BACCALAUREAT GENERAL

Session de mai 2012
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement de Spécialité
Liban

EXERCICE 1

Partie A

1) La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x}.$$

Pour tout réel $x > 0$, $g'(x)$ est strictement positif. Par suite, la fonction g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

2) • $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (2x^3 - 1) = -1$ et on sait d'autre part que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ et donc que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2\ln x = -\infty$. En additionnant, on obtient

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty.$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 - 1 = +\infty$ et on sait d'autre part que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln x = +\infty$. En additionnant, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

• La fonction g est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On sait alors que pour tout réel k de l'intervalle $\left]\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[=]-\infty, +\infty[$, l'équation $g(x) = k$ admet une solution et une seule dans $]0, +\infty[$. En particulier, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule, notée α, dans $]0, +\infty[$.

La calculatrice fournit $g(0,864) = -0,002\ldots < 0$ et $g(0,865) = 0,004\ldots > 0$. Ainsi, $g(0,864) < g(\alpha) < g(0,865)$. Puisque la fonction g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $0,864 < \alpha < 0,865$ puis que

$$\boxed{\alpha = 0,86 \text{ arrondi au centième.}}$$

3) Soit $x \in]0, +\infty[$. Si $x < \alpha$, alors $g(x) < g(\alpha)$ puisque la fonction g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ ou encore $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, alors $g(x) > g(\alpha)$ ou encore $g(x) > 0$. On a ainsi montré que

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement négative sur }]0, \alpha[\text{, strictement positive sur }]\alpha, +\infty[\text{ et s'annule en } \alpha.}$$

Partie B

1) • **Limite en 0.** On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ et que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$ puis $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\frac{\ln x}{x^2} = +\infty$. Comme d'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2x = 0$, en additionnant on obtient

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty.}$$

• **Limite en** $+\infty$**.** D'après un théorème de croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$. En retranchant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

2) • Pour tout réel $x > 0$, $f(x) - 2x = -\dfrac{\ln x}{x^2}$. D'après la question précédente, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - 2x) = 0$ et donc que

$$\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ d'équation } y = 2x \text{ est asymptote à la courbe } \mathscr{C} \text{ en } +\infty.}$$

• Soit $x > 0$. Soient M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et N le point de Δ de même abscisse x.

$$y_M - y_N = f(x) - 2x = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

- Si $x > 1$, $\ln x > 0$ et donc $y_M - y_N < 0$. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ est strictement au-dessous de la droite Δ sur $]1, +\infty[$.

- Si $x < 1$, $\ln x < 0$ et donc $y_M - y_N > 0$. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ est strictement au-dessus de la droite Δ sur $]0, 1[$.

- Enfin, si $x = 1$, $y_M = y_N = 2y_M = 2$. La courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ se coupent au point de coordonnées $(1, 2)$.

3) La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. Mais alors la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que différence de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = 2 - \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = 2 - \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} = 2 - \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = \frac{2x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} \\ &= \frac{g(x)}{x^3}. \end{aligned}$$

Comme pour tout réel $x > 0$, on a $x^3 > 0$, le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$ pour tout réel $x > 0$.

4) Le signe de la fonction g a été étudié à la question 3) de la partie A. On en déduit le tableau de variation de la fonction f :

