BACCALAUREAT GENERAL

Session de mai 2012
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement Obligatoire
Nouvelle Calédonie

EXERCICE 1

Partie A

1)

$$\begin{aligned}P(z_0) &= \left(i\sqrt{2}\right)^3 - \left(2+i\sqrt{2}\right)\left(i\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(1+i\sqrt{2}\right)\left(i\sqrt{2}\right) - 2i\sqrt{2}\\ &= -2i\sqrt{2} + 2\left(2+i\sqrt{2}\right) + 2\left(i\sqrt{2}-2\right) - 2i\sqrt{2}\\ &= -2i\sqrt{2} + 4 + 2i\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} - 4 - 2i\sqrt{2} = 0\end{aligned}$$

Donc $P(z_0) = 0$.

2) a) Soient a et b deux réels. Pour tout nombre complexe z,

$$\begin{aligned}(z-i\sqrt{2})(z^2+az+b) &= z^3 + az^2 + bz - i\sqrt{2}z^2 - ia\sqrt{2}z - ib\sqrt{2}\\ &= z^3 + \left(a - i\sqrt{2}\right)z^2 + \left(b - ia\sqrt{2}\right)z - ib\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Si on choisit les réels a et b tels que $\left\{\begin{array}{l} a - i\sqrt{2} = -\left(2+i\sqrt{2}\right)\\ b - ia\sqrt{2} = 2\left(1+i\sqrt{2}\right)\\ -ib\sqrt{2} = -2i\sqrt{2}\end{array}\right.$, alors pour tout nombre complexe z on aura $(z-i\sqrt{2})(z^2+az+b) = P(z)$. Or,

$$\left\{\begin{array}{l} a - i\sqrt{2} = -\left(2+i\sqrt{2}\right)\\ b - ia\sqrt{2} = 2\left(1+i\sqrt{2}\right)\\ -ib\sqrt{2} = -2i\sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2\\ b + 2i\sqrt{2} = 2\left(1+i\sqrt{2}\right)\\ b = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2\\ b = 2\\ b = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2\\ b = 2\end{array}\right..$$

Donc

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z,\ P(z) = \left(z - i\sqrt{2}\right)(z^2 - 2z + 2).}$$

b) Soit z un nombre complexe.

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = i\sqrt{2} \text{ ou } z^2 - 2z + 2 = 0.$$

Le discriminant de l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 = -4 = (2i)^2$. Donc l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ admet deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \dfrac{2+2i}{2} = 1 + i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 - i$.

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z,\ P(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \left\{i\sqrt{2}, 1+i, 1-i\right\}.}$$

Partie B

1) Voir figure en fin d'exercice.

2) Le point K est le milieu du segment [JL]. Par suite, $\dfrac{z_L + z_J}{2} = z_K$ puis

$$z_L = 2z_K - z_J = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - i\sqrt{2} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} - i\sqrt{2} = -\sqrt{2}.$$

$$\boxed{z_L = -\sqrt{2}.}$$

3) • $OA = |z_A| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
• $OB = |z_B| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
• $OJ = |z_J| = \sqrt{2}|i| = \sqrt{2}$.
• $OL = \left|-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$.

$$\boxed{\text{Les points } A, B, J \text{ et } L \text{ appartiennent au cercle de centre } O \text{ et de rayon } \sqrt{2}.}$$

4) a) Puisque $OJ = OD = \sqrt{2}$, r existe. Son angle est $\left(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OD}\right)$. On sait que $\left(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OD}\right) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_O}{z_J - z_O}\right)$ $[2\pi]$. Or,

$$\begin{aligned}\frac{z_D - z_O}{z_J - z_O} &= \frac{-1+i}{i\sqrt{2}} = \frac{(-1+i)(-i)}{i\sqrt{2}(-i)} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{i\pi/4},\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\left(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OD}\right) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi].}$$

b) L'expression complexe de r est donc $z' = e^{i\pi/4}z$. Par suite,

$$z_C = e^{i\pi/4}z_L = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\left(-\sqrt{2}\right) = -1 - i.$$

