

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Spécifique

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

EXERCICE 1 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel. Avant de lancer la fabrication en série, on réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant.

Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minute.

À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de CO_2 contenu dans le local au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où f est la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle $[0; 20]$ par :

$$f(t) = (0,8t + 0,2)e^{-0,5t} + 0,03.$$

On donne ci-contre le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 20]$.

Ainsi, la valeur $f(0) = 0,23$ traduit le fait que le taux de CO_2 à l'instant 0 est égal à 23 %.

t	0	1,75	20	
$f'(t)$		+	0	-
f	0,23	↗ ↘		

1) Dans cette question, on arrondira les deux résultats au millième.

a) Calculer $f(20)$.

b) Déterminer le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience.

2) On souhaite que le taux de CO_2 dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %.

a) Justifier qu'il existe un unique instant T satisfaisant cette condition.

b) On considère l'algorithme suivant :

```
t ← 1,75
p ← 0,1
V ← 0,7
Tant que V > 0,035
    t ← t + p
    V ← (0,8t + 0,2)e-0,5t + 0,03
Fin Tant que
```

Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'algorithme?

Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice?

3) On désigne par V_m le taux moyen (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.

a) Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0; 11]$ par :

$$F(t) = (-1,6t - 3,6)e^{-0,5t} + 0,03t.$$

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; 11]$.

b) En déduire le taux moyen V_m , valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 11]$.

Arrondir le résultat au millième, soit à 0,1 %.

EXERCICE 2 (4 points)

(commun à tous les candidats)

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse inexacte ou non justifiée ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1) Un type d'oscilloscope a une durée de vie, exprimée en année, qui peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

On sait que la durée de vie moyenne de ce type d'oscilloscope est de 8 ans.

Affirmation 1 : pour un oscilloscope de ce type choisi au hasard et ayant déjà fonctionné 3 ans, la probabilité que la durée de vie soit supérieure ou égale à 10 ans, arrondie au centième, est égale à 0,42.

On rappelle que si X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , on a pour tout réel t positif : $P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

2) En 2016, en France, les forces de l'ordre ont réalisé 9,8 millions de dépistages d'alcoolémie auprès des automobilistes, et 3,1 % de ces dépistages étaient positifs.

Source : OFDT (*Observatoire Français des Drogues et des Toxicomanies*)

Dans une région donnée, le 15 juin 2016, une brigade de gendarmerie a effectué un dépistage sur 200 automobilistes.

Affirmation 2 : en arrondissant au centième, la probabilité que, sur les 200 dépistages, il y ait eu strictement plus de 5 dépistages positifs, est égale à 0,59.

3) On considère dans \mathbb{R} l'équation :

$$\ln(6x - 2) + \ln(2x - 1) = \ln(x).$$

Affirmation 3 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[$.

4) On considère dans \mathbb{C} l'équation :

$$(4z^2 - 20z + 37)(2z - 7 + 2i) = 0.$$

Affirmation 4 : les solutions de l'équation sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

EXERCICE 3 (7 points)

(Commun à tous les candidats)

Les parties A et B sont indépendantes

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

Partie A

Le détaillant constate que ses melons se vendent bien lorsque leur masse est comprise entre 900 g et 1 200 g. Dans la suite, de tels melons sont qualifiés « conformes ».

Le détaillant achète ses melons auprès de trois maraîchers, notés respectivement A, B et C.

Pour les melons du maraîcher A, on modélise la masse en gramme par une variable aléatoire M_A qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[850 ; x]$, où x est un nombre réel supérieur à 1 200.

La masse en gramme des melons du maraîcher B est modélisée par une variable aléatoire M_B qui suit une loi normale de moyenne 1 050 et d'écart-type inconnu σ .

Le maraîcher C affirme, quant à lui, que 80 % des melons de sa production sont conformes.

