BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2012
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement Obligatoire
Antilles Guyane

EXERCICE 1

Partie A : étude de la fonction

1) Pour tout réel x, $f(x) = xe^{x-1} + 1 = 1 + \dfrac{1}{e} \times xe^{x}$. Un théorème de croissances comparées permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$. Par suite,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 + \frac{1}{e} \times 0 = 1.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

2) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{x-1} = \lim_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$. En multipliant, on obtient $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} xe^{x-1} = +\infty$ puis $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 \times e^{x-1} + x \times (x-1)'e^{x-1} + 0 = e^{x-1} + xe^{x-1} = (x+1)e^{x-1}.$$

4) Pour tout réel x, $e^{x-1} > 0$. Par suite, pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $x + 1$. Ainsi, la fonction f' est strictement négative sur $]-\infty, -1[$, strictement positive sur $]-1, +\infty[$ et s'annule en -1. On en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$1 - e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B : recherche d'une tangente

1) Soit $a > 0$. $f(a) = ae^{a-1} + 1$ et $f'(a) = (a+1)e^{a-1}$. Par suite, une équation de la tangente T_a est

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$ ou encore $y = (a+1)e^{a-1}(x - a) + ae^{a-1} + 1$ ou enfin $y = (a+1)e^{a-1}x - a^2e^{a-1} + 1$.

$$\boxed{\text{Une équation de } T_a \text{ est } y = (a+1)e^{a-1}x + 1 - a^2e^{a-1}.}$$

2) T_a passe par $O(0, 0)$ si et seulement $0 = (a+1)e^{a-1} \times 0 + 1 - a^2e^{a-1}$ ou encore $1 - a^2e^{a-1} = 0$.

3) $1 - 1^2e^{1-1} = 1 - e^0 = 0$ et donc 1 est une solution de l'équation (E) : $1 - x^2e^{x-1}$ sur $]0, +\infty[$. Montrons que 1 est l'unique solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$,

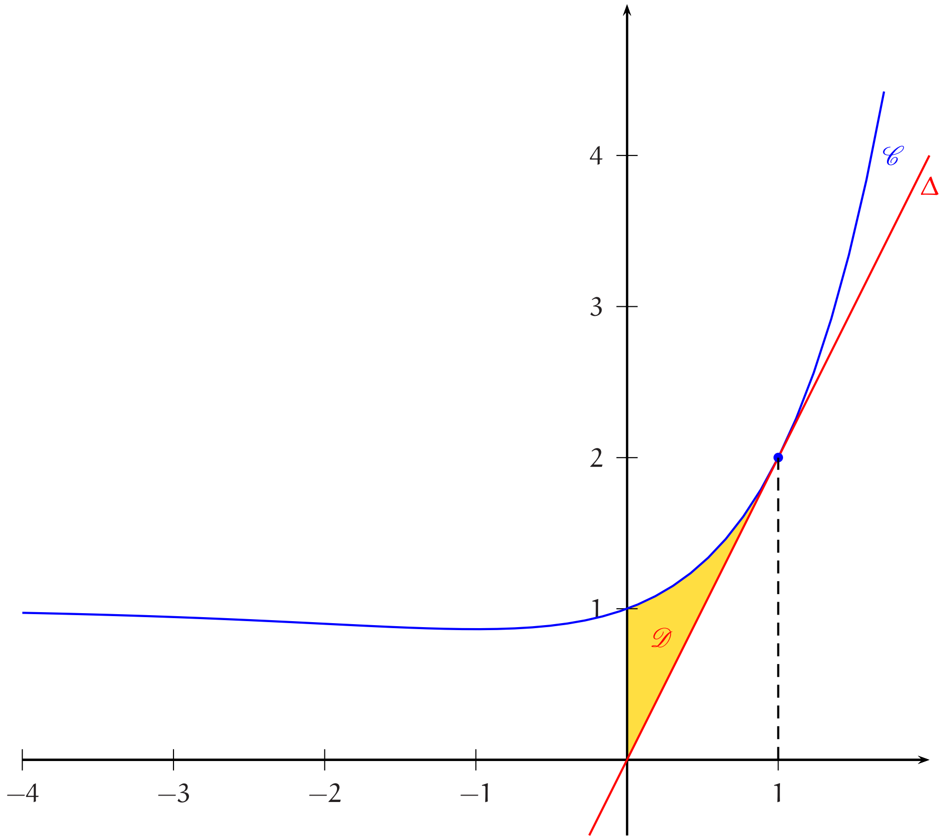
$$1 - x^2e^{x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2e^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{e^{x-1}} \text{ (car } e^{x-1} \neq 0)$$
$$\Leftrightarrow x^2 = e^{-x+1} \Leftrightarrow x^2 - e^{-x+1} = 0.$$

