BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2012
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement de Spécialité
Centres étrangers

EXERCICE 1

Partie A

1) Le point I a pour coordonnées $\left(1, \frac{1}{3}, 0\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(-1, \frac{1}{3}, 1\right)$. Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{t}{3} \\ z = t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

2) Le point K a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4}, 0, 1\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{KL}$ a pour coordonnées $\left(a - \frac{3}{4}, 1, -1\right)$. Une représentation paramétrique de la droite (KL) est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{array}\right., \ t' \in \mathbb{R}.$$

3) Soient $M\left(1 - t, \frac{1}{3} + \frac{t}{3}, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (IJ) et $M'\left(\frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right), t', 1 - t'\right)$, $t' \in \mathbb{R}$, un point de la droite (KL).

$$M = M' \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 - t = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ \frac{1}{3} + \frac{t}{3} = t' \\ t = 1 - t' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 1 - t' \\ 1 - (1 - t') = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ \frac{1}{3} + \frac{1 - t'}{3} = t' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 1 - t' \\ \frac{4t'}{3} = \frac{2}{3} \\ t' = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(a - \frac{3}{4}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}a = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \frac{3}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}a = \frac{1}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{4} \end{array}\right..$$

Si $a \neq \frac{1}{4}$, le système précedent n'a pas de solution ou encore les droites (IJ) et (KL) n'ont aucun point commun.
Si $a = \frac{1}{4}$, la résolution précédente s'écrit plus simplement $M = M' \Leftrightarrow t = t' = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, les droites (IJ) et (KL) ont en commun le point obtenu quand $t = \frac{1}{2}$ ou $t' = \frac{1}{2}$ à savoir le point Ω de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. En résumé,

$$\boxed{\text{les droites (IJ) et (KL) sont concourantes si et seulement si } a = \frac{1}{4}.}$$

Partie B

1) Le vecteur $\overrightarrow{IK}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ de même que le vecteur $\overrightarrow{LJ}$. Donc, $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{LJ}$ ou encore le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2) a) Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan IJK. Pour vérifier que le vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (IJK), il suffit de vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{IJ} = 8 \times (-1) + 9 \times \frac{1}{3} + 5 \times 1 = -8 + 3 + 5 = 0,$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{IK} = 8 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 9 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 5 \times 1 = -2 - 3 + 5 = 0.$$

Donc,

$$\boxed{\text{le vecteur } \overrightarrow{n}(8, 9, 5) \text{ est un vecteur normal au plan } (IJK).}$$

b) Le plan (IJK) est le plan passant par le point I $\left(1, \frac{1}{3}, 0\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(8, 9, 5)$. Une équation cartésienne du plan (IJK) est donc

$$8(x-1) + 9\left(y - \frac{1}{3}\right) + 5z = 0 \text{ ou encore } 8x + 9y + 5z - 11 = 0.$$

c) Puisque $M \in (BF)$, les coordonnées de M sont de la forme $(1, 0, z_M)$. Puis

$$M \in (IJK) \Leftrightarrow 8 \times 1 + 9 \times 0 + 5z_M - 11 = 0 \Leftrightarrow z_M = \frac{3}{5}.$$

Puisque $N \in (DH)$, les coordonnées de M sont de la forme $(0, 1, z_N)$. Puis

$$N \in (IJK) \Leftrightarrow 8 \times 0 + 9 \times 1 + 5z_M - 11 = 0 \Leftrightarrow z_N = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{M\left(1, 0, \frac{3}{5}\right) \text{ et } N\left(0, 1, \frac{2}{5}\right).}$$

EXERCICE 2

1) a) La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$G'(x) = \frac{1}{2} \times \left(x^2\right)' e^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2} = xe^{x^2} = g(x).$$

Donc la fonction G est une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

b) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^1 - \frac{1}{2}e^0 = \frac{e-1}{2}.$

$$\boxed{I_1 = \frac{e-1}{2}.}$$

c) Soit n un entier naturel non nul. $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^1 x^{n+2}e^{x^2}\,dx = \int_0^1 x^{n+1} \times xe^{x^2}\,dx.$