- 1) Le détaillant constate que 75 % des melons du maraîcher A sont conformes. Déterminer x .
- 2) Il constate que 85 % des melons fournis par le maraîcher B sont conformes.
Déterminer l'écart-type σ de la variable aléatoire M_B . En donner la valeur arrondie à l'unité.
- 3) Le détaillant doute de l'affirmation du maraîcher C. Il constate que sur 400 melons livrés par ce maraîcher au cours d'une semaine, seulement 294 sont conformes.
Le détaillant a-t-il raison de douter de l'affirmation du maraîcher C?

Partie B

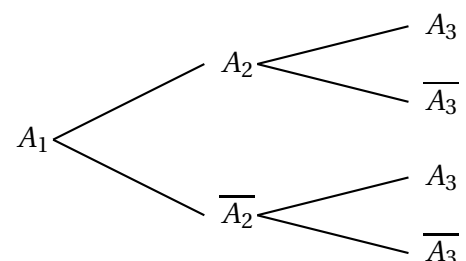
Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

- parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante;
- parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geq 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».

On a ainsi $p(A_1) = 1$.

- 1) a) Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.
- b) Démontrer que $p(A_3) = 0,85$.
- c) Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2?
Arrondir au centième.



Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geq 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

- 2) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
- 3) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $p_n > 0,8$.
- b) Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
- c) La suite (p_n) est-elle convergente?

4) On pose pour tout entier $n \geq 1$: $v_n = p_n - 0,8$.

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.

b) Exprimer v_n en fonction de n .

En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.

c) Déterminer la limite de la suite (p_n) .

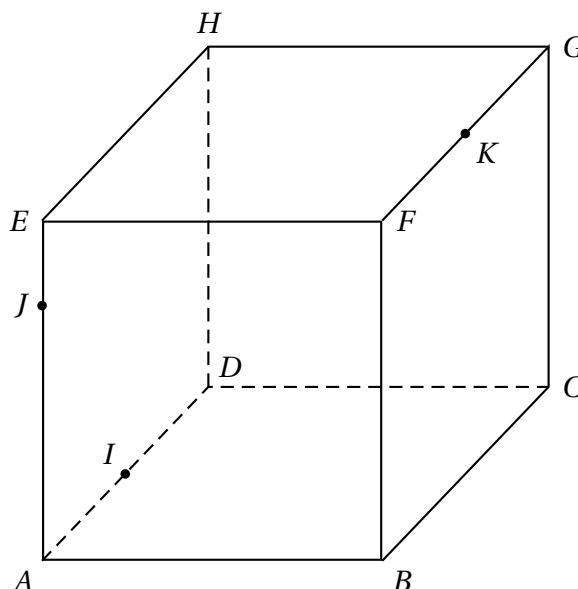
EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

La figure ci-contre représente un cube $ABCDEFGH$.

Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment $[AD]$;
- J est tel que $\vec{AJ} = \frac{3}{4}\vec{AE}$;
- K est le milieu du segment $[FG]$.



Partie A

- 1) Sur la figure donnée en annexe, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH) . On laissera les traits de construction sur la figure.
- 2) En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG) .

Partie B

On se place désormais dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

- 1) a) Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K .
b) Déterminer les réels a et b tels que le vecteur $\vec{n}(4; a; b)$ soit orthogonal aux vecteurs \vec{IJ} et \vec{IK} .
c) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $4x - 6y - 4z + 3 = 0$.
- 2) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (CG) .
b) Calculer les coordonnées du point N , intersection du plan (IJK) et de la droite (CG) .
c) Placer le point N sur la figure et construire en couleur la section du cube par le plan (IJK) .

Partie C

On note R le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK) . Le point R est donc l'unique point du plan (IJK) tel que la droite (FR) est orthogonale au plan (IJK) .

On définit l'intérieur du cube comme l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que
$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \\ 0 < z < 1 \end{cases}$$

Le point R est-il à l'intérieur du cube?

ANNEXE à rendre avec la copie

Exercice 4