Pour $x > 0$, posons $g(x) = x^2 - e^{-x+1}$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $g'(x) = 2x + e^{-x+1}$. Pour tout réel $x > 0$, $e^{-x+1} > 0$ et $2x > 0$ et donc $g'(x) > 0$. La fonction g est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit que pour $x \in]0, 1[$, $g(x) < g(1)$ ou encore $g(x) < 0$ et si $x \in]1, +\infty[$, $g(x) > g(1)$ ou encore $g(x) > 0$. En particulier, si $x \in]0, +\infty[\setminus\{1\}$, $g(x) \neq 0$ puis $1 - x^2e^{x-1} \neq 0$. 1 est donc l'unique solution de l'équation $1 - x^2e^{x-1} = 0$.

4) Si $a = 1$, l'équation obtenue à la question 1) s'écrit $y = 2x$.

Partie C : calcul d'aire

1) Graphique



2) Pour x dans $[0, 1]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = e^{x-1}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour x dans $[0, 1]$, on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = e^{x-1} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{x-1} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{x-1}\,dx &= \left[xe^{x-1}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^{x-1}\,dx = 1 \times e^0 - 0 \times e^{-1} - \int_0^1 e^{x-1}\,dx \\ &= 1 - \left[e^{x-1}\right]_0^1 = 1 - \left(1 - e^{-1}\right) = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

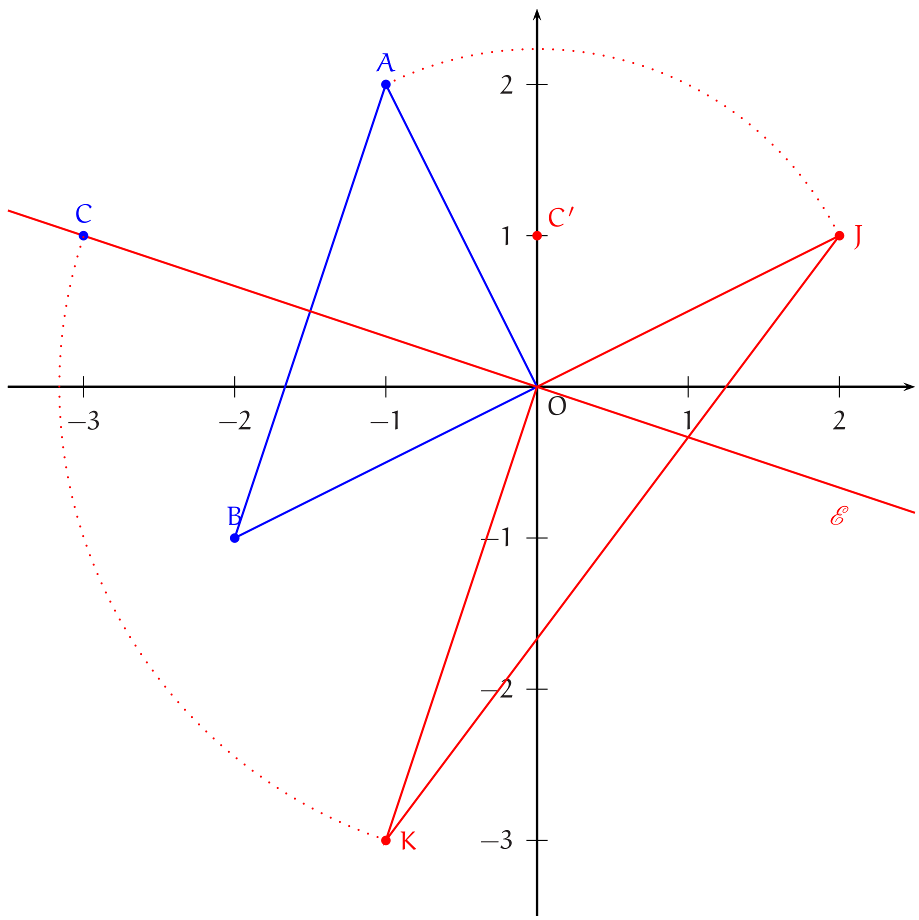
3) La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite Δ sur $[0, 1]$. Donc l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}$ est

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^1 (f(x) - 2x)\,dx = \int_0^1 xe^{x-1}\,dx + \int_0^1 (1 - 2x)\,dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \frac{1}{e} + \left[x - x^2\right]_0^1 = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

L'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}$ est égale à $\dfrac{1}{e}$.

