BACCALAUREAT GENERAL

Session de mai 2012

MATHEMATIQUES

- Série S -

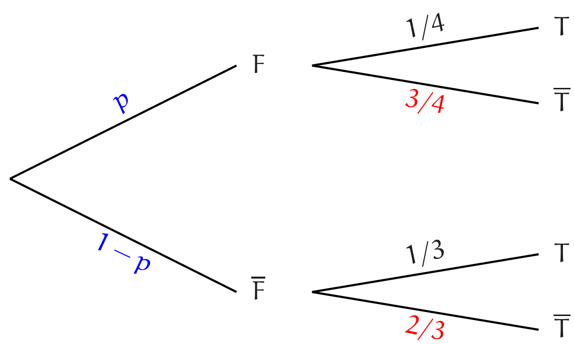
Enseignement de Spécialité

Rochambeau

EXERCICE 1

Partie A

1) L'énoncé fournit $p_F(T) = \dfrac{1}{4}$, $p_{\overline{F}}(T) = \dfrac{1}{3}$ et $p(T) = \dfrac{3}{10}$. Posons $p = p(F)$. Représentons la situation par un arbre :



La formule des probabilités totales fournit :

$$p(T) = p\left(F \cap T\right) + p\left(\overline{F} \cap T\right) = p(F) \times p_F(T) + p\left(\overline{F}\right) \times p_{\overline{F}}(T),$$

et donc $\dfrac{1}{4}p + \dfrac{1}{3}(1-p) = \dfrac{3}{10}$ puis $\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right)p = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{10}$ puis $\dfrac{p}{12} = \dfrac{1}{30}$ et finalement

$$p(F) = \frac{12}{30} = \frac{2 \times 6}{5 \times 6} = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{p(F) = \frac{2}{5}.}$$

2) La probabilité demandée est $p_T(F)$.

$$p_T(F) = \frac{p(F \cap T)}{p(T)} = \frac{p(F) \times p_F(T)}{p(T)} = \frac{\dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4}}{\dfrac{3}{10}} = \frac{1}{10} \times \frac{10}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\boxed{p_T(F) = \frac{1}{3}.}$$

Partie B

1) a) Notons Y le nombre de membres adhérant à la section tennis parmi les membres choisis. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 4 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le membre choisi adhère à la section tennis » avec une probabilité $p = \frac{3}{10}$ ou « le membre choisi n'adhère pas à la section tennis » avec une probabilité $1 - p = \frac{7}{10}$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{3}{10}$.

La probabilité demandée est $p(Y = 2)$ et on sait que

$$p(Y=2) = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{4\times 3}{2}\times\frac{3^2\times 7^2}{10^4} = \frac{2646}{10^4} = 0,2646.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remplace 4 par n et on obtient pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$p(Y=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{3}{10}\right)^k\left(\frac{7}{10}\right)^{n-k}.$$

Par suite,

$$p_n = p\,(Y \geqslant 1) = 1 - p(Y=0) = 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{3}{10}\right)^n\left(\frac{7}{10}\right)^n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
p_n \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{10}\right)^n \leqslant 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{10}{7}\right)^n \geqslant 100\\
&\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{10}{7}\right) \Leftrightarrow \ln(100) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[)\\
&\Leftrightarrow n \Leftrightarrow \frac{\ln(100)}{\ln\left(\frac{10}{7}\right)} \Leftrightarrow n \geqslant 12,9\ldots\\
&\Leftrightarrow n \geqslant 13 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

Le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geqslant 0,99$ est 13.

2) La variable aléatoire X prend trois valeurs : $35 = 40 - 5$ quand le joueur tire deux jetons gagnants, $15 = 20 - 5$ quand le joueur tire un jeton gagnant et -5 quand le joueur ne tire aucun jeton gagnant.

- La probabilité de tirer deux jetons gagnants est $\dfrac{\binom{10}{2}}{\binom{100}{2}} = \dfrac{\frac{10\times 9}{2}}{\frac{100\times 99}{2}} = \dfrac{10\times 9}{10\times 10\times 9\times 11} = \dfrac{1}{110}$.
- La probabilité de tirer un jeton gagnant est $\dfrac{\binom{10}{1}\times\binom{90}{1}}{\binom{100}{2}} = \dfrac{10\times 90}{\frac{100\times 99}{2}} = \dfrac{20}{110}$.
- La probabilité de ne tirer aucun jeton gagnant est $\dfrac{\binom{90}{2}}{\binom{100}{2}} = \dfrac{\frac{90\times 89}{2}}{\frac{100\times 99}{2}} = \dfrac{90\times 89}{100\times 99} = \dfrac{89}{110}$.

