BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2012

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Polynésie

EXERCICE 1

1) a) • $B \in \Gamma \Leftrightarrow f(100) = 100 \Leftrightarrow 100e^{100a+b} = 100 \Leftrightarrow e^{100a+b} = 1 \Leftrightarrow 100a + b = \ln 1 \Leftrightarrow 100a + b = 0$.

• $C \in \Gamma \Leftrightarrow f(50) = \dfrac{50}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow 50e^{50a+b} = \dfrac{50}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow e^{50a+b} = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 50a + b = -\dfrac{1}{2}$.

Donc le couple $(a; b)$ est solution du système :

$$\left\{\begin{array}{l} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. .$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -100a \\ 50a - 100a = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -100a \\ a = \dfrac{1}{100} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0,01 \\ b = -1 \end{array}\right. .$$

Donc,

$$\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f(x) = xe^{0,01x-1}.}$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{0,01x-1} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et en multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

3) a) Soit x un réel.

$$f(x) = xe^{0,01x-1} = \frac{100}{e} \times \frac{e}{100} \times x \times e^{0,01x} \times e^{-1} = \frac{100}{e} \times e \times e^{-1} \times 0,01xe^{0,01x} = \frac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x}.$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 0,01xe^{0,01x} = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ d'après un théorème de croissances comparées puis $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x} = \dfrac{100}{e} \times 0 = 0$. Finalement,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.}$$

4) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 \times e^{0,01x-1} + x \times (0,01x - 1)'e^{0,01x-1} = (1 + 0,01x)e^{0,01x-1}.$$

Pour tout réel x, $e^{0,01x-1} > 0$ et donc pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $1 + 0,01x$.
Or, $1 + 0,01x > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{0,01} \Leftrightarrow x > -100$ et de même $1 + 0,01x = 0 \Leftrightarrow x = -100$. Donc, la fonction f' est strictement positive sur $] - 100, +\infty[$, strictement négative sur $] - \infty, -100[$ et s'annule en -100.

On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-100		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-100e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

5) Pour tout réel x,

$$f(x) - x = xe^{0,01x-1} - x = x\left(1 - e^{0,01x-1}\right).$$

Etudions le signe de $1 - e^{0,01x-1}$. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}1 - e^{0,01x-1} > 0 &\Leftrightarrow -e^{0,01x-1} > -1 \Leftrightarrow e^{0,01x-1} < 1 \Leftrightarrow 0,01x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{0,01}\\ &\Leftrightarrow x < 100,\end{aligned}$$

et de même $1 - e^{0,01x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 100$. Etudions alors le signe de $f(x) - x$ dans un tableau de signes.

x	$-\infty$		0		100		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$1 - e^{0,01x-1}$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que Γ est strictement au-dessus de Δ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]100, +\infty[$, strictement au-dessous sur $]0, 100[$ et enfin, Γ et Δ se coupent aux points $O(0,0)$ et $B(0,100)$.

6) a) Pour t dans $[0,100]$, posons $u(t) = t$ et $v(t) = 100e^{0,01t-1}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,100]$ et pour t dans $[0,100]$, on a

$$\begin{array}{ll} u(t) = t & v(t) = 100e^{0,01t-1} \\ u'(t) = 1 & v'(x) = e^{0,01t-1} \end{array}$$

