BACCALAUREAT GENERAL

Session d'avril 2012
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement Obligatoire
Pondichéry

EXERCICE 1

Partie A

1) Le nombre de groupes différents de 5 coureurs est encore le nombre de tirages simultanés de 5 numéros de dossards parmi 50 numéros. Ce nombre est

$$\binom{50}{5} = \frac{50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 10 \times 49 \times 2 \times 47 \times 46 = 2\ 118\ 760.$$

2) (a) L'algorithme démarre avec 5 nombres égaux à 0 puis, tant que les 5 nombres ne sont pas deux à deux distincts, il génère 5 nombres au hasard entre 1 et 50. L'algorithme s'arrête quand les 5 nombres générés sont deux à deux distincts. Par suite, l'algorithme peut fournir les ensembles L_2 et L_4 mais pas les ensembles L_1 et L_3.

(b) L'algorithme permet de tirer au sort 5 coureurs parmi les 50 pour subir un contrôle anti-dopage.

3) Il y a 50 choix possibles de 1 coureur parmi 50 et 5 choix de 1 coureur parmi les 5 qui subissent un contrôle. La probabilité qu'un coureur subisse un contrôle est donc

$$p = \frac{5}{50} = 0,1.$$

4) (a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,
- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le coureur subit un contrôle » avec une probabilité $p = 0,1$ ou « le coureur ne subit pas de contrôle » avec une probabilité $1 - p = 0,9$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,1$.

On sait alors que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 10$,

$$p(X = k) = \binom{10}{k}(0,1)^k(0,9)^{10-k}.$$

(b) • $p(X = 5) = \binom{10}{5}(0,1)^5(0,9)^5 = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}(0,09)^5 = 3 \times 2 \times 7 \times 6 \times (0,09)^5 = 0,0015$ arrondie au dix millième.

> La probabilité que le coureur soit contrôlé 5 fois exactement est $0,0015$ arrondie au dix millième.

• $p(X = 0) = \binom{10}{0}(0,1)^0(0,9)^{10} = (0,9)^{10} = 0,3487$ arrondie au dix millième.

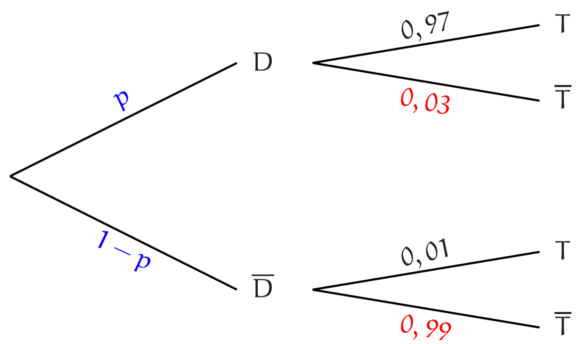
> La probabilité que le coureur ne soit pas contrôlé est $0,3487$ arrondie au dix millième.

• $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (0,9)^{10} = 0,6513$ arrondie au dix millième.

> La probabilité que le coureur soit contrôlé au moins une fois est $0,6513$ arrondie au dix millième.

Partie B

1) L'énoncé fournit $p(T) = 0,05$, $p_D(T) = 0,97$ et $p_{\overline{D}}(T) = 0,01$. Posons $p(D) = p$. Représentons la situation par un arbre :



La formule des probabilités totales fournit :

$$p(T) = p\,(D \cap T) + p\,\left(\overline{D} \cap T\right) = p(D) \times p_D(T) + p\,\left(\overline{D}\right) \times p_{\overline{D}}(T),$$

et donc $0,97p + 0,01(1-p) = 0,05$ puis $0,96p = 0,04$ et finalement

$$p(D) = \frac{0,04}{0,96} = \frac{4}{96} = \frac{1}{24}.$$

$$\boxed{p(D) = \frac{1}{24}.}$$

2) La probabilité demandée est $p_T\left(\overline{D}\right)$.