Donnons la loi de probabilité de X dans un tableau :

x_i	35	15	-5
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{110}$	$\frac{20}{110}$	$\frac{89}{110}$

b) L'espérance mathématique de X est

$$E(X) = 35 \times \frac{1}{110} + 15 \times \frac{20}{110} - 5 \times \frac{89}{110} = \frac{35 + 300 - 445}{110} = -1.$$

Le gain algébrique moyen à cette loterie est -1 €ou encore en moyenne, le joueur perd 1 euro par partie jouée. Le gain algébrique est strictement négatif et donc le jeu est défavorable au joueur.

EXERCICE 2

Partie A. Restitution organisée de connaissances

Pour $x > 0$, on pose $t = \ln(x)$ ou encore $x = e^t$ de sorte que x tend vers $+\infty$ si et seulement si t tend vers $+\infty$. On obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln\left(e^t\right)}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^t/t} = 0,$$

car $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$.

Partie B

1) Soit $x \geqslant 1$. Alors, $x^2 - 1 \geqslant 0$ et $\ln(x) \geqslant 0$ puis $g(x) \geqslant 0$.

2) a) La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[1, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$. Mais alors la fonction f est dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que différence de deux fonctions dérivables sur $[1, +\infty[$ et pour $x \geqslant 1$,

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

b) Pour tout $x \geqslant 1$, $x^2 > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. Le signe de la fonction g a été étudié à la question 1) et on en déduit que la fonction f' est positive sur $[1, +\infty[$ puis que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est croissante sur } [1, +\infty[.}$$

c) Pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) - x = -\dfrac{\ln(x)}{x}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la droite } (D) \text{ d'équation } y = x \text{ est asymptote à la courbe } (C) \text{ en } +\infty.}$$

d) Soit $x \geqslant 1$. Soient M le point de (C) d'abscisse x et N le point de (D) de même abscisse x.

$$y_M - y_N = f(x) - x = \left(x - \frac{\ln(x)}{x}\right) - x = -\frac{\ln(x)}{x}.$$

Puisque $x \geqslant 1$, $y_M - y_N$ est du signe de $-\ln(x)$. Par suite, pour tout $x > 1$, $y_M - y_N < 0$ et pour $x = 1$, $y_M - y_N = 0$. Ainsi, (C) est strictement au-dessous de (D) sur $]1, +\infty[$ et (C) et (D) se coupent au point de coordonnées $(1, 1)$.

3) a) Soit $k \geqslant 2$.

$$M_kN_k = \sqrt{\left(x_{N_k} - x_{M_k}\right)^2 + \left(y_{N_k} - y_{M_k}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{\ln k}{k}\right)^2} = \left|\frac{\ln(k)}{k}\right| = \frac{\ln(k)}{k} \text{ (car } k \geqslant 2).$$

b) Algorithme.

Variables	k est une variable du type entier
Initialisation	$k := 2$
Traitement	Tant que $\ln(k)/k > 10^{-2}$,
	Début du tant que
	Ajouter 1 à k
	FinTantQue
Sortie	Afficher k.

EXERCICE 3

Partie A

1) La fonction f est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout réel x de $[0, 1]$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. La dérivée f' de f est strictement positive sur $[0, 1]$ et donc f est strictement croissante sur $[0, 1]$.

2) a) La fonction $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Ensuite, pour tout réel x de $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $\tan(0) \leqslant \tan(x) \leqslant \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ (car la fonction tangente est croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$) ou encore $0 \leqslant \tan(x) \leqslant 1$. La fonction f étant dérivable sur $[0, 1]$, on en déduit que la fonction $g = f \circ \tan$ est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$,

$$g'(x) = \tan'(x) \times f'(\tan(x)) = (1 + \tan^2(x)) \times \frac{1}{1 + (\tan(x))^2} = 1.$$

b) La fonction g est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et pour tout x de $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $g'(x) = 1$. Par suite, il existe un réel C tel que pour tout x de $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $g(x) = x + C$. Pour $x = 0$, on obtient

$$0 + C = g(0) = f(\tan(0)) = f(0) = 0,$$

et donc $C = 0$. Ceci montre que pour tout réel x de $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $g(x) = x$. En particulier,

$$f(1) = f\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

3) Soit $x \in [0, 1]$. Puisque la fonction f est croissante sur $[0, 1]$, on a $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$ ou encore $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

Partie B

1) Pour x dans $[0, 1]$, posons $u(x) = f(x)$ et $v(x) = x$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour x dans $[0, 1]$, on a

$$\begin{array}{cc} u(x) = f(x) & v(x) = x \\ u'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2} & v'(x) = 1 \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 f(x) \times 1 \, dx = [f(x) \times x]_0^1 - \int_0^1 f'(x) \times x \, dx = [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{\pi}{4} \times f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0 \times f(0) - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln(2) - \ln(1)) \text{ } (f(0) = 0 \text{ par définition et } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ d'après la question A.2)b)}) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2). \end{aligned}$$

$$\boxed{I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2).}$$

2) a) Soit n un entier naturel non nul. D'après la question A.3), pour tout réel $x \in [0, 1]$, $f(x) \geqslant 0$. D'autre part, pour tout réel $x \in [0, 1]$, $x^n \geqslant 0$ et finalement, pour tout réel x de $[0, 1]$, $f(x) = x^n f(x) \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x) \, dx \geqslant 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n, \ I_n \geqslant 0.}$$

b) Soit n un entier naturel non nul. D'après la question A.3), pour tout réel $x \in [0, 1]$, $f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. On en déduit que pour tout réel $x \in [0, 1]$, $x^n f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4} x^n$ (car pour tout réel $x \in [0, 1]$, $x^n \geqslant 0$). Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$I_n = \int_0^1 x^n f(x)\, dx \leqslant \int_0^1 \frac{\pi}{4} x^n\, dx = \frac{\pi}{4}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} \times \frac{1^{n+1}}{n+1} = \frac{\pi}{4(n+1)}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ I_n \leqslant \frac{\pi}{4(n+1)}.}$$

c) D'après les deux questions précédentes, pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\pi}{4(n+1)}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{4(n+1)} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

EXERCICE 4

Partie A

1) L'expression complexe de S est de la forme $z' = az + b$ où a et b sont deux nombres complexes tels que $a \neq 0$. On sait que S est une similitude plane directe.

• Le rapport de S est $k = |a|$ et l'angle est $\theta = \arg(a)$ modulo 2π. Or,

$$a = 5i = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 5e^{i\pi/2}.$$

Donc $k = 5$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

• Le centre Ω de S est l'unique point invariant par S. Notons ω son affixe.

$$f(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow \omega = 5i\omega + 6i + 4 \Leftrightarrow \omega = \frac{4+6i}{1-5i} \Leftrightarrow \omega = \frac{(4+6i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)} \Leftrightarrow \omega = \frac{4+6i+20i-30}{1^2+(-5)^2}$$
$$\Leftrightarrow \omega = \frac{-26+26i}{26} \Leftrightarrow \omega = -1+i.$$

$$\boxed{S \text{ est la similitude directe de centre } \Omega(-1,1), \text{ de rapport } k=5 \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}.}$$

2) Posons $z = x + iY$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont quatre réels.

$$z' = 5iz + 6i + 4 = 5i(x+iy) + 6i + 4 = 5ix - 5y + 6i + 4 = (-5y+4) + i(5x+6).$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\boxed{\begin{cases} x' = -5y + 4 \\ y' = 5x + 6 \end{cases}.}$$

Partie B

1) a) Notons (E) l'équation considérée. Puisque $4 \times 2 + 3 \times (-1) = 8 - 3 = 5$, le couple $(a_0, b_0) = (2, -1)$ est une solution particulière de l'équation (E).

Soient a et b deux entiers relatifs.

$$4a + 3b = 5 \Leftrightarrow 4a + 3b = 4a_0 + 3b_0 \Leftrightarrow 4(a - a_0) = 3(b_0 - b). \quad (*)$$

Si le couple (a, b) est une solution de (E), alors l'entier 3 divise $3(b_0 - b) = 4(a - a_0)$. Puisque les entiers 3 et $4 = 2^2$ sont premiers entre eux (car sans facteur premier commun), le théorème de Gauss permet d'affirmer que l'entier 3 divise $a - a_0$. De même, l'entier 4 divise $b_0 - b$. Par suite, il existe deux entiers relatif k et k' tels que $a - a_0 = 3k$ ou encore $a = a_0 + 3k$ et $b_0 - b = 4k'$ ou encore $b = b_0 - 4k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $a = a_0 + 3k$ et $b = b_0 - 4k'$.

$$4a + 3b = 5 \Leftrightarrow 4(a_0 + 3k) + 3(b_0 - 4k') = 5 \Leftrightarrow 4a_0 + 3b_0 + 12(k - k') = 5 \Leftrightarrow 12(k - k') = 0 \Leftrightarrow k = k'.$$

$$\boxed{\text{Les couples } (a, b) \text{ d'entiers relatifs tels que } 4a + 3b = 5 \text{ sont les couples de la forme } (2 + 3k, -1 - 4k),\ k \in \mathbb{Z}.}$$

b) Soient x' et y' deux entiers relatifs.

