les deux entiers naturels a et b non nuls, l'un d'entre eux au moins étant supérieur ou égal à 2. Donc, $n \geqslant 2$ puis n est divisible par au moins un nombre premier p.

Un nombre premier p, divisant n, apparaît dans la décomposition en facteurs premiers de a^2b^3 et apparaît donc dans la décomposition en facteurs premiers de a ou de b. Si p divise a, alors il existe un entier naturel q tel que $a = pq$. Mais alors

$$n = (pq)^2 b^3 = \left(q^2 b^3\right) p^2,$$

où de plus q^2b^3 est un entier naturel. Dans ce cas, n est divisible par p^2. Si p divise b, alors il existe un entier naturel q tel que $b = pq$. Mais alors

$$n = a^2(pq)^3 = \left(a^2 p q^3\right) p^2.$$

Dans ce cas aussi, n est divisible par p^2. Finalement, si ($a \geqslant 2$ et $b \geqslant 1$) ou ($a \geqslant 1$ et $b \geqslant 2$), alors l'entier $n = a^2b^3$ est puissant.

3) Soit (x, y) un couple de solution de (E) tel que $x \geqslant 2$ et $y \geqslant 1$ (le couple $(3, 1)$ est un tel couple). Alors, $x^2 \geqslant 4$ et en particulier, $x^2 \geqslant 2$ et $x^2 - 1 \geqslant 2$.

L'entier x^2 est un carré parfait au moins égal à 4 et en particulier, l'entier x^2 est bien sûr un entier puissant. D'autre part, l'entier $x^2 - 1$ est égal à $8y^2 = y^2 \times 2^3$. L'entier $x^2 - 1$ est donc un entier puissant d'après la question précédente.

Finalement, si (x, y) est un couple de solution de (E) tel que $x \geqslant 2$ et $y \geqslant 1$, alors les entiers x^2 et $x^2 - 1$ sont des entiers naturels consécutifs puissants.

4) Pour $n \geqslant 1$, le couple $\left(x_n^2, x_n^2 - 1\right)$ (où (x_n, y_n) est défini à la question 2 de la partie A) est un couple d'entiers consécutifs puissants. Il y en a une infinité d'après la question 3 de la partie A. Il reste à obtenir un tel couple vérifiant de plus $x_n^2 \geqslant x_n^2 - 1 \geqslant 2018$. On rappelle que $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = 3x_n + 8y_n$ et $y_{n+1} = x_n + 3y_n$. On donne dans le tableau ci-dessous les premières valeurs obtenues :

n	x_n	y_n	$x_n^2 - 1$	x_n^2
0	1	0	0	1
1	3	1	8	9
2	17	6	288	289
3	99	35	9800	9801

Les entiers 9800 et 9801 sont deux entiers consécutifs supérieurs ou égaux à 2018 et puissants. On note plus explicitement que $9800 = 2^3 \times 5^2 \times 7^2$ et $9801 = 3^4 \times 11^2$ et donc l'exposant de tout facteur premier apparaissant dans la décomposition en produit de facteurs premiers de 9800 ou de 9801 est au moins égal à 2.