EXERCICE 2

1) Graphique



2) $\dfrac{b}{a} = \dfrac{-2-i}{-1+2i} = \dfrac{i(-1+2i)}{-1+2i} = i$. On en déduit que

- $\dfrac{OB}{OA} = \dfrac{|b|}{|a|} = \left|\dfrac{b}{a}\right| = |i| = 1$ et donc $OA = OB$.
- $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\dfrac{b}{a}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Par suite, le triangle OAB est rectangle isocèle direct en O.

3) a)

$$c' = \frac{-3+i+1-2i}{-3+i+2+i} = \frac{-2-i}{-1+2i} = \frac{(-2-i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{2+4i+i-2}{(-1)^2+2^2} = i.$$

Le point $C' = f(C)$ a donc pour coordonnées $(0, 1)$.

b) Soit M un point du plan distincts de B d'affixe z.

$$\begin{aligned}|z'| = 1 &\Leftrightarrow \frac{|z+1-2i|}{|z+2+i|} = 1 \Leftrightarrow |z-(-1+2i)| = |z-(-2-i)| \text{ (et } z \neq -2-i)\\ &\Leftrightarrow AM = BM \text{ (et } M \neq B) \Leftrightarrow AM = BM \text{ (car si } M = B, \text{ alors } AM \neq BM)\\ &\Leftrightarrow M \in \text{med}[AB].\end{aligned}$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ est la médiatrice du segment $[AB]$. On peut en déterminer une équation :

$$\begin{aligned}M \in \text{med}[AB] &\Leftrightarrow AM^2 = BM^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = (x+2)^2 + (y+1)^2\\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow 2x + 6y = 0\\ &\Leftrightarrow x + 3y = 0.\end{aligned}$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ est la droite d'équation $x + 3y = 0$.

c) $x_O + 3y_O = 0 = 0 = 0$. Donc $O \in \mathscr{E}$. $x_C + 3y_C = -3 + 3 = 0$. Donc $C \in \mathscr{E}$.

4) • $z_J = e^{-i\pi/2} z_A = -i(-1 + 2i) = 2 + i$ et $z_K = e^{i\pi/2} z_C = i(-3 + i) = -1 - 3i$.

• Le milieu L du segment $[JK]$ a pour affixe $z_L = \dfrac{z_J + z_K}{2} = \dfrac{2 + i - 1 - 3i}{2} = \dfrac{1}{2} - i$.

• La médiane issue de O du triangle OJK est la droite (OL). Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OL}$ sont $\left(\dfrac{1}{2}, -1\right)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-2, -1)$.

$$\overrightarrow{OL}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \times (-2) + (-1) \times (-1) = 0.$$

Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{OL}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux ou encore la droite (OL) est perpendiculaire à la droite (AC). Ainsi, la droite (OL) est également la hauteur issue de O du triangle OAC.

EXERCICE 3

1) • $u_2 = u_{1+1} = \dfrac{1+1}{2\times 1}u_1 = \dfrac{1}{2}$.

• $u_3 = \dfrac{3}{4}u_2 = \dfrac{3}{8}$.

• $u_4 = \dfrac{4}{6}u_3 = \dfrac{4}{6}\times\dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{4}$.

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $u_n > 0$.

• $u_1 = \dfrac{1}{2} > 0$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $u_n > 0$. Alors $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n}u_n > 0$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $u_n > 0$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $u_n \neq 0$ puis

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n} \leqslant \frac{n+n}{2n} = 1.$$

Puisque $u_n > 0$, on en déduit encore que $u_{n+1} \leqslant u_n$. On a montré que pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} \leqslant u_n$ et donc la suite (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 et donc la suite (u_n) converge vers un réel positif ou nul.

