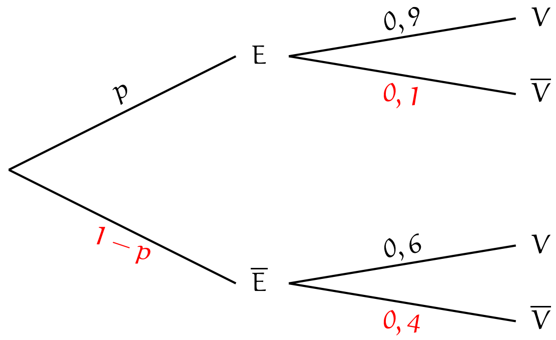
Antilles Guyane. Septembre 2017.
Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



2) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}P(V) &= P(E \cap V) + P\left(\overline{E} \cap V\right) \\ &= P(E) \times P_E(V) + P\left(\overline{E}\right) \times P_{\overline{E}}(V) = p \times 0,9 + (1-p) \times 0,6 = 0,3p + 0,6.\end{aligned}$$

3) a) L'énoncé donné $P(V) = 0,675$.

$$0,3p + 0,6 = 0,675 \Leftrightarrow 0,3p = 0,075 \Leftrightarrow p = \frac{0,075}{0,3} \Leftrightarrow p = \frac{0,75}{3} \Leftrightarrow p = 0,25.$$

b) La probabilité demandée est $P_V(E)$.

$$P_V(E) = \frac{P(E \cap V)}{P(V)} = \frac{P(E) \times P_E(V)}{P(V)} = \frac{0,25 \times 0,9}{0,3 \times 0,25 + 0,6} = \frac{0,225}{0,675} = \frac{1}{3}.$$

La probabilité que la journée soit ensoleillée sachant que Romane s'est déplacée en vélo est $\frac{1}{3}$.

Partie B

1) $\sigma_V < \sigma_C$. Donc, la courbe en trait plein, qui est plus resserée que la courbe en pointillés, est la courbe représentative de la fonction de densité de la variable T_V. μ_V est l'abscisse du sommet de cette courbe et donc $\mu_V = 14$ puis $\mu_C = 16$.

2) La probabilité demandée est $P\left(10 \leqslant T_V \leqslant 15\right)$. La calculatrice fournit $P\left(10 \leqslant T_V \leqslant 15\right) = 0,841\ 3$ arrondi à 10^{-4}.

3) La calculatrice fournit $P\left(T_V \leqslant 15\right) = 0,841\ 3$ arrondi à 10^{-4} et $P\left(T_C \leqslant 15\right) = 0,3694\ldots$ arrondi à 10^{-4}. Pour maximiser les chances d'avoir un temps de trajet d'au maximum 15 minutes, Romane doit choisir le vélo.

Partie C

1)

$$P(X \leqslant b) = \int_0^b \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^b = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda b},$$

et donc aussi $P(X \geqslant b) = P(X > b) = 1 - P(X \leqslant b) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda b}\right) = e^{-\lambda b}$.

2) a) L'énoncé donne $P(X > 50) = 0,9$.

$$P(X > 50) = 0,9 \Leftrightarrow e^{-50\lambda} = 0,9 \Leftrightarrow -50\lambda = \ln\left(\frac{9}{10}\right) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{50}\ln\left(\frac{9}{10}\right) \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{50}\ln\left(\frac{10}{9}\right).$$

b) La probabilité demandée est $P_{X \geqslant 200}(X \geqslant 250)$. On sait que la loi exponentielle de paramètre λ est une loi sans vieillissement. Donc,

$$P_{X \geqslant 200}(X \geqslant 250) = P_{X \geqslant 0}(X \geqslant 50) = P(X \geqslant 50) = 0,9.$$

EXERCICE 2

1) Soit n un entier naturel.

$$z_{\overrightarrow{OM_{n+2}}} = z_{n+2} = \frac{i}{3} z_{n+1} = \left(\frac{i}{3}\right)^2 z_n = -\frac{1}{9} z_n = -\frac{1}{9} z_{\overrightarrow{OM_n}}.$$

Mais alors,

$$\overrightarrow{OM_{n+2}} = -\frac{1}{9}\overrightarrow{OM_n}.$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{OM_n}$ et $\overrightarrow{OM_{n+2}}$ sont colinéaires et donc les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. $OM_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\frac{i}{3} z_n\right| = \frac{|i|}{3}|z_n| = \frac{1}{3} OM_n$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (OM_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $u_0 = OM_0 = |z_0| = 100$ et de raison $q = \frac{1}{3}$. On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$OM_n = OM_0 \times q^n = 100\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{100}{3^n}.$$

Puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} OM_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 100\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. En particulier, il existe un rang n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $OM_n \leqslant 1$.
n_0 est un rang à partir duquel tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.

Déterminons explicitement un tel rang. Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} OM_n \leqslant 1 &\Leftrightarrow \frac{100}{3^n} \leqslant 1 \Leftrightarrow 100 \leqslant 3^n \Leftrightarrow 3^n \geqslant 100 \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 5, \end{aligned}$$

car $3^4 < 100$, $3^5 \geqslant 100$ et car la suite $(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

A partir du rang $n_0 = 5$, tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 3

Partie A

1) D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. Donc, la courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des abscisses pour droite asymptote en $+\infty$.

2) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[1, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$ et pour $x \geqslant 1$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

3) Pour $x \geqslant 1$, $x^2 > 0$. Donc, pour $x \geqslant 1$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$. Or, $1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow x < e$ et de même, $1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$ et $1 - \ln(x) < 0 \Leftrightarrow x > e$.
La fonction f' est strictement positive sur $[1, e[$, strictement négative sur $]e, +\infty[$ et s'annule en e. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[1, e]$ et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$.

Partie B

1) $u_0 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x} \times \ln x \; dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2 = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$. Pour $x \geqslant 1$, $\ln x \geqslant 0$ et donc la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est positive sur $[1, 2]$. On en déduit que u_0 est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$ d'autre part.

2) Soit n un entier naturel. Soit $x \in [1, 2]$. Donc, $0 < 1 \leqslant x \leqslant 2$ puis $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(2)$ par croissance de la fonction $t \mapsto \ln(t)$ sur $]0, +\infty[$. En multipliant les deux membres de cette inégalité par le réel positif $\dfrac{1}{x^{n+1}}$, on obtient

$$0 \leqslant \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2).$$

3) (erreur d'énoncé : remplacer « pour tout entier naturel n » par « pour tout entier naturel non nul n »). Soit n un entier naturel non nul. Par positivité et croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \; dx \leqslant \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2) \; dx.$$

Or, $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2) \; dx = \ln(2) \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \; dx = \ln(2) \left[-\frac{1}{nx^n}\right]_1^2 = \ln(2) \left(\left(-\frac{1}{n2^n}\right) - \left(-\frac{1}{n1^n}\right)\right) = \frac{\ln(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

On a montré que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln(2)}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$.

4) Puisque pour tout entier naturel non nul n, $1 - \dfrac{1}{2^n} \leqslant 1$ et $\dfrac{\ln(2)}{n} \geqslant 0$, on en déduit encore que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln(2)}{n}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(2)}{n} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

EXERCICE 4.

1) a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-1, 0, -6)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-3, 1, -10)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors, en analysant la deuxième coordonnée de chacun de ces deux vecteurs, on a $1 = 0k$ ce qui est impossible. Donc, il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C ne sont pas alignés. On en déduit que les points A, B et C définissent un plan.

b)

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 6 \times (-1) + 8 \times 0 + (-1) \times (-6) = -6 + 6 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 6 \times (-3) + 8 \times 1 + (-1) \times (-10) = -18 + 8 + 10 = 0.$$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c) Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Le plan (ABC) est le plan passant par $A(1, 1, 14)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(6, 8, -1)$. Une équation cartésienne du plan (ABC) est $6(x-1) + 8(y-1) - (z-14) = 0$ ou encore $6x + 8y - z = 0$.

2) a) Un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(2, 1, 4)$.

b) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 2 \times 6 + 1 \times 8 + 4 \times (-1) = 16 \neq 0$. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ n'est pas orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n}$ et on sait alors que la droite Δ et le plan (ABC) sont sécants en un point.

3) Soit $M\left(t^3 + t, t + 1, 2t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (E).

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 6\left(t^3 + t\right) + 8(t+1) - (2t) = 0 \Leftrightarrow 6t^3 + 12t + 8 = 0 \Leftrightarrow 3t^3 + 6t + 4 = 0.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $f(t) = 3t^3 + 6t + 4$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée $f' : t \mapsto 9t^2 + 6$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$. On sait alors que pour tout réel k de $\left]\lim\limits_{t\to-\infty} f(t), \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\right[$, l'équation $f(t) = k$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$.

Or, $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} 3t^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} 3t^3 = +\infty$. Par suite, $\left]\lim\limits_{t\to-\infty} f(t), \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\right[=]-\infty, +\infty[$. Le réel $k = 0$ appartient à cet intervalle et on a donc montré qu'il existe un réel t et un seul tel que $f(t) = 0$ ou encore il existe un point de (E) et un seul qui appartient au plan (ABC).