$$-3x' + 4y' = 37 \Leftrightarrow -3(-5y + 4) + 4(5x + 6) = 37 \Leftrightarrow 5(4x + 3y) = 37 + 12 - 24 \Leftrightarrow 5(4x + 3y) = 25 \Leftrightarrow 4x + 3y = 5$$
$$\Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que } x = 2 + 3k \text{ et } y = -1 - 4k.$$

Soit alors k un entier relatif.

$$-3 \leqslant 2 + 3k \leqslant 5 \Leftrightarrow -5 \leqslant 3k \leqslant 3 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leqslant k \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant k \leqslant 1,$$

et

$$-3 \leqslant -1-4k \leqslant 5 \Leftrightarrow -2 \leqslant -4k \leqslant 6 \Leftrightarrow -\frac{6}{4} \leqslant k \leqslant \frac{2}{4} \Leftrightarrow -1 \leqslant k \leqslant 0.$$

En résumé, le point M de coordonnées $(2+3k, -1-4k)$ est un point de (E) si et seulement si $k=-1$ ou $k=0$.
Si $k=-1$, on obtient le point de coordonnées $(-1,3)$ et si $k=0$, on obtient le point de coordonnées $(2,-1)$.

$\boxed{\text{Il existe exactement deux points de } (E) \text{ tel que } -3x'+4y'=37 \text{ : les points de coordonnées } (-1,3) \text{ et } (2,-1).}$

2) a) $x'+y' = -5y+4+5x+6 = 5x-5y+10 = 5(x-y+2)$. Puisque $x-y+2$ est un entier relatif, ceci montre que $x'+y'$ est un multiple de 5.

b) $(x'+y')-(x'-y') = 2y'$ et donc $(x'+y')-(x'-y') \equiv 0$ (modulo 2) ou encore $x'+y' \equiv x'-y'$ (modulo 2).

Supposons que $x'^2-y'^2$ soit un multiple de 2.

Si $x'-y' \not\equiv 0$ (modulo 2) alors $x'-y' \equiv 1$ (modulo 2) puis $x'+y' \equiv 1$ (modulo 2) d'après la question précédente. Mais alors $(x'-y')(x'+y') \equiv 1\times 1$ (modulo 2) ou encore $x'^2-y'^2 \equiv 1$ (modulo 2). Ceci est une contradiction et donc $x'-y' \equiv 0$ (modulo 2) puis $x'+y' \equiv 0$ (modulo 2) puisque $x'-y'$ et $x'+y'$ sont congrus modulo 2.

c) Soit M un point de (E) tel que $x'^2-y'^2=20$. Alors, $x'=-5y+4$ et $y'=5x+6$ sont deux entiers relatifs. Ensuite, $x'^2-y'^2$ est pair et donc $x'-y'$ et $x'+y'$ sont pairs d'après la question précédente. D'autre part, $x'+y'$ est un multiple de 5 d'après la question a).
Puisque $x'+y'$ est un multiple de 2 et de 5, $x'+y'$ est un multiple du PPCM de 2 et de 5 à savoir 10. En résumé,

- $(x'-y')(x'+y')=20$
- $x'-y'$ est un entier relatif qui est un multiple de 2
- $x'+y'$ est un entier relatif qui est un multiple de 10.

Ceci ne laisse que deux possibilités : $x'-y'=2$ et $x'+y'=10$ puis $x'=\dfrac{10+2}{2}=6$ et $y'=\dfrac{10-2}{2}=4$ ou bien $x'-y'=-2$ et $x'+y'=-10$ puis $x'=\dfrac{-2-10}{2}=-6$ et $y'=\dfrac{-10+2}{2}=-4$.
Dans le premier cas, $x=\dfrac{y'-6}{5}=\dfrac{4-6}{5}=-\dfrac{2}{5}$ et x n'est pas un entier relatif.
Dans le deuxième cas, $x=\dfrac{y'-6}{5}=\dfrac{-4-6}{5}=-2$ et $y=\dfrac{4-x'}{5}=\dfrac{4+6}{5}=2$.

Réciproquement, le couple $(x,y)=(-2,2)$ est bien un élément de (E). De plus, pour ce couple (x,y), on a

$$(x',y') = (-5\times 2+4, 5\times(-2)+6) = (-6,-4)$$

puis $x'^2-y'^2=36-16=20$. Finalement,

$\boxed{\text{il existe exactement un point de } (E) \text{ tel que } x'^2-y'^2=20 \text{ : le point de coordonnées } (-2,2).}$