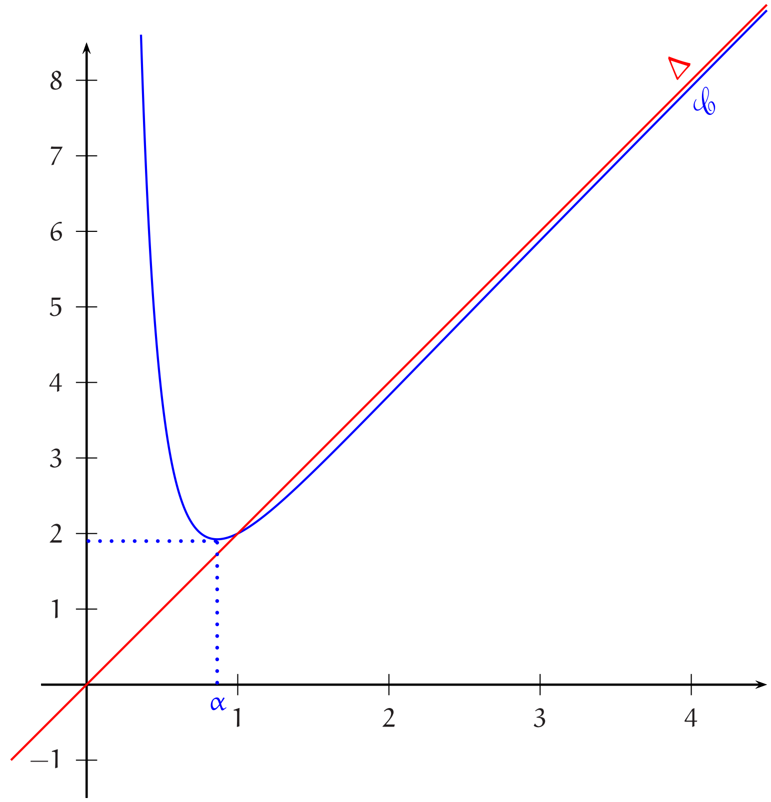
x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

5) Représentation graphique. Voir page suivante.

Partie C

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 2) de la partie B, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de la droite Δ sur $[1, +\infty[$ et en particulier sur $[1, n]$. Puisque la fonction f et la fonction $x \mapsto 2x$ sont continues sur $[1, n]$, on sait que l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine considéré est $\displaystyle\int_1^n (2x - f(x))\,dx$ ou encore $\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.
Maintenant, une unité d'aire mesure $2 \times 1 = 2$ cm^2 et donc l'aire, exprimée en cm^2, du domaine considéré est

$$I_n = 2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$$



2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour x dans $[1, n]$, posons $u(x) = \ln x$ et $v(x) = -\dfrac{1}{x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1, n]$ et pour x dans $[1, n]$, on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = \ln x & v(x) = -\dfrac{1}{x} \\ u'(x) = -\dfrac{1}{x} & v'(x) = \dfrac{1}{x^2} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[1, n]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx &= \int_1^n \ln x \times \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= \left[\ln x \times \left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^n - \int_1^n \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x}\right)\,dx = -\frac{\ln n}{n} - \left(-\frac{\ln 1}{1}\right) + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= -\frac{\ln n}{n} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = -\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{1} \\ &= 1 - \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

b) On en déduit que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ I_n = 2\left(1 - \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n}\right).}$$

3) On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et d'autre part, d'après un théorème de croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$. Par suite,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 2.}$$

EXERCICE 2

Proposition 1.	**VRAI**
Proposition 2.	**VRAI**
Proposition 3.	**FAUX**
Proposition 4.	**VRAI**

Justification 1. Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_1$ est le vecteur $\overrightarrow{u}_1$ de coordonnées $(1, 2, -1)$ et un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_2$ est le vecteur $\overrightarrow{u}_2$ de coordonnées $(5, -2, 1)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ ne sont pas colinéaires car s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u}_2 = k\overrightarrow{u}_1$ alors $k = 5$ et aussi $2k = -2$ ou encore $k = -1$ ce qui est impossible.
Donc les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas parallèles ou encore les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes (et dans ce cas coplanaires) ou non coplanaires (et dans ce cas n'ont aucun point commun).

Soient $M_1(4 + t, 6 + 2t, 4 - t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}_1$ et $M_2(8 + 5t', 2 - 2t', 6 + t')$, $t' \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}_2$.

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4 + t = 8 + 5t' \\ 6 + 2t = 2 - 2t' \\ 4 - t = 6 + t' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 4 + 5t' \\ 6 + 2(4 + 5t') = 2 - 2t' \\ 4 - (4 + 5t') = 6 + t' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 4 + 5t' \\ 12t' = -12 \\ -6t' = 6 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 4 + 5t' \\ t' = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = -1 \\ t = -1 \end{array}\right.$$

Pour $t = -1$ (ou $t' = -1$), on obtient le point de coordonnées $(3, 4, 5)$. Ainsi, le point de coordonnées $(3, 4, 5)$ appartient à la droite $\mathscr{D}_1$ et à la droite $\mathscr{D}_2$. On en déduit que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes et en particulier ces droites sont coplanaires.

