

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

L'exploitant d'une forêt communale décide d'abattre des arbres afin de les vendre, soit aux habitants, soit à des entreprises. On admet que :

- parmi les arbres abattus, 30 % sont des chênes, 50 % sont des sapins et les autres sont des arbres d'essence secondaire (ce qui signifie qu'ils sont de moindre valeur) ;
- 45,9 % des chênes et 80 % des sapins abattus sont vendus aux habitants de la commune ;
- les trois quarts des arbres d'essence secondaire abattus sont vendus à des entreprises.

Partie A

Parmi les arbres abattus, on en choisit un au hasard.

On considère les événements suivants :

- C : « l'arbre abattu est un chêne » ;
- S : « l'arbre abattu est un sapin » ;
- E : « l'arbre abattu est un arbre d'essence secondaire » ;
- H : « l'arbre abattu est vendu à un habitant de la commune ».

- 1) Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.
- 2) Calculer la probabilité que l'arbre abattu soit un chêne vendu à un habitant de la commune.
- 3) Justifier que la probabilité que l'arbre abattu soit vendu à un habitant de la commune est égale à 0,5877.
- 4) Quelle est la probabilité qu'un arbre abattu vendu à un habitant de la commune soit un sapin ?
On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} .

Partie B

Le nombre d'arbres sur un hectare de cette forêt peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance $\mu = 4\,000$ et d'écart-type $\sigma = 300$.

- 1) Déterminer la probabilité qu'il y ait entre 3 400 et 4 600 arbres sur un hectare donné de cette forêt. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} .
- 2) Calculer la probabilité qu'il y ait plus de 4 500 arbres sur un hectare donné de cette forêt.
On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} .

Partie C

L'exploitant affirme que la densité de sapins dans cette forêt communale est de 1 sapin pour 2 arbres.

Sur une parcelle, on a compté 106 sapins dans un échantillon de 200 arbres.

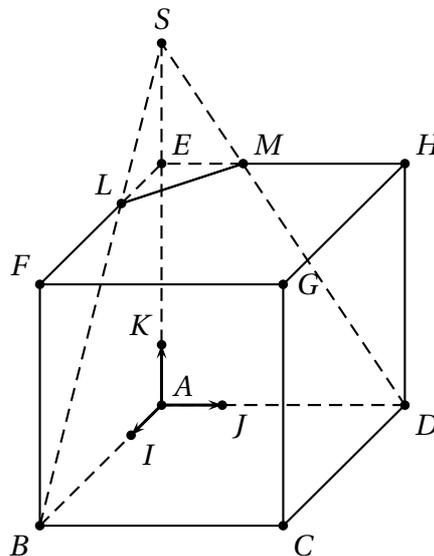
Ce résultat remet-il en cause l'affirmation de l'exploitant ?

EXERCICE 2 (5 points)

(commun à tous les candidats)

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête.

Ces deux solides sont représentés par le cube $ABCDEFGH$ et par le tétraèdre $SELM$ ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \vec{AI}, \vec{AJ}, \vec{AK})$ tel que : $I \in [AB]$, $J \in [AD]$, $K \in [AE]$ et $AI = AJ = AK = 1$, l'unité graphique représentant 1 mètre.

Les points L , M et S sont définis de la façon suivante :

- L est le point tel que $\vec{FL} = \frac{2}{3}\vec{FE}$;
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK) .

1) Démontrer, sans calcul de coordonnées, que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.

2) Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2; 0; 6)$.

3) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (BL) .

b) Vérifier que les coordonnées du point S sont $(0; 0; 9)$.

4) Soit \vec{n} le vecteur de coordonnées $(3; 3; 2)$.

a) Vérifier que \vec{n} est normal au plan (BDL) .

b) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDL) est :

$$3x + 3y + 2z - 18 = 0.$$

c) On admet que la droite (EH) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 6 \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Calculer les coordonnées du point M .

5) Calculer le volume du tétraèdre $SELM$. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

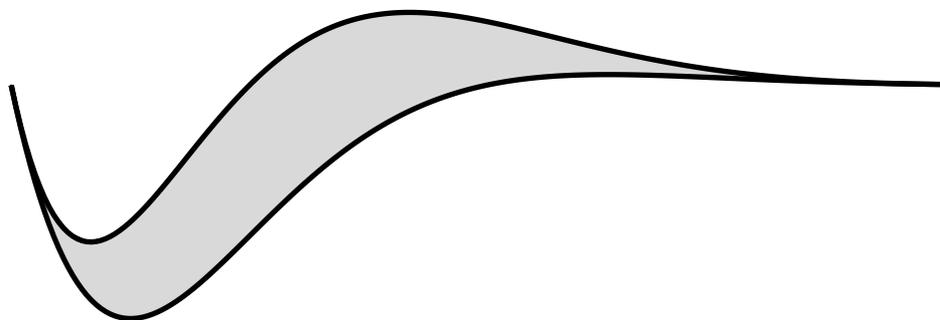
$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}.$$

6) L'artiste souhaite que la mesure de l'angle \widehat{SLE} soit comprise entre 55° et 60° . Cette contrainte d'angle est-elle respectée?

EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \text{ et } g(x) = -e^{-x} \cos x.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur \mathbb{R} .

Partie A - Etude de la fonction f

1) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}.$$

2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

3) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}(2 \cos x - 1)$ où f' est la fonction dérivée de f .

4) Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

a) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

b) En déduire les variations de f sur $[-\pi ; \pi]$.

Partie B - Aire du logo

On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées en ANNEXE.

1) Étudier la position relative de la courbe \mathcal{C}_f par rapport à la courbe \mathcal{C}_g sur \mathbb{R} .

2) Soit H la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1 \right) e^{-x}.$$

On admet que H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin x + 1)e^{-x}$ sur \mathbb{R} .

On note \mathcal{D} le domaine délimité par la courbe \mathcal{C}_f , la courbe \mathcal{C}_g et les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.

a) Hachurer le domaine \mathcal{D} sur le graphique en annexe à rendre avec la copie.

b) Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine \mathcal{D} , puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2 .

EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Le droit de pêche dans une réserve marine est réglementé : chaque pêcheur doit posséder une carte d'accréditation annuelle. Il existe deux types de cartes :

- une carte de pêche dite « libre » (le pêcheur n'est pas limité en nombre de poissons pêchés) ;
- une carte de pêche dite « avec quota » (le pêcheur ne doit pas dépasser une certaine quantité hebdomadaire de poisson).

On suppose que le nombre total de pêcheurs reste constant d'année en année.

On note, pour l'année 2017 + n :

- ℓ_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche libre ;
- q_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche avec quota.

On observe que :

- chaque année, 65 % des possesseurs de la carte de pêche libre achète de nouveaux une carte de pêche libre l'année suivante ;
- Chaque année, 45 % des possesseurs de la carte de pêche avec quota achète une carte de pêche libre l'année suivante ;
- En 2017, 40 % des pêcheurs ont acheté une carte de pêche libre. On a donc $\ell_0 = 0,4$ et $q_0 = 0,6$.

On note, pour tout entier naturel n, $P_n = \begin{pmatrix} \ell_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

- 1) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = MP_n$, où M est la matrice carrée $\begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix}$.
- 2) Calculer la proportion de pêcheurs achetant une carte de pêche avec quota en 2019.
- 3) Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1 ◦	$M := \{\{0.65, 0.45\}, \{0.35, 0.55\}\}$ $\checkmark M := \begin{pmatrix} 0.65 & 0.45 \\ 0.35 & 0.55 \end{pmatrix}$	5 ◦	TQ $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2 ◦	$P_0 := \{\{0.4\}, \{0.6\}\}$ $\checkmark P_0 := \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}$	6 ◦	QT $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3 ◦	$Q := \{\{9, 1\}, \{7, -1\}\}$ $\checkmark Q := \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$	7 ◦	$D := TMQ$ $\rightarrow D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$
4 ◦	$T := \{\{1/16, 1/16\}, \{7/16, -9/16\}\}$ $\checkmark T := \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{pmatrix}$		

En vous appuyant sur les résultats précédents, répondre aux deux questions suivantes :

- a) Justifier que Q est une matrice inversible et préciser sa matrice inverse.
On notera Q^{-1} la matrice inverse de Q.
- b) Justifier que $M = QDQ^{-1}$ et démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$M^n = QD^nQ^{-1}.$$

4) On admet que, pour tout entier naturel n non nul,

$$M^n = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 9 + 7 \times 0,2^n & 9 - 9 \times 0,2^n \\ 7 - 7 \times 0,2^n & 7 + 9 \times 0,2^n \end{pmatrix}.$$

a) Démontrer que pour tout entier naturel n , $P_n = M^n P_0$.

b) Justifier que, pour tout entier naturel n :

$$\ell_n = \frac{9}{16} - \frac{13}{80} \times 0,2^n.$$

5) La proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre dépassera-t-elle 60 % ?

ANNEXE

A compléter et à rendre avec la copie

EXERCICE 3