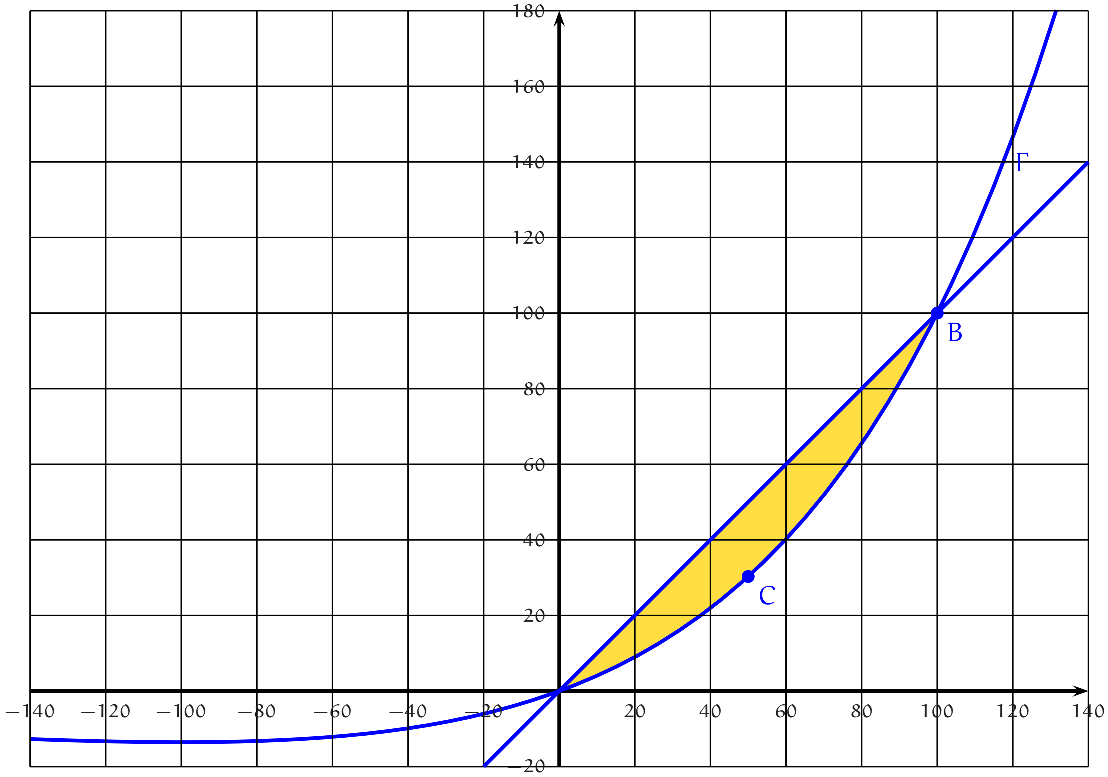
De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,100]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,dt &= \left[t \times 100e^{0,01t-1}\right]_0^{100} - \int_0^{100} 1 \times 100e^{0,01t-1}\,dt = 100 \times 100e^0 - 0 - \int_0^{100} 100e^{0,01t-1}\,dt\\ &= 10000 - \left[100 \times 100e^{0,01t-1}\right]_0^{100} = 10000 - 10000\left(1 - e^{-1}\right) = \frac{10000}{e}.\end{aligned}$$

b) D'après la question 4), la courbe Γ est au-dessous de la droite (D) sur $[0,100]$. Donc,

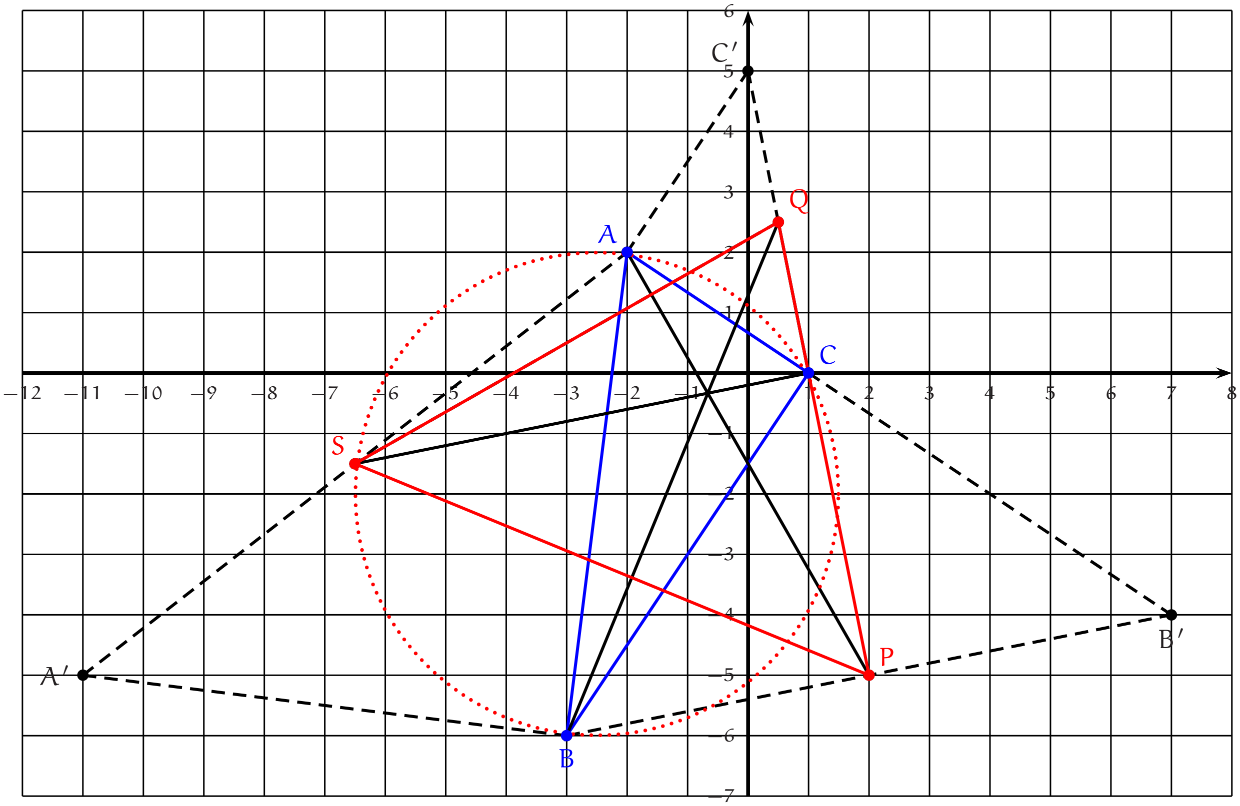
$$\begin{aligned}A &= \int_0^{100} (t - f(t))\,dt = \int_0^{100} t\,dt - \int_0^{100} f(t)\,dt \text{ (par linéarité de l'intégrale)}\\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{100} - \frac{10000}{e} = \frac{10000}{2} - \frac{10000}{e} = \frac{10000(e-2)}{2e}\\ &= \frac{5000(e-2)}{e}.\end{aligned}$$