L'affirmation 1 est vraie.

Justification 2. $3x_B + 2y_B - 5z_B = 3 \times 3 + 2 \times 1 - 5 \times 2 = 1$. Donc le point B appartient au plan $\mathscr{P}$.
Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(3, 2, -5)$ et le vecteur $\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées $(9, 6, -15)$. On remarque alors que $\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{n}$. Par suite, le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ ou encore la droite (AB) est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

En résumé, la droite (AB) est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ et le point B appartient au plan $\mathscr{P}$. Par suite, le point B est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

L'affirmation 2 est vraie.

Justification 3. Pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \dfrac{n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)}{n\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)} = \dfrac{1 + \dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{2}{n}}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n} = 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.
D'autre part, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n + 2} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$. Ainsi, les suites (u_n) et (v_n) convergent vers des limites différentes et en particulier ces deux suites ne sont pas adjancentes.

L'affirmation 3 est fausse.

Justification 4 Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 3$.

• $u_0 = 1 \leqslant 3$ et donc l'inégalité est vraie quand $n = 0$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \leqslant 3$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \leqslant \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3.$$

Le résultat est démontré par récurrence. La suite (u_n) est donc majorée par 3 et l'affirmation 4 est vraie.

EXERCICE 3

1) Quand l'événement J_1 est réalisé, on doit tirer une boule de l'urne U_2. Puisque l'urne U_2 contient 10 boules dont 4, sont blanches,

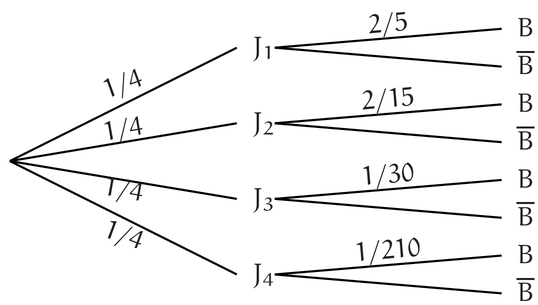
$$p_{J_1}(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Quand l'événement J_2 est réalisé, on doit tirer deux boules de l'urne U_2. Il y a $\binom{10}{2}$ tirages simultanés de 2 boules parmi les 10 de l'urne U_2 et parmi ces tirages, il y a $\binom{4}{2}$ tirages simultanés de deux boules parmi les 4 blanches. Donc

$$p_{J_2}(B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{4\times 3}{2}}{\frac{10\times 9}{2}} = \frac{4\times 3}{10\times 9} = \frac{2}{5\times 3} = \frac{2}{15}.$$

$$\boxed{p_{J_1}(B) = \frac{2}{5},\ p_{J_2}(B) = \frac{2}{15},\ p_{J_3}(B) = \frac{1}{30} \text{ et } p_{J_4}(B) = \frac{1}{210}.}$$

2) Représentons la situation par un arbre.



D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} p(B) &= p(J_1)\times p_{J_1}(B) + p(J_2)\times p_{J_2}(B) + p(J_3)\times p_{J_3}(B) + p(J_4)\times p_{J_4}(B) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{15}+\frac{1}{30}+\frac{1}{210}\right) = \frac{1}{4}\times\frac{84+28+7+1}{210} = \frac{120}{4\times 210}\frac{4\times 30}{4\times 30\times 7} = \frac{1}{7}.\end{aligned}$$

$$\boxed{p(B) = \frac{1}{7}.}$$

3) La probabilité demandée est $p_B(J_3)$.

$$p_B(J_3) = \frac{p(J_3\cap B)}{p(B)} = \frac{p(J_3)\times p_{J_3}(B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{30}}{\frac{1}{7}} = \frac{7}{120}.$$

$$\boxed{p_B(J_3) = \frac{7}{120}.}$$

4) a) La variable aléatoire N est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « toutes les boules tirées sont blanches » avec une probabilité $p = \frac{1}{7}$ (d'après la question 2)) ou « au moins une boule tirée n'est pas blanche » avec une probabilité $1 - p = \frac{6}{7}$.