$$p_T\left(\overline{D}\right) = \frac{p(T \cap \overline{D})}{p(T)} = \frac{p\left(\overline{D}\right) \times p_{\overline{D}}(T)}{p(T)} = \frac{\left(1 - \dfrac{1}{24}\right) \times \dfrac{1}{100}}{\dfrac{5}{100}} = \frac{23}{24} \times \frac{1}{100} \times \frac{100}{5} = \frac{23}{120}.$$

$$\boxed{p_T\left(\overline{D}\right) = \frac{23}{120}.}$$

EXERCICE 2

Proposition 1. **VRAI**

Proposition 2. **FAUX**

Proposition 3. **VRAI**

Proposition 4. **VRAI**

Justification 1 Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(-2, 2, 2)$. Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1, -1, -1)$. On remarque que $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{n}$ et en particulier $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}$. On en déduit que la droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$. La proposition 1 est vraie.

Justification 2 La distance du centre O de la sphère $\mathscr{S}$ au plan $\mathscr{P}$ est

$$d = \frac{|0 - 0 - 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

La distance d n'est pas égale au rayon de la sphère $\mathscr{S}$ et donc la sphère $\mathscr{S}$ n'est pas tangente au plan $\mathscr{P}$. La proposition 2 est fausse.

Justification 3 Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$ est le vecteur $\overrightarrow{n}'$ de coordonnées $(1, 1, 3)$. Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ ne sont pas colinéaires car s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{n}' = k\overrightarrow{n}$ alors $k = 1$ et aussi $k = -1$ ce qui est impossible.
On en déduit que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas parallèles et donc que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants en une droite Δ.

Notons Δ' la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 1 - t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = t' \end{array}\right.$, $t' \in \mathbb{R}$.

Pour tout réel t',

$$(1 - t') - (-1 - 2t') - (t') - 2 = 0 \text{ et } (1 - t') + (-1 - 2t') + 3(t') = 0.$$

Donc tout point de la droite Δ' appartient au plan $\mathscr{P}$ et au plan $\mathscr{P}'$ ou encore la droite Δ' est contenue dans le plan $\mathscr{P}$ et dans le plan $\mathscr{P}'$. Finalement, Δ' est la droite Δ d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ou encore un système d'équations paramétriques de Δ est $\left\{\begin{array}{l} x = 1 - t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = t' \end{array}\right.$, $t' \in \mathbb{R}$. La proposition 3 est vraie.

Justification 4 Un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\overrightarrow{u}'$ de coordonnées $(-1, -2, 1)$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ ne sont pas colinéaires et donc les droites $\mathscr{D}$ et Δ ne sont pas parallèles. On en déduit que les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont sécantes ou non coplanaires.

Déterminons alors l'intersection de $\mathscr{D}$ et Δ. Soient $M(-3 - 2t, 2t, 1 + 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$ et $M'(1 - t', -1 - 2t', t')$, $t' \in \mathbb{R}$, un point de Δ.

$$M = M' \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3 - 2t = 1 - t' \\ 2t = -1 - 2t' \\ 1 + 2t = t' \ (*) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = 1 + 2t \ (*) \\ -3 - 2t = 1 - (1 + 2t) \\ 2t = -1 - 2(1 + 2t) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = 1 + 2t \\ -3 = 0 \\ 2t = -1 - 2(1 + 2t) \end{array}\right.$$

Ce système n'a pas de solution et donc $\mathscr{D}$ et Δ n'ont aucun point commun. Finalement, les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont non coplanaires. La proposition 4 est vraie.

EXERCICE 3

1) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est continue et positive sur $[0,1]$. Donc, I_n est l'aire du domaine du plan $\mathscr{D}_n$ délimité par les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$ d'une part, l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction f_n d'autre part.