Pour x dans $[0,1]$, posons $u(x) = x^{n+1}$ et $v(x) = \dfrac{1}{2}e^{x^2}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,1]$ et pour x dans $[0,1]$, on a

$$u(x) = x^{n+1} \qquad v(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$$
$$u'(x) = (n+1)x^n \qquad v'(x) = xe^{x^2}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+1} \times xe^{x^2}\,dx = \left[x^{n+1} \times \frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n \times \frac{1}{2}e^{x^2}\,dx = 1^{n+1} \times \frac{1}{2}e^1 - 0 \times \frac{1}{2}e^0 - \frac{n+1}{2}\int_0^1 x^n e^{x^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n.$$

d) $I_3 = \dfrac{e}{2} - \dfrac{1+1}{2}I_1 = \dfrac{e}{2} - \dfrac{e-1}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $I_5 = \dfrac{e}{2} - \dfrac{3+1}{2}I_3 = \dfrac{e}{2} - 2 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{e-2}{2}.$

$$\boxed{I_3 = \frac{1}{2} \text{ et } I_5 = \frac{e-2}{2}.}$$

2) n prend sucessivement les valeurs $1, 3, 5, \ldots, 19$.

- Quand $n = 1$, $u = I_1$ puis, comme $1 < 21$, $u = \dfrac{1}{2}e - \dfrac{1+1}{2}I_1 = I_3$ puis $n = 3$.
- Puisque $n = 3 < 21$, $u = \dfrac{1}{2}e - \dfrac{3+1}{2}I_3 = I_5$ puis $n = 5$.

$\vdots$

- Puisque $n = 17 < 21$, $u = \dfrac{1}{2}e - \dfrac{17+1}{2}I_{17} = I_{19}$ puis $n = 19$.
- Puisque $n = 19 < 21$, $u = \dfrac{1}{2}e - \dfrac{19+1}{2}I_{19} = I_{21}$ puis $n = 21$ et l'algorithme s'arrête.

Finalement, en sortie, on obtient I_{21}.

3) a) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0,1]$, $x^n e^{x^2} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 x^n e^{x^2}\,dx \geqslant 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ I_n \geqslant 0.}$$

b) Soit n un entier naturel non nul.

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^1 x^n e^{x^2}\,dx - \int_0^1 x^{n+1}e^{x^2}\,dx = \int_0^1 \left(x^n e^{x^2} - x^{n+1}e^{x^2}\right)dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)}$$
$$= \int_0^1 x^n(1-x)e^{x^2}\,dx.$$

Or, pour tout réel x de $[0,1]$, $x^n(1-x)e^{x^2}\ dx \geqslant 0$ et donc $\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)e^{x^2}\ dx \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale ou encore $I_n - I_{n+1} \geqslant 0$.

On a montré que pour tout entier naturel non nul n $I_n - I_{n+1} \geqslant 0$ ou encore pour tout entier naturel non nul n $I_{n+1} \leqslant I_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ est décroissante.}}$$

c) La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite (I_n) est convergente vers un réel ℓ positif ou nul.

4) Supposons $\ell > 0$. D'après la question 1)c), pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3, $I_n = \dfrac{e}{2} - \dfrac{n-1}{2} I_{n-2}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n-2} = \ell > 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{2} I_{n-2} = +\infty$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e}{2} - \dfrac{n-1}{2} I_{n-2} = -\infty$. Ceci est une contradiction et donc $\ell = 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

EXERCICE 3

Partie A : conjecture graphique

Il semblerait d'après le graphique que l'équation $h(x) = 0$ admette une solution et une seule et que cette solution appartient à $[0, 1]$.

Partie B

1) a) Pour tout réel x, $x^2 + x^3 = x^2(x+1)$. Par suite, pour tout réel x de $]-\infty, -1[$, $x^2 + x^3 < 0$ puis pour tout réel x de $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, $x^2 + x^3 > 0$ et enfin pour $x \in \{-1, 0\}$, $x^2 + x^3 = 0$.

b) Soit x un réel de $]-\infty, -1]$. $e^x > 0$ et $3(x^2 + x^3) \leqslant 0$ et en particulier $e^x \neq 3(x^2 + x^3)$. Finalement

$$\boxed{\text{l'équation (E) n'a pas de solution dans }]-\infty, -1].}$$

c) $e^0 = 1 \neq 0 = 3(0^2 + 0^3)$. Donc 0 n'est pas solution de l'équation (E).