$$\boxed{z_C = -1 - i.}$$

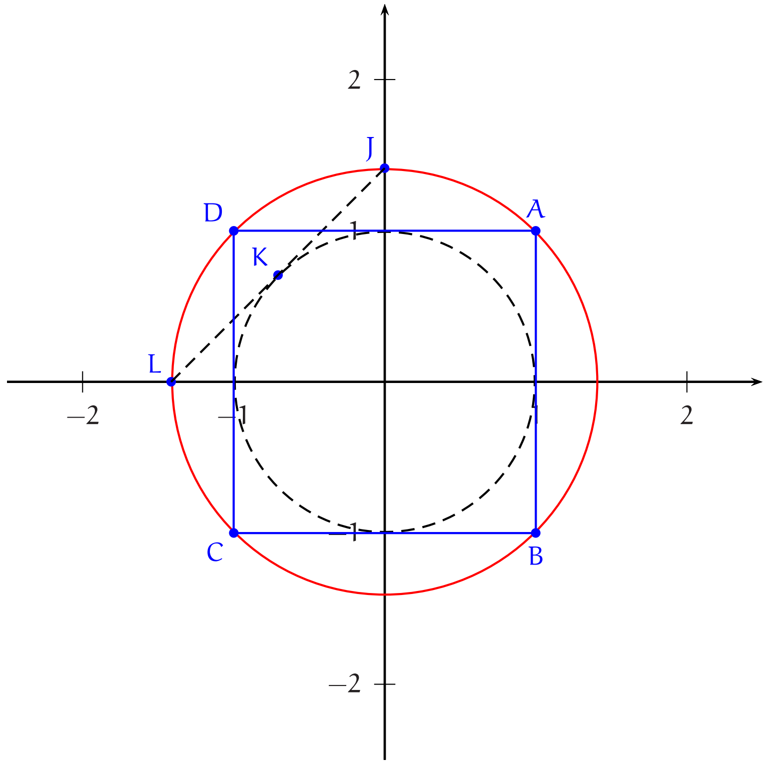
5) • $z_C = -z_A$ et donc O est le milieu du segment [AC]. De même, $z_D = -z_B$ et donc O est le milieu du segment [BD]. Ainsi, les diagonales du quadrilatère $ABCD$ ont même milieu et donc $ABCD$ est un parallélogramme.

• Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-2, -2)$ et le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées $(-2, 2)$. Par suite, $AC = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$ et $BD = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$. En particulier, $AC = BD$. D'autre part,

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (-2) \times (-2) + (-2) \times 2 = 0,$$

et donc $(AC) \perp (BD)$. En résumé, les diagonales du parallélogramme $ABCD$ sont perpendiculaires et ont même longueur. On en déduit que

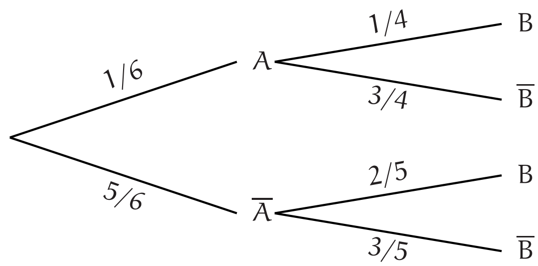
$$\boxed{\text{le quadrilatère } ABCD \text{ est un carré.}}$$



2
J
D
A
1
K
L
−2
−1
2
−1
C
B
−2

EXERCICE 2

1) a) Représentons la situation par un arbre.



b) D'après la formule des probabilités totales,

$$p(B) = p(A) \times p_A(B) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}.$$

$$\boxed{p(B) = \frac{3}{8}.}$$

c) La probabilité demandée est $p_B(A)$.

$$p_B(A) = \frac{p(B \cap A)}{p(B)} = \frac{p(A) \times p_A(B)}{p(B)} = \frac{\dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{4}}{\dfrac{3}{8}} = \frac{1}{24} \times \frac{8}{3} = \frac{1}{9}.$$

$$\boxed{p_B(A) = \frac{1}{9}.}$$

2) a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la boule obtenue est noire » avec une probabilité $p = \frac{3}{8}$ (d'après la question 1)b))

ou « la boule obtenue n'est pas noire » avec une probabilité $1 - p = \frac{5}{8}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{8}$.

