BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

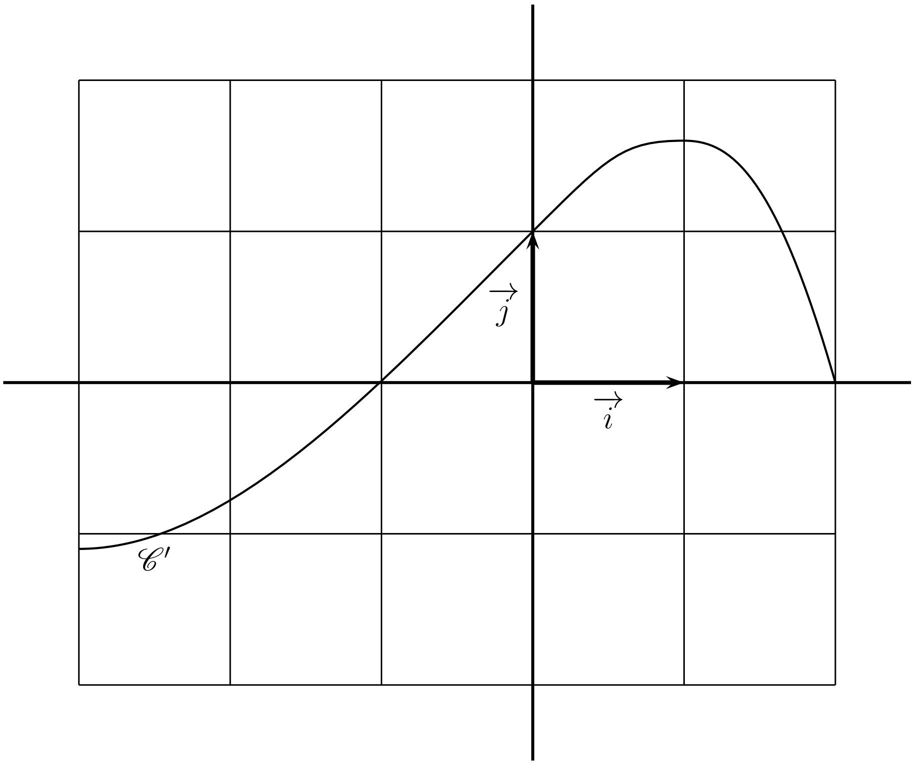
EXERCICE 1 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3, 2]$.

On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- La dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathscr{C}'$ ci-dessous.



Pour chacune des informations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leqslant 0$.

2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1, 2]$.

3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, 2]$, $f(x) \geqslant -1$.

4. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1, 0)$.

EXERCICE 2 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

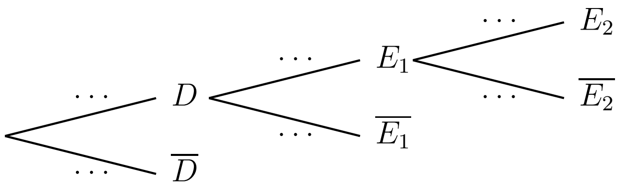
Pour embaucher ses cadres, une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40% des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70% d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25% des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.

On considère les événements suivants :

D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
E_2 : « Le candidat est recruté ».

a. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. Calculer la probabilité de l'événement E_1.

c. On note F l'événement « Le candidat n'est pas recruté ».
Démontrer que la probabilité de l'événement F est égale à $0,93$.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.
On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$?

EXERCICE 3 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln n$.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	i et n sont des entiers naturels.
	u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur le valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n.
	Affecter à u la valeur $u + \dfrac{1}{i}$.
Sortie :	Afficher u

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.

3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	1500	2000
u_n	$0,697$	$0,674$	$0,658$	$0,647$	$0,638$	$0,632$	$0,626$	$0,582$	$0,578$	$0,578$	$0,577$

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.

Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite (u_n) telle que pour tout entier strictement positif n,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$u_{n+1} - u_n = f(n).$$

où f est la fonction définie dans la partie **A**.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2. **a.** Soit k un entier strictement positif.

Justifier l'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx \geqslant 0$.

En déduire que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leqslant \frac{1}{k}$.

Démontrer l'inégalité $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k} \quad (1)$.

b. Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par 1, 2, $\ldots$, n et démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \ldots + \frac{1}{n}.$$

c. En déduire que pour tout entier strictement positif n, $\quad u_n \geqslant 0$.

3. Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -1 + i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 1 + 3i$ et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x + 2$.

1. Prouver que les points A, B et C appartiennent à la droite $\mathscr{D}$.
Sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique, placer les points A, B, C et tracer la droite $\mathscr{D}$.

2. Résoudre l'équation $(1 + i)z + 3 - i = 0$ et vérifier que la solution de cette équation est l'affixe d'un point qui n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.

Dans la suite de l'exercice, on appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z différente de $-1 + 2i$, fait correspondre le point M' d'affixe $\dfrac{1}{(1 + i)z + 3 - i}$.
Le but de l'exercice est de déterminer l'image par f de la droite $\mathscr{D}$.

3. Soit g la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M_1 d'affixe $(1 + i)z + 3 - i$.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.

b. Calculer les affixes des points A_1, B_1 et C_1, images respectives par g des points A, B et C.

c. Déterminer l'image $\mathscr{D}_1$ de la droite $\mathscr{D}$ par la transformation g et la tracer sur une figure.

4. Soit h l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, fait correspondre le point M_2 d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

a. Déterminer les affixes des points $h(A_1)$, $h(B_1)$ et $h(C_1)$ et placer ces points sur la figure.

b. Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul z, on a :

$$\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \iff |z - 2| = |z|.$$

c. En déduire que l'image par h de la droite $\mathscr{D}$ est incluse dans un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.

d. Démontrer que tout point du cercle $\mathscr{C}$ qui est distinct de O est l'image par h d'un point de la droite $\mathscr{D}_1$.

5. Déterminer l'image par l'application f de la droite $\mathscr{D}$.