La variable aléatoire N suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{7}$.

On sait alors que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 10$,

$$p(X = k) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{7}\right)^{k}\left(\frac{6}{7}\right)^{10-k}.$$

b) D'après la question précédente,

$$p(N = 3) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{7}\right)^{3}\left(\frac{6}{7}\right)^{7} = 0,118\ldots,$$

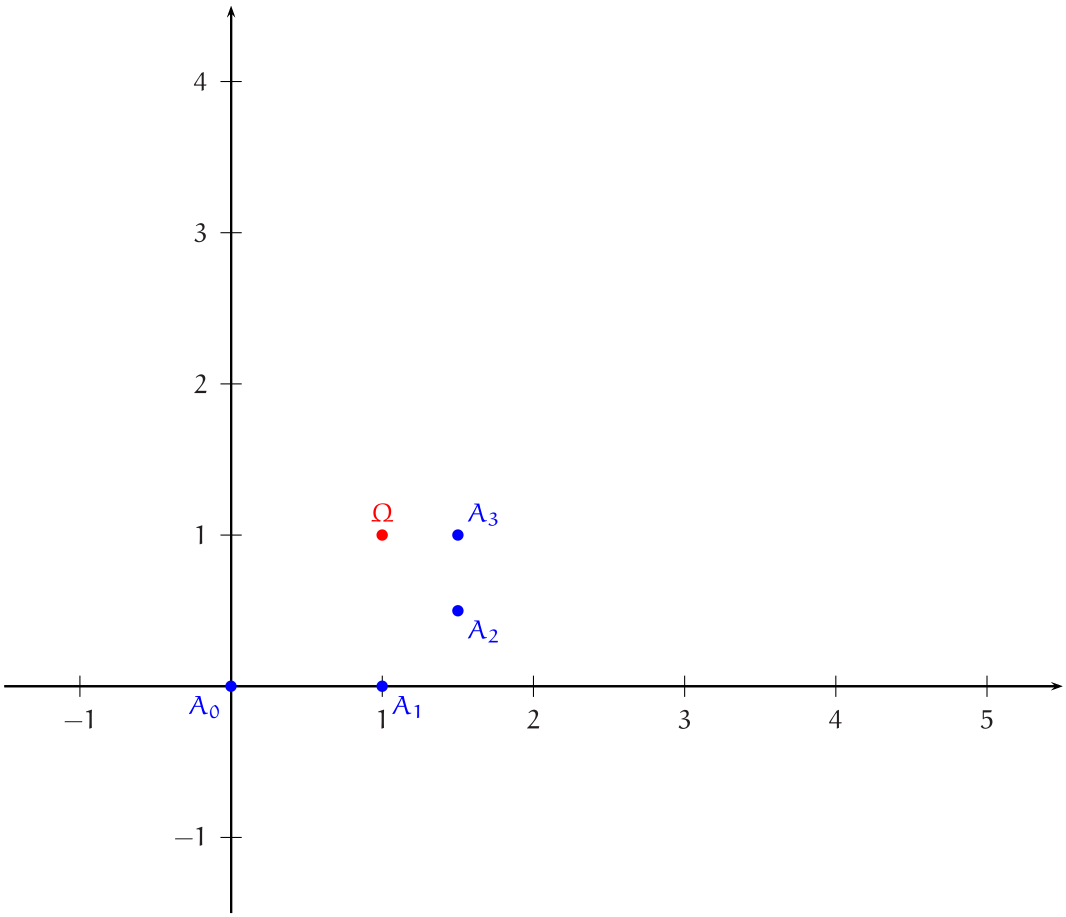
et donc

$$\boxed{p(N = 3) = 0,12 \text{ arrondi à } 10^{-2}.}$$

EXERCICE 4

1) $z_0 = 0$. $z_1 = 0 + 1 = 1$. $z_2 = \dfrac{1+i}{2} + 1 = \dfrac{3+i}{2}$ et

$$z_3 = \frac{1+i}{2} \times \frac{3+i}{2} + 1 = \frac{3+i+3i-1}{4} + 1 = \frac{3}{2} + i$$