$$\boxed{A = \frac{5000(e-2)}{e}.}$$



180
160
140
120
100
80
60
40
20
−20
−140
−120
−100
−80
−60
−40
−20
20
40
60
80
100
120
140
Γ
B
C

EXERCICE 2



1) • $AB^2 = |b-a|^2 = |(-3-6i)-(-2+2i)|^2 = |-1-8i|^2 = (-1)^2+(-8)^2 = 65$.
• $AC^2 = |c-a|^2 = |1-(-2+2i)|^2 = |3-2i|^2 = 3^2+(-2)^2 = 13$.
• $CB^2 = |b-c|^2 = |(-3-6i)-1|^2 = |-4-6i|^2 = (-4)^2+(-6)^2 = 52$.

Par suite, $AC^2 + CB^2 = 13+52 = 65 = AB^2$ et donc, d'après la réciproque du théorème de PYTHAGORE,

$$\boxed{\text{le triangle } ABC \text{ est rectangle en } C.}$$

2) a) L'écriture complexe de r est $z' = z_B + e^{\frac{i\pi}{2}}(z - z_B)$ ou encore $z' = -3-6i+i(z+3+6i)$ ou enfin $z' = iz-9-3i$.

$$\boxed{\text{L'écriture complexe de } r \text{ est } z' = iz-9-3i.}$$

b) $z'_A = iz_A - 9 - 3i = i(-2+2i) - 9 - 3i = -11-5i$.

$$\boxed{\text{L'affixe de } A' \text{ est } -11-5i.}$$

c) $z_S = \dfrac{z_A + z_{A'}}{2} = \dfrac{-2+2i-11-5i}{2} = -\dfrac{13}{2} - \dfrac{3}{2}i$.

d) Le triangle ABC est rectangle en C d'après la première question. Le cercle circonscrit au triangle ABC est donc le cercle de diamètre $[AB]$.
Puisque $A' = r(A)$, le triangle ABA' est isocèle en B. La médiane issue de B du triangle ABA', à savoir la droite (BS) est donc aussi la hauteur issue de B de ce même triangle. Par suite, la droite (BS) est perpendiculaire à la droite (AA') ou encore le triangle (ASB) est rectangle en S. On en déduit que le point S appartient au cercle de diamètre $[AB]$ ou encore le point S appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

3) a) $\dfrac{s-q}{p-a} = \dfrac{-\dfrac{13}{2} - \dfrac{3}{2}i - \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}i}{2-5i+2-2i} = \dfrac{-7-4i}{4-7i} = \dfrac{-i(4-7i)}{4-7i} = -i$.

b) On en déduit que :

(1) : $\dfrac{QS}{AP} = \dfrac{|s-q|}{|p-a|} = \left|\dfrac{s-q}{p-a}\right| = |-i| = 1$ et donc $AP = QS$.