On sait alors que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 10$,

$$p(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{3}{8}\right)^k \left(\frac{5}{8}\right)^{10-k}.$$

En particulier,

$$p(X = 3) = \binom{10}{3} \left(\frac{3}{8}\right)^3 \left(\frac{5}{8}\right)^7 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} \times \frac{3^3 \times 5^7}{8^{10}} = 120 \times \frac{3^3 \times 5^7}{8^{10}} = 0,2357\ldots$$

et donc

$$\boxed{\text{la probabilité de gagner exactement } 3 \text{ parties est } 0,236 \text{ arrondie au millième.}}$$

b) La probabilité demandée est $p\,(X \geqslant 1)$.

$$p\,(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \left(\frac{3}{8}\right)^0 \left(\frac{5}{8}\right)^{10} = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{10} = 0,9909\ldots$$

et donc

$$\boxed{\text{la probabilité de gagner au moins } 1 \text{ partie est } 0,991 \text{ arrondie au millième.}}$$

c) La probabilité considérée est $p(X \geqslant N)$.

$$p(X \geqslant N) \leqslant \frac{1}{10} \Leftrightarrow 1 - p(X < N) \leqslant \frac{1}{10} \Leftrightarrow p(X > N) \geqslant \frac{9}{10}.$$

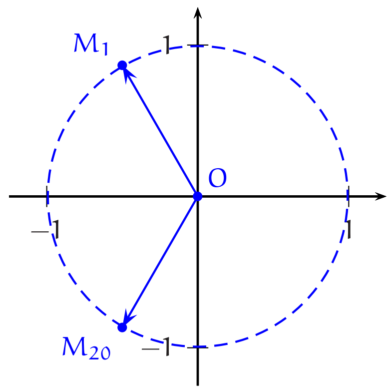
D'après le tableau fourni dans l'énoncé, la valeur de N à partir de laquelle la probabilité de l'événement « la personne gagne au moins N parties » devient inférieure à $\frac{1}{10}$ est 7.

EXERCICE 3

Proposition 1.	**VRAI**
Proposition 2.	**FAUX**
Proposition 3.	**FAUX**
Proposition 4.	**VRAI**
Proposition 5.	**FAUX**

Justification 1. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n+1}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas constante. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{\pi}{4}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. La proposition 1 est vraie

Justification 2. $z_{20} = e^{40i\pi/3} = e^{40i\pi/3} = e^{i\frac{4\pi}{3}+i\frac{36\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}+12i\pi} = e^{i\frac{4\pi}{3}} \times e^{12i\pi} = e^{i\frac{4\pi}{3}} \times 1 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.



On sait que $\left(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_{20}}\right) = \arg\left(\frac{z_{20} - z_O}{z_1 - z_O}\right) = \arg\left(\frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}}{e^{\frac{2i\pi}{3}}}\right) = \arg\left(e^{i\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)}\right) = \arg\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$. En particulier, $\left(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_{20}}\right) \neq 0$ $[\pi]$ et donc les points O, M_1 et M_{20} ne sont pas alignés. La proposition 2 est fausse.

Justification 3. Puisque $F(0) = 0$, la courbe représentative de F est la courbe 1 ou la courbe 3. Dans les deux cas, la tangente à la courbe représentative de F au point O n'est pas parallèle à (Ox) et donc $f(0) = F'(0) \neq 0$. Seule la courbe 2 peut donc être la courbe représentative de f. La proposition 3 est fausse.

Justification 4. La distance d du point A au plan P est

$$d = \frac{|2\times 0 - 0 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Puisque $\frac{\sqrt{3}}{2} < 2$, la distance d du centre A de la sphère au plan P est strictement plus petite que le rayon de la sphère. On sait alors que la sphère de centre A et de rayon 2 et le plan P sont sécants selon un cercle. La proposition 4 est vraie.

Justification 5. f vérifie $f(0) = 0$ (ce qui exclut la courbe C_1) et pour tout réel x, $f'(x) + 2f(x) = 4$. En particulier, $f'(0) = 4$. Comme $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse 0, la seule courbe possible est la courbe 3. La proposition 5 est fausse.