2) Soit $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$. Alors $x^2 + x^3 > 0$ puis

$$e^x = 3(x^2 + x^3) \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln\left(3(x^2 + x^3)\right) \Leftrightarrow x = \ln(3x^2(1 + x)) \Leftrightarrow x = \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1 + x)$$
$$\Leftrightarrow \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1 + x) - x = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0.$$

3) a) Pour tout réel x de $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$,

$$h'(x) = 0 + \frac{(x^2)'}{x^2} + \frac{(x+1)'}{x+1} - 1 = \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{2(x+1) + x - x(x+1)}{x(x+1)}$$
$$= \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}.$$

b) Le discriminant du trinôme $-x^2 + 2x + 2$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 12$. Le trinôme $-x^2 + 2x + 2$ admet donc deux racines, les deux nombres $x_1 = \dfrac{-2 + \sqrt{12}}{-2} = \dfrac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{3}$.
On note que $x_1 = -0,7\ldots$ et $x_2 = 2,7\ldots$ de sorte que $-1 < x_1 < 0 < x_2$. Le signe d'un trinôme du second degré étant connu, on peut étudier le signe de $h'(x)$ dans un tableau de signes :

x	-1		$1-\sqrt{3}$		0		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$-x^2+2x+2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	

On en déduit encore le tableau de variations de la fonction h :

x	-1		$1-\sqrt{3}$		0		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	
h		$\nearrow$	< 0	$\searrow$	||	$\nearrow$	>0	$\searrow$	

La calculatrice fournit $h(1 - \sqrt{3}) = -0,1\ldots < 0$ et $h(1 + \sqrt{3}) = 3,4\ldots > 0$.

c) Sur l'intervalle $]-1, 0[$, la fonction h admet un maximum strictement négatif. Par suite, pour tout réel x de $]-1, 0[$, $h(x) < 0$ et en particulier pour tout réel x de $]-1, 0[$, $h(x) \neq 0$.

La calculatrice fournit encore $h(0,5) = -0,3\ldots < 0$. Comme la fonction h est strictement croissante sur $]0; 0,5]$, on en déduit que pour tout réel x de $]0; 0,5]$, $h(x) < 0$ et en particulier, pour tout réel x de $]0; 0,5]$, $h(x) \neq 0$.
D'autre part, la fonction h est continue et strictement croissante sur $[0,5; 1 + \sqrt{3}]$. On sait alors que pour tout réel k de $[h(0,5), h(1 + \sqrt{3})]$, l'équation $h(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[0,5; 1 + \sqrt{3}]$. Comme $h(0,5) < 0$ et $h(1 + \sqrt{3}) > 0$, le réel 0 appartient à l'intervalle $[h(0,5), h(1 + \sqrt{3})]$ et donc l'équation $h(x) = 0$ admet une solution et une seule, notée α, dans $[0,5; 1 + \sqrt{3}]$. La calculatrice fournit $h(-0,615) = -0,009\ldots < 0$ et $h(0,62) = 0,004\ldots > 0$. Donc $0,615 < \alpha < 0,62$ puis $\alpha = 0,62$ arrondi au centième.

De même, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution et une seule, notée β, dans $[1 + \sqrt{3}, +\infty[$. La calculatrice fournit $h(7,115) = 0,001\ldots > 0$ et $h(1,12) = -0,001\ldots < 0$. Donc $7,115 < \beta < 7,12$ puis $\beta = 7,12$ arrondi au centième.

L'équation $h(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β
avec $\alpha = 0,62$ arrondi au centième et $\beta = 7,12$ arrondi au centième.

d) La conjecture émise dans la partie A était donc fausse. La solution β n'apparaissait pas sur le graphique fourni. Néanmoins cette solution était prévisible car un théorème de croissances comparées montre que le graphe de la fonction $x \mapsto e^x$ est au-dessus du graphe de la fonction $x \mapsto 3(x^2 + x^3)$ quand le réel positif x est grand et donc le graphe de la fonction $x \mapsto e^x$ devait recouper au moins une fois le graphe de la fonction $x \mapsto 3(x^2 + x^3)$.