(2) : $\left(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{QS}\right) = \arg\left(\dfrac{s-q}{p-a}\right) = \arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et donc $(AP)\perp(QS)$.

4) $\dfrac{s-p}{q-b} = \dfrac{-\dfrac{13}{2} - \dfrac{3}{2}i - 2 + 5i}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}i + 3 + 6i} = \dfrac{-\dfrac{17}{2} + \dfrac{7}{2}i}{\dfrac{7}{2} + \dfrac{17}{2}i} = \dfrac{-17+7i}{7+17i} = \dfrac{i(7+17i)}{7+17i} = i$ puis

$$\left(\overrightarrow{BQ}, \overrightarrow{PS}\right) = \arg\left(\dfrac{s-p}{q-b}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

et donc $(BQ)\perp(PS)$. De même, $\dfrac{q-p}{s-c} = \dfrac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}i - 2 + 5i}{-\dfrac{13}{2} - \dfrac{3}{2}i - 1} = \dfrac{-\dfrac{3}{2} + \dfrac{15}{2}i}{-\dfrac{15}{2} - \dfrac{3}{2}i} = \dfrac{-3+15i}{-15-3i} = \dfrac{-i(-15-3i)}{-15-3i} = -i$ puis $(CS)\perp(PQ)$.

En résumé, $(AP)\perp(QS)$ ou encore (AP) est la hauteur issue de P du triangle PQS et de même (BQ) et (CS) sont les hauteurs issues respectivement de Q et S du triangle PQS. On sait que les hauteurs d'un triangle sont concourantes en l'othocentre de ce triangle et donc les droites (AP), (BQ) et (CS) sont concourantes.

EXERCICE 3

Partie A

Si $N = 3$, k varie de 0 à 2.
Etape 1 $k = 0$ puis $U = 3 \times 0 - 2 \times 0 + 3 = 3$
Etape 2 $k = 1$ puis $U = 3 \times 3 - 2 \times 1 + 3 = 10$
Etape 3 $k = 2$ puis $U = 3 \times 10 - 2 \times 2 + 3 = 29$

L'affichage en sortie est donc 29.

Partie B

1) $u_1 = 3u_0 - 2 \times 0 + 3 = 3 \times 0 + 3 = 3$ et $u_2 = 3u_1 - 2 \times 1 + 3 = 3 \times 0 + 3 = 9 - 2 + 3 = 10$.

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

• Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et en particulier $u_0 \geqslant 0$. L'inégalité est donc vraie quand $n = 0$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \geqslant n$.

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \geqslant 3n - 2n + 3 = n + 3 \geqslant n + 1.$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

b) Pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2(u_n - n) + 3 \geqslant 3 \text{ (d'après la question précédente)}$$

et en particulier $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ou encore $u_n \leqslant u_{n+1}$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n = 3u_n - 3n + 3 = 3(u_n - n + 1) = 3v_n.$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$.

b) $v_0 = u_0 - 0 + 1 = 1$ puis pour tout entier naturel n,

$$v_n = v_0 \times q^n = 3^n.$$

Mais alors, pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + n - 1 = 3^n + n - 1$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = 3^n + n - 1.}$$

5) a) Soit p un entier naturel non nul. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$.

b) Soit p un entier naturel non nul. $u_{3p} = 3^{3p} + 3p - 1 = 27^p + 3p - 1 \geqslant 10^p + 3 \times 1 - 1 \geqslant 10^p$ puis, pour $n \geqslant 3p$, $u_n \geqslant 10^p$ car la suite (u_n) est croissante.
Donc l'entier $3p$ est un rang à partir duquel on a $u_n \geqslant 10^p$. Puisque n_0 est le plus petit des rangs à partir duquel $u_n \geqslant 10^p$, on a $n_0 \leqslant 3p$.

c) $u_0 = 0 < 10^3$, $u_1 = 3 < 10^3$, $u_2 = 10 < 10^3$, $u_3 = 29 < 10^3$, $u_4 = 84 < 10^3$, $u_5 = 247 < 10^3$, $u_6 = 734 < 10^3$, $u_7 = 2193 \geqslant 10^3$. Donc, si $p = 3$ alors $n_0 = 7$.

d)

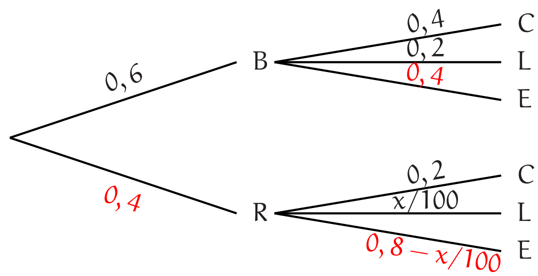
Entrée	Saisir le nombre entier naturel non nul p
Traitement	Affecter à N la valeur 0 Tant que $3 \wedge n + n - 1 < 10^p$ Affecter à N la valeur $N + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher$N$.

EXERCICE 4

Partie A : expérience 1

1) Notons B l'événement « le cube tiré est bleu », R l'événement « le cube tiré est rouge », C l'événement « le cube tiré est marqué d'un cercle », L l'événement « le cube tiré est marqué d'un losange », E l'événement « le cube tiré est marqué d'une étoile ».

Représentons la situation par un arbre.



La probabilité demandée est $p(L)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$p(L) = p(B) \times p_B(L) + p(R) \times p_R(L) = 0,6 \times 0,2 + (1 - 0,6) \times \frac{x}{100} = 0,12 + 0,004x.$$

2) De même,

$$p(E) = p(B)\times p_B(E)+p(R)\times p_R(E) = 0,6\times(1-0,4-0,2)+0,4\times(1-0,2-0,01x) = 0,24+0,4(0,8-0,01x) = 0,56-0,004x,$$

puis

$$p(L) = p(E) \Leftrightarrow 0,12 + 0,004x = 0,56 - 0,004x \Leftrightarrow 0,008x = 0,44 \Leftrightarrow x = \frac{0,44}{0,008} \Leftrightarrow x = 55.$$

3) Les événements B et L sont indépendants si et seulement si $p_B(L) = p(L)$. Or,

$$p(L) = p_B(L) \Leftrightarrow 0,12 + 0,004x = 0,2 \Leftrightarrow 0,004x = 0,08 \Leftrightarrow x = \frac{0,08}{0,004} \Leftrightarrow x = 20.$$

4) Ici, $x = 50$. La probabilité demandée est $p_L(B)$.

$$p_L(B) = \frac{p(B \cap L)}{p(L)} = \frac{p(B) \times p_B(L)}{p(L)} = \frac{0,6 \times 0,2}{0,12 + 0,004 \times 50}\frac{0,12}{0,32} = 0,375.$$

Partie B : expérience 2

1) L'événement considéré est l'événement contraire de l'événement « les trois cubes tirés sont bleus ».
Le nombre de tirages simultanés de 3 cubes parmi les 100 que contient l'urne est

$$\binom{100}{3} = \frac{100 \times 99 \times 98}{3 \times 2} = 100 \times 33 \times 49 = 161700.$$

Le nombre de tirages simultanés de 3 cubes parmi les 60 bleus est

$$\binom{60}{3} = \frac{60 \times 59 \times 58}{3 \times 2} = 10 \times 59 \times 58 = 34220.$$

La probabilité demandée est donc

$$1 - \frac{34220}{161700} = \frac{12748}{16170} = 0,788 \text{ arrondi au millième.}$$

2) La probabilité d'obtenir trois cubes bleus est $\frac{34220}{161700}$. De même, la probabilité d'obtenir trois cubes rouges est

$$\frac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}} = \frac{\frac{40 \times 39 \times 38}{3 \times 2}}{161700} = \frac{9880}{161700}.$$

La probabilité d'obtenir trois cubes de même couleur est donc

$$\frac{34220}{161700} + \frac{9880}{161700} = \frac{44100}{161700} = 0,273 \text{ arrondi au millième.}$$

3) Le nombre de cubes bleus marqués d'un cercle est $0,4 \times 60 = 24$ et le nombre de cubes rouges marqués d'un cercle est $0,2 \times 40 = 8$. Le nombre total de cubes marqués d'un cercle est 32.

Le nombre de tirages simultanés de 3 cubes dont 1 est l'un des 32 cubes marqués d'un cercle et les deux autres sont deux des 68 cubes non marqués d'un cercle est

$$\binom{32}{1} \times \binom{68}{2} = 32 \times \frac{68 \times 67}{2} = 72896.$$

La probabilité demandée est donc

$$\frac{72896}{161700} = 0,451 \text{ arrondi au millième.}$$