EXERCICE 4

PARTIE A

1) Pour x dans $[0,1]$, posons $u(x)=x$ et $v(x)=e^x$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,1]$ et pour $x\in[0,1]$, on a

$$\begin{array}{ll} u(x)=x & v(x)=e^x \\ u'(x)=1 & v'(x)=e^x \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x\,dx &= [xe^x]_0^1-\int_0^1 1\times e^x\,dx = e^1-0-\int_0^1 e^x\,dx = e-[e^x]_0^1\\ &= e-(e-1)=1.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 xe^x\,dx=1.}$$

2) a) L'aire du triangle OAA' est

$$\text{aire de}(OAA')=\frac{OA'\times AA'}{2}=\frac{a\times ae^a}{2}=\frac{1}{2}a^2e^a.$$

L'aire du trapèze $ABB'A'$ est

$$\text{aire de}(ABB'A')=\frac{(AA'+BB')\times A'B'}{2}=\frac{(ae^a+e)(1-a)}{2}=\frac{1}{2}(-a^2e^a+ae^a-ae+e).$$

b) La fonction f est continue et positive sur $[0,1]$. Donc l'aire, exprimée en unités d'aire et notée $\mathscr{A}$, de la partie du plan comprise l'axe (Ox) et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$ d'autre part est $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ c'est-à-dire 1 d'après la question 1.

D'après le graphique fourni en annexe, l'aire de la partie du plan hachurée, exprimée en unités d'aire est

$$\begin{aligned}\mathscr{A}'&=\text{aire de}(OAA')+\text{aire de}(ABB'A')-\mathscr{A}=\frac{1}{2}a^2e^a+\frac{1}{2}(-a^2e^a+ae^a-ae+e)-1\\ &=\frac{1}{2}(a^2e^a-a^2e^a+ae^a-ae+e-2)=\frac{1}{2}(ae^a-ae+e-2).\end{aligned}$$

PARTIE B

1) La fonction $x\mapsto x(e^x-e)$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$. Mais alors, la fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x\geqslant 0$,

$$g'(x)=(e^x-e)+x(e^x)+0=xe^x+e^x-e.$$

De nouveau la fonction g' est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x\geqslant 0$,

$$g''(x)=1\times e^x+xe^x+e^x=(2+x)e^x.$$

2) Pour tout réel $x\geqslant 0$, $e^x>0$ et $x+2>0$. Donc, pour tout réel $x\geqslant 0$, $g''(x)>0$. Mais alors, la fonction g' est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

3) • $g'(0)=(2+0)e^0=2$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^x=+\infty$. Ensuite, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x-e=+\infty$ et en additionnant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}g'(x)=+\infty$.

• La fonction g' est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. On sait alors que pour tout réel k de $[g'(0),\lim\limits_{x\to+\infty}g'(x)[=[1-e,+\infty[$, l'équation $g'(x)=k$ admet une solution et une seule dans $[0,+\infty[$. En particulier, puisque $1-e<0$ et donc que 0 appartient à $[1-e,+\infty[$, l'équation $g'(x)=0$ admet une solution et une seule, notée α, dans $[0,+\infty[$.

La calculatrice fournit $g'(0,5)=-0,2\ldots<0$ et $g'(0,6)=0,1\ldots>0$. Ainsi, $g'(0,5)<g'(\alpha)<g'(0,6)$ et donc, puisque la fonction g' est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, $0,5<\alpha<0,6$. Ainsi,

$$\boxed{\alpha = 0,5 \text{ à } 10^{-1} \text{ près.}}$$

4) Puisque la fonction g' est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, si $0 \leqslant x < \alpha$, alors $g'(x) < g'(\alpha)$ ou encore $g'(x) < 0$ et si $x > \alpha$, alors $g'(x) > g'(\alpha)$ ou encore $g'(x) > 0$. Ainsi, la fonction g est strictement décroissante sur $[0, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

5) En particulier, la fonction g admet un minimum en α avec $\alpha \in [0, 1]$. D'après la question 2)b) de la partie A, pour tout $a \in [0, 1]$, l'aire de la partie du plan hachurée est $\dfrac{g(a)}{2}$. La question précédente permet d'affirmer que cette aire est minimale quand $a = \alpha$.