EXERCICE 4

1)	**VRAI**
2)	**VRAI**
3)	**FAUX**
4)	**VRAI**
5)	**VRAI**

1) $3\times 9 - 2\times 13 = 27 - 26 = 1$ et donc le couple $(x_0, y_0) = (9, 13)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E).

Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs.

$$3x - 2y = 1 \Leftrightarrow 3x - 2y = 3x_0 - 2y_0 \Leftrightarrow 3(x - x_0) = 2(y - y_0).$$

Ainsi, si (x, y) est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E), alors l'entier 2 divise $2(y - y_0) = 3(x - x_0)$ et puisque 2 et 3 sont des entiers premiers entre eux (car 2 et 3 sont deux nombres premiers distincts), le théorème de Gauss permet d'affirmer que 2 divise $x - x_0$. Par suite, il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 2k$ ou encore $x = x_0 + 2k$. De même, l'entier 3 divise $y - y_0$ et donc il existe un entier relatif k' tel que $y - y_0 = 3k'$ ou encore $y = y_0 + 3k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 2k$ et $y = y_0 + 3k'$.

$$3x - 2y = 1 \Leftrightarrow 3(x_0 + 2k) - 2(y_0 + 3k') = 1 \Leftrightarrow 6(k - k') = 0 \Leftrightarrow k = k'.$$

Finalement, les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) sont les couples de la forme $(9 + 2k, 13 + 3k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Donc l'affirmation 1 est vraie.

2) Soit n un entier naturel. Le PGCD de a et b divise encore $3b - 2a = 3(2n + 3) - 2(3n + 1) = 7$ et donc le PGCD de a et b est 1 ou 7. Plus précisément,

$$\begin{aligned}\text{PGCD}(a, b) &= \text{PGCD}(3n + 1, 2n + 3) = \text{PGCD}((3n + 1) - (2n + 3), 2n + 3) = \text{PGCD}(2n + 3, n - 2)\\ &= \text{PGCD}((2n + 3) - 2(n - 2), n - 2) = \text{PGCD}(7, n - 2).\end{aligned}$$

Ensuite, $\text{PGCD}(7, n-2) = 7$ si et seulement si $n-2$ est divisible par 7 ou encore n est congru à 2 modulo 7. L'affirmation 2 est vraie.

3) Pour $n = 0$ par exemple, $0 + 17 = 17 > 2 = 2\times 0 + 2 = b$ et donc $n + 17$ n'est pas le reste de la division euclidienne de a par b. L'affirmation 3 est fausse.

4) s^{-1} est la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$. L'expression complexe de s^{-1} est

$$\begin{aligned}z' &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/4}(z - 3 - 4i) + 3 + 4i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(z - 3 - 4i) + 3 + 4i = \frac{1-i}{2}(z - 3 - 4i) + 3 + 4i\\ &= \frac{1-i}{2}z - \frac{(1-i)(3+4i)}{2} + 3 + 4i = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3 - 4i + 3i - 4 + 6 + 8i}{2} = \frac{1-i}{2}z + \frac{-1+7i}{2}\end{aligned}$$

L'affirmation 4 est vraie.

5) Puisque $A \neq B$ et $C \neq D$, il existe une similitude directe et une seule s telle que $s(A) = C$ et $s(B) = D$. L'angle θ de s est $\theta = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right)$ $[2\pi]$. Or,

$$\begin{aligned}\frac{d-c}{b-a} &= \frac{4 + \sqrt{3} + 4i\sqrt{3} - 1 + 2\sqrt{3} - i(3 + \sqrt{3})}{4 - i - 1 - 2i} = \frac{3 + 3\sqrt{3} + i(-3 + 3\sqrt{3})}{3 - 3i} = \frac{1 + \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3})}{1 - i}\\ &= \frac{\left(1 + \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3})\right)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + i\left(-1 + \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3}\right)}{1^2 + (-1)^2} = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{2}\\ &= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\pi/3}.\end{aligned}$$

Par suite, $\theta = \arg\left(2e^{i\pi/3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$. L'affirmation 5 est vraie.