2) a) Pour tout entier naturel n, on a $A_{n+1} = s(A_n)$ où s la transformation du plan d'expression complexe $z' = \dfrac{1+i}{2}z + 1$.
L'expression complexe de s est de la forme $z' = az + b$ où a et b sont deux nombres complexes tels que $a = \dfrac{1+i}{2} \neq 0$. On sait alors que s est la similitude directe. L'angle de s est $|a|$, l'angle de s est $\arg(a)$ modulo 2π et le centre de s l'unique point invariant par s.

• $a = \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}$ et donc

$$|a| = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \arg(a) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

• $\omega = \dfrac{1+i}{2}\omega + 1 \Leftrightarrow \left(1 - \dfrac{1+i}{2}\right)\omega = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1-i}{2}\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \dfrac{2}{1-i} \Leftrightarrow \dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} \Leftrightarrow \omega = \dfrac{\text{é}(1+i)}{1^1 + (-1)^2} \Leftrightarrow \omega = 1 + i$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = s(A_n)$ où s est la similitude directe de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de centre Ω d'affixe $\omega = 1 + i$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $A_{n+1} = s(A_n)$, on sait que $\Omega A_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Omega A_n$ et $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{\Omega A_{n+1}}\right) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$. La formule d'Al Kashi fournit

$$A_nA_{n+1}^2 = \Omega A_n^2 + \Omega A_{n+1}^2 - 2\Omega A_n \times \Omega A_{n+1} \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \Omega A_n^2 + \frac{1}{2}\Omega A_n^2 - 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega A_n^2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\Omega A_n^2,$$

et donc

$$A_nA_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega A_n = \Omega A_{n+1}.$$

Donc le triangle ΩA_nA_{n+1} est isocèle en A_{n+1}. Enfin,

$$\Omega A_{n+1}^2 + A_nA_{n+1}^2 = \frac{1}{2}\Omega A_n^2 + \frac{1}{2}\Omega A_n^2 = \Omega A_n^2,$$

et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ΩA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ le triangle } \Omega A_nA_{n+1} \text{ est isocèle rectangle en } A_{n+1}.}$$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\Omega A_{n+1} = |z_{n+1} - \omega| = \left|\frac{1+i}{2}\right| |z_n - \omega| = \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega A_n.$$

La suite $(\Omega A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$. On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$\Omega A_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \Omega A_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |\omega| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \sqrt{1^2+1^2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ le triangle } \Omega A_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\Omega A_n < 0,001 &\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} < 0,001 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} > 1000 \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\right) > \ln(1000) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow (n-1)\frac{\ln 2}{2} > 3\ln(10) \Leftrightarrow n > \frac{6\ln(10)}{\ln 2} + 1 \Leftrightarrow n > 20,9\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 21 \text{ (car } n \text{ est un entier)}.
\end{aligned}$$

A partir du rang 21, les points A_n sont situés à l'intérieur du disque de centre Ω et de rayon $0,001$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 3)a), $A_nA_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega A_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$. Par suite, puisque $\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1$.

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Puisque $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = 0$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} L_n = \frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1} = 2+\sqrt{2}.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} L_n = 2+\sqrt{2}.}$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $z_{n+1} - \omega = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4}(z_n - \omega)$ puis

$$z_{n+4} - \omega = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4}\right)^4 (z_n - \omega) = \frac{1}{4} e^{i\pi}(z_n - \omega) = -\frac{1}{4}(z_n - \omega).$$

Cette égalité s'écrit encore $\overrightarrow{\Omega A_{n+4}} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega A_n}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_{n+4}}$ et $\overrightarrow{\Omega A_n}$ sont colinéaires ou encore les points A_n, ω et A_{n+4} sont alignés.

.