Il semble que pour chaque entier naturel n, le graphe de f_n soit au-dessus du graphe de f_{n+1} sur $[0,1]$ et donc que l'aire du domaine $\mathscr{D}_n$ soit plus grande que l'aire du domaine $\mathscr{D}_{n+1}$. En résumé, il semble que pour tout entier naturel n, $I_{n+1} \leqslant I_n$ ou encore, il semble que la suite (I_n) soit décroissante.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} I_n - I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\,dx - \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{e^{-nx}}{1+x} - \frac{e^{-(n+1)x}}{1+x}\right)dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-nx} - e^{-(n+1)x}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1-e^{-x})}{1+x}\,dx. \end{aligned}$$

Soit $x \in [0,1]$. On a $e^{-nx} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{1+x} \geqslant 0$. Ensuite, $-x \leqslant 0$ et donc $e^{-x} \leqslant 1$ puis $1-e^{-x} \geqslant 0$. Finalement,

$$\frac{e^{-nx}(1-e^{-x})}{1+x} \geqslant 0.$$

Ainsi, pour tout réel x de $[0,1]$, $\dfrac{e^{-nx}(1-e^{-x})}{1+x} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}(1-e^{-x})}{1+x}\,dx \geqslant 0$ ou encore que $I_n - I_{n+1} \geqslant 0$ ou enfin que $I_{n+1} \leqslant I_n$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $I_{n+1} \leqslant I_n$ et donc que

$$\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ est décroissante.}}$$

2) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0,1]$. Alors $1+x \geqslant 1$ puis $\dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$. En multipliant les membres de cette inégalité par le réel positif e^{-nx}, on obtient

$$\frac{e^{-nx}}{1+x} \leqslant e^{-nx}.$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité $\dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$ par le réel positif $\dfrac{e^{-nx}}{1+x}$, on obtient aussi

$$\frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{e^{-nx}}{1+x}.$$

Enfin, $\dfrac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \geqslant 0$ et on a montré que

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in [0,1],\ 0 \leqslant \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{e^{-nx}}{1+x} \leqslant e^{-nx}.}$$

(b) D'après la question précédente et par positivité et croissance de l'intégrale, pour tout entier naturel n on a

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\,dx \leqslant \int_0^1 e^{-nx}\,dx. \quad (*)$$

Mais pour tout entier naturel non nul n,

$$\int_0^1 e^{-nx}\,dx = \left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^1 = \frac{e^{-n}}{-n} - \frac{1}{-n} = \frac{1-e^{-n}}{n}.$$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ et d'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}(1-e^{-n}) = 0 \times (1-0) = 0$.

Les inégalités $(*)$ montrent que pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n}(1-e^{-n})$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que la suite (I_n) converge et que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

Les inégalités $(*)$ montrent aussi que pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leqslant J_n \leqslant I_n$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que la suite (J_n) converge et que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0.}$$

3) (a) Soit $n \geqslant 1$. Pour x dans $[0,1]$, posons $u(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $v(x) = \dfrac{e^{-nx}}{-n}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,1]$ et pour x dans $[0,1]$, on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = \dfrac{1}{1+x} & \quad v(x) = \dfrac{e^{-nx}}{-n} \\ u'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} & \quad v'(x) = e^{-nx} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} \times e^{-nx}\, dx = \left[\frac{1}{1+x} \times \frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-1}{(1+x)^2} \times \frac{e^{-nx}}{-n}\, dx \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{e^{-n}}{-n} - 1 \times \frac{e^0}{-n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2}\, dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{e^{-n}}{2n} - \frac{1}{n} J_n \\ &= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{e^{-n}}{2} - J_n\right). \end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{e^{-n}}{2} - J_n\right).}$$

(b) Pour tout entier naturel non nul, $nI_n = 1 - \dfrac{e^{-n}}{2} - J_n$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nI_n = 1.}$$

EXERCICE 4

Partie A

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. On sait que $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$ et donc

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{(z_1 z_2)} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

En résumé, $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2|z_2|^2$. Puisqu'un module est un réel positif, en prenant la racine carrée des deux membres de l'égalité précédente, on obtient $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tous nombres complexes } z_1 \text{ et } z_2,\ |z_1 z_2| = |z_1||z_2|.}$$