3) a) $v_1 = \dfrac{u_1}{1} = \dfrac{1}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\times\frac{n+1}{2n}u_n = \frac{u_n}{2n} = \frac{1}{2}\times\frac{u_n}{n} = \frac{1}{2}v_n.$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_1 = \dfrac{1}{2}$ et de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

b) On sait alors que pour tout entier naturel non nul n,

$$v_n = v_1 q^{n-1} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}.$$

Mais alors, pour tout entier naturel non nul n, $u_n = nv_n = \dfrac{n}{2^n}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ u_n = \frac{n}{2^n}.}$$

4) a) Pour tout réel $x \geqslant 1$, $f(x) = x\left(-\ln 2 + \dfrac{\ln x}{x}\right)$. D'après un théorème de croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\ln 2 + \frac{\ln x}{x} = -\ln 2 < 0$. Comme d'autre part $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(-\ln 2 + \frac{\ln x}{x}\right) = -\infty.$$

b) On sait déjà que la suite (u_n) converge. Ensuite, pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n = \frac{n}{2^n} = \frac{e^{\ln n}}{e^{n\ln 2}} = e^{\ln n - n\ln 2} = e^{f(n)}.$$

D'après la question précédente, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n) = -\infty$ et donc

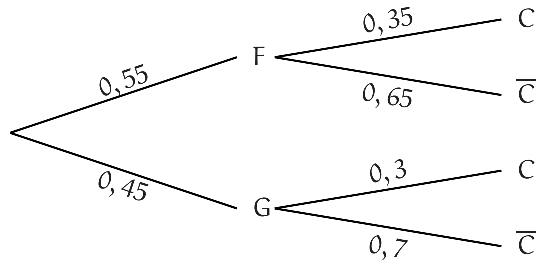
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{f(n)} = \lim_{X\to-\infty} e^X = 0.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

EXERCICE 4

1) On note F l'événement « l'élève choisi est une fille » et G l'événement « l'élève choisi est un garçon » (de sorte que $G = \overline{F}$). Enfin, on note C l'événement « l'élève déjeune à la cantine ». L'énoncé donne $p(F) = 0,55$ et donc $p(G) = 1-0,55 = 0,45$ puis $p_F(C) = 0,35$ (et donc $p_F\left(\overline{C}\right) = 1-0,35 = 0,65$) et $p_G(C) = 0,3$ (et donc $p_G\left(\overline{C}\right) = 1-0,3 = 0,7$).

Représentons la situation par un arbre.



La probabilité demandée est $p\left(\overline{C}\right)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$p\left(\overline{C}\right) = p\left(F \cap \overline{C}\right) + p\left(G \cap \overline{C}\right) = p(F) \times p_F\left(\overline{C}\right) + p(G) \times p_G\left(\overline{C}\right) = 0,55 \times 0,65 + 0,45 \times 0,7 = 0,6725$$

La probabilité que l'élève ne déjeune pas à la cantine est $0,6725$.

2) Le nombre de tirages simultanés de trois jetons parmi les dix jetons de l'urne est

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 5 \times 3 \times 8 = 120.$$

Le nombre de tirages simultanés de trois jetons parmi les dix jetons de l'urne ne comportant aucun numéro pair est encore le nombre de tirages simultanés de trois jetons parmi les cinq jetons de l'urne qui portent un numéro impair. Ce nombre est

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} = 10.$$

Le nombre de tirages simultanés de trois jetons parmi les dix jetons de l'urne contenant au moins un numéro pair est la différence des deux nombres précédents c'est-à-dire $120 - 10 = 110$.

Il y a 110 tirages simultanés de 3 jetons comportant au moins un numéro pair.

3) On sait que pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant 20$,

$$p(Y = k) = \binom{20}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{20-k},$$

et donc

$$p(Y \geqslant 2) = 1 - p(Y = 0) - p(Y = 1) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{20} - 20 \times \left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{4}{5}\right)^{19} = 0,930\ldots$$

$p(Y \geqslant 2) = 0,930$ à 10^{-3} près par défaut.

4) Posons plus simplement $p(F) = p$. L'énoncé donne $p(A) = 0,02$ et $p(A \cup F) = 0,069$. D'autre part, puisque les événements A et F sont indépendants, $p(A \cap F) = p(A) \times p(F) = 0,02p$.

$$0,069 = p(A \cup F) = p(A) + p(F) - p(A \cap F) = 0,02 + p - 0,02p = 0,02 + 0,98p,$$

et donc

$$p = \frac{0,069 - 0,02}{0,98} = \frac{0,049}{0,98} = \frac{49}{980} = \frac{1}{20} = 0,05.$$

$$\boxed{p(F) = 0,05.}$$

5) Dans cet algorithme, on recommence $n = 9$ fois une même expérience : choisir un nombre au hasard entre 1 et 7. A chaque expérience, on a deux éventualités : « le nombre obtenu est 6 ou 7 (le succès) » avec une probabilité $p = \frac{2}{7}$ ou « ne pas obtenir 6 ou 7 (l'échec) » avