Asie 2017. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A : étude d'un cas particulier

1) La fonction C est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel positif t,

$$C'(t) = 12 \times \left(-\left(-\frac{7}{80}e^{-\frac{7}{80}t}\right)\right) = \frac{21}{20}e^{-\frac{7}{80}t}.$$

La fonction C' est strictement positive sur $[0,+\infty[$ et donc la fonction C est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

2) $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{7}{80}t} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = 12(1-0) = 12$. Le traitement de ce patient n'est pas efficace.

Partie B : étude de fonctions

1) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel strictement positif x,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 105\left(-\frac{1}{x^2}\left(1-e^{-\frac{3}{40}x}\right)+\frac{1}{x}\left(-\left(-\frac{3}{40}e^{-\frac{3}{40}x}\right)\right)\right)\\
&= 105\left(\frac{-1+e^{-\frac{3}{40}x}}{x^2}+\frac{\frac{3}{40}e^{-\frac{3}{40}x}}{x}\right) = \frac{105}{x^2}\left(-1+e^{-\frac{3}{40}x}+\frac{3}{40}xe^{-\frac{3}{40}x}\right)\\
&= \frac{105g(x)}{x^2}.
\end{aligned}$$

2) La fonction g est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ et $g(0)=0$. Donc, pour tout x de $]0,+\infty[$, $g(x)<0$. On en déduit que pour tout x de $]0,+\infty[$, $\dfrac{105g(x)}{x^2}<0$ ou encore que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)<0$. La fonction f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

3) $f(1) = 105\left(1-e^{-\frac{3}{40}}\right) = 7,7\ldots$ et donc $f(1) > 5,9$. $f(80) = \dfrac{105}{80}\left(1-e^{-6}\right) = 1,3\ldots$ et donc $f(80) < 5,9$.
f est continue et strictement décroissante sur $[1,80]$. On sait que pour tout réel k de l'intervalle $[f(80),f(1)]$, l'équation $f(x)=k$ a une solution et une seule dans l'intervalle $[1,80]$. Puisque $5,9$ appartient à l'intervalle $[f(80),f(1)]$, l'équation $f(x)=5,9$ a une solution et une seule dans l'intervalle $[1,80]$.

Si $0<x<1$,puisque f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, $f(x)>f(1)>5,9$ et en particulier, $f(x)\neq 5,9$. Si $x>80$, $f(x)<f(80)<5,9$ et en particulier, $f(x)\neq 5,9$. Ceci montre que l'équation $f(x)=5,9$ a une solution et une seule dans l'intervalle $]0,+\infty[$ et de plus cette solution, notée α, appartient à l'intervalle $[1,80]$.

La calculatrice fournit $f(8,1)=5,901\ldots$ et $f(8,2)=5,88\ldots$. Donc, $f(8,1)>5,9>f(8,2)$. Puisque f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, on en déduit que $8,1<\alpha<8,2$. Ainsi, $\alpha = 8,1$ à 10^{-1} près par défaut.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

1) a) $C(6) = \dfrac{105}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{80}\times 6}\right) = \dfrac{105}{a}\left(1-e^{-\frac{3a}{40}}\right) = f(a)$.

b) $C(6)=5,9 \Leftrightarrow f(a)=5,9 \Leftrightarrow a=\alpha$. Une valeur approchée à 10^{-1} près de la clairance est $8,1$ litres par heure.

2) $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = \dfrac{d}{a}(1-0) = \dfrac{d}{a}$. Ensuite, $\dfrac{d}{a}=15 \Leftrightarrow d=15a$. Pour un débit de $121,5$ micromoles par heure, le traitement du patient est efficace.

EXERCICE 2

1) Dans la case B3, on écrit =(A2+1)/(2*A2+4)*B2.

2) a) Il semble que pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{1}{2^n}$.

b) $v_0 = 1 \times u_0 = 1$. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$,

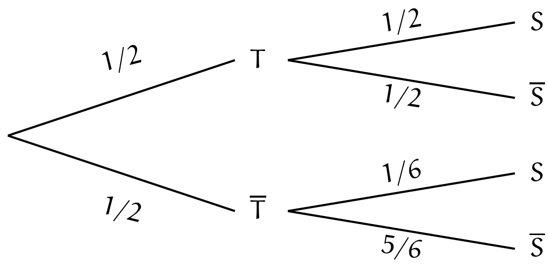
$$v_{n+1} = (n+2)u_{n+1} = (n+2) \times \frac{(n+1)}{2(n+2)}u_n = \frac{1}{2}(n+1)u_n = \frac{1}{2}v_n.$$

Ainsi, (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. On sait alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$.

3) Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{n+1}v_n$. D'une part, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. D'autre part, puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 \times 0 = 0$.

EXERCICE 3

1) On note T l'événement « on choisit le dé truqué » et S l'événement « on obtient le six ». Représentons la situation par un arbre de probabilités.



La probabilité demandée est $P_S(T)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P_S(T) = \frac{P(T) \times P_T(S)}{P(T) \times P_T(S) + P\left(\overline{T}\right) \times P_{\overline{T}}(S)} = \frac{\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{6}} = \frac{\dfrac{1}{4}}{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12}} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{3}} = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4}.$$

La probabilité que le dé soit truqué est égale à $\dfrac{3}{4}$. La proposition 1 est fausse.

2) $x_M = \text{Re}\,(z_M) = 2\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = 2 \times \dfrac{1}{2} = 1$. $z_N = \dfrac{3-i}{2+i} = \dfrac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{6-3i-2i-1}{2^2+1^2} = \dfrac{5-5i}{5} = 1-i$ et donc $x_N = \text{Re}\,(z_N) = 1$.
Les points M et N ont la même abscisse et donc la droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées. L'affirmation 2 est vraie.

3) Un vecteur directeur de la droite d est le vecteur $\vec{u}(1,0,2)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(2,-1,-1)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(6,0,-3)$.

$$\vec{u}.\overrightarrow{AB} = 1 \times 2 + 0 \times (-1) + 2 \times (-1) = 2 - 2 = 0,$$

et

$$\vec{u}.\overrightarrow{AB} = 1 \times 6 + 0 \times 0 + 2 \times (-3) = 6 - 6 = 0.$$

Le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Donc, la droite d est orthogonale aux droites (AB) et (AC) qui sont deux droites sécantes du plan (ABC). On en déduit que la droite d est orthogonale au plan (ABC). L'affirmation 3 est vraie.

4) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires iu encore les droites d et Δ ne sont pas parallèles. On en déduit que les droites d et Δ sont sécantes ou non coplanaires.

La droite Δ admet pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2u \\ y = 4 + u \\ z = 1 + 3u \end{array}\right.$. Soient alors $M(1+t, 2, 3+2t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de d et $N(1+2u, 4+u, 1+3u)$, $u \in \mathbb{R}$, un point de Δ.

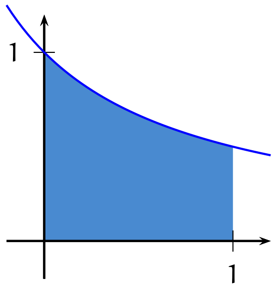
$$M = N \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1+t = 1+2u \\ 2 = 4+u \\ 3+2t = 1+3u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = -2 \\ t = 2u \\ 3+4u = 1+3u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = -2 \\ t = -4 \end{array}\right.$$

Les droites d et Δ ont donc un point commun. En particulier, les droites d et Δ sont coplanaires et la proposition 4 est fausse.

EXERCICE 4.

Partie A : valeur exacte de l'intégrale I

1) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est continue et positive sur $[0,1]$. Donc, I est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ d'une part, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part.



2) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$.

Partie B : estimation de la valeur de J

1) Algorithme complété.

Variables	n, c, f, i, x, y sont des nombres

Traitement	Lire la valeur de n
	c prend la valeur 0
	Pour i allant de 1 à n faire
	    x prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
	    y prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
	    Si $y \leqslant 1/\left(1+x^2\right)$ alors
	        c prend la valeur $c+1$
	    Fin si
	Fin pour
	f prend la valeur c/n

Sortie	Afficher f

2) Un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% de la valeur exacte de J est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,781 - \frac{1}{\sqrt{1000}}, 0,781 + \frac{1}{\sqrt{1000}}\right] = [0,749; 0,813]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

3) L'amplitude de l'intervalle est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,02 \Leftrightarrow \frac{2}{0,02} \leqslant \sqrt{n} \Leftrightarrow 100 \leqslant \sqrt{n} \Leftrightarrow n \geqslant 10\ 000.$$

La valeur minimum de n pour que l'amplitude de l'intervalle de confiance soit inférieure ou égale à $0,02$ est $10\ 000$.

EXERCICE 5.

Question préliminaire.

$$P(T \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^a = \left(-e^{-\lambda a}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda a}$$

puis

$$P(T > a) = 1 - P(T \leqslant a) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a}.$$

Partie A : étude d'un exemple

1) $P(T \geqslant 180) = P(T > 180) = e^{-\frac{1}{2800}\times 180} = 0,938$ arrondie au millième.

2) La loi exponentielle de paramètre λ est une loi sans vieillissement. Donc,

$$P_{T>180}(T > 180 + 180) = P(T > 180) = 0,938 \text{ arrondie au millième.}$$

Partie B : contrôle de la durée de vie moyenne

Ici, $n = 400$ et on fait l'hypothèse que $p = 94\%$. On note que $np = 376$ et $n(1-p) = 24$ de sorte que $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,94 - 1,96\sqrt{\frac{0,94\times 0,06}{400}}; 0,94 + 1,96\sqrt{\frac{0,94\times 0,06}{400}}\right] = [0,916; 0,964]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \dfrac{400-32}{400} = \dfrac{368}{400} = 0,92$. Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation et donc on ne peut pas remettre en cause l'affirmation du fabricant.

Partie C : dans une salle de spectacle

1) La calculatrice fournit $P(X > 445) = 0,247$ arrondie à 10^{-3}.

2) Soit a le nombre d'ampoules en stock. Le nombre d'ampoules en bon état au bout d'un an est X et donc le nombre d'ampoules défectueuses au bout d'un an est $500 - X$. Le stock est suffisant pour changer toutes les ampoules défectueuses si et seulement si $a \geqslant 500 - X$ ou encore $X \geqslant 500 - a$. Donc, on cherche a tel que $P(X \geqslant 500 - a) \geqslant 0,95$. De plus,

$$P(X \geqslant 500 - a) \geqslant 0,95 \Leftrightarrow 1 - P(X \leqslant 500 - a) \geqslant 0,95 \Leftrightarrow P(X \leqslant 500 - a) \leqslant 0,05.$$

Déterminons d'abord a tel que $P(X \leqslant 500 - a) = 0,05$. La calculatrice fournit $500 - a = 427$ arrondi à l'unité inférieure ou encore $a = 73$ arrondi à l'unité supérieure.

Donc, la taille minimale du stock pour que la probabilité de pouvoir changer toutes les lampes défectueuses, après un an, soit supérieure à 95% est 73.