Partie B

1) (a)

$$\begin{aligned} z_{C'} &= \frac{1 - z_C}{\overline{z_C} - 1} = \frac{1 - (-2 + i)}{(-2 - i) - 1} = \frac{3 - i}{-3 - i} = \frac{(3 - i)(-3 + i)}{(-3 - i)(-3 + i)} \\ &= \frac{-9 + 6i + 1}{(-3)^2 + (-1)^2} = \frac{-8 + 6i}{10} = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i. \end{aligned}$$

$$\boxed{z_{C'} = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.}$$

(Voir figure page suivante)

(b) $OC' = |z_{C'}| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{1} = 1$. Donc

$$\boxed{\text{le point } C' \text{ appartient au cercle de centre } O \text{ et de rayon } 1.}$$

(c) Le point A a pour coordonnées $(1, 0)$, le point C a pour coordonnées $(-2, 1)$ et le point C' a pour coordonnées $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$. Par suite, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-3, 1)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC'}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

On en déduit que $\frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'}$ et donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC'}$ sont colinéaires. Ceci montre que

$$\boxed{\text{les points } A,\ C \text{ et } C' \text{ sont alignés.}}$$

2) Soit M un point du plan distinct de A. On note z son affixe (z est donc un nombre complexe distinct de 1). Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels tels que $(x, y) \neq (1, 0)$.

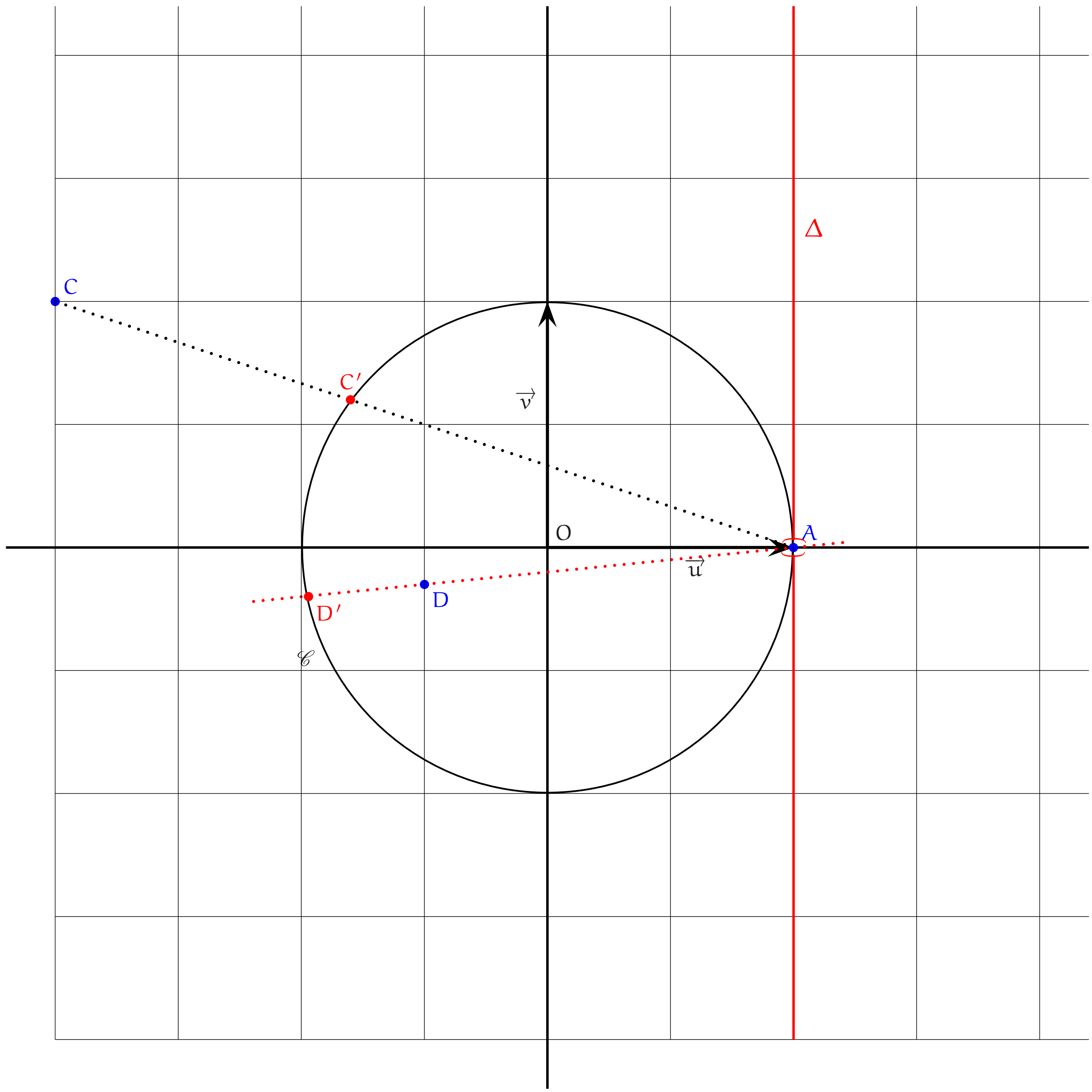
$$\begin{aligned} f(M) = A &\Leftrightarrow \frac{1 - z}{\overline{z} - 1} = 1 \Leftrightarrow 1 - z = \overline{z} - 1 \text{ (et } z \neq 1) \\ &\Leftrightarrow z + \overline{z} = 2 \text{ (et } z \neq 1) \\ &\Leftrightarrow x + iy + x - iy = 2 \text{ (et } (x, y) \neq (1, 0)) \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ (et } (x, y) \neq (1, 0)) \end{aligned}$$

L'ensemble Δ est la droite d'équation $x = 1$ privée du point A.

3) Soit M un point du plan distinct de A dont l'affixe est notée z.

$$OM' = |z'| = \frac{|1 - z|}{|\overline{z} - 1|} = \frac{|-(z - 1)|}{|\overline{z - 1}|} = \frac{|z - 1|}{|z - 1|} = 1.$$

Donc M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1 ou encore M' appartient au cercle $\mathscr{C}$.



4) Soit z un nombre complexe distinct de 1. Posons $z = x + iy$ ou x et y sont deux réels tels que $(x, y) \neq (1, 0)$.

$$\frac{z'-1}{z-1} = \frac{\dfrac{1-z}{\overline{z}-1} - 1}{z-1} = \left(\frac{1-z}{\overline{z}-1} - 1\right) \times \frac{1}{z-1} = \frac{(1-z)-(\overline{z}-1)}{(z-1)(\overline{z}-1)} = \frac{2-z-\overline{z}}{(z-1)\overline{(z-1)}}$$
$$= \frac{2-(x+iy)-(x-iy)}{|z-1|^2} = \frac{2-2x}{|z-1|^2}.$$

Le nombre $\dfrac{2-2x}{|z-1|^2}$ est un nombre réel et donc le nombre $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est un nombre réel. Notons k ce nombre réel.

$$\frac{z'-1}{z-1} = k \Rightarrow z'-1 = k(z-1) \Rightarrow z_{\overrightarrow{AM'}} = kz_{\overrightarrow{AM}} \Rightarrow \overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}.$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires ou encore les points A, M et M' sont alignés.

$\boxed{\text{Pour tout point } \mathsf{M} \text{ distinct de } \mathsf{A}, \text{ le point } \mathsf{M}' \text{ appartient à la droite } (\mathsf{AM}).}$

5) D'après la question 3), le point D' appartient au cercle $\mathscr{C}$. D'après la question 4), le point D' appartient à la droite (AD) et d'après la question 2), le point D' n'est pas le point A puisque le point D n'appartient pas à Δ. D' est donc le point d'intersection de la droite (AD) et du cercle $\mathscr{C}$ autre que le point A. Voir figure page précédente.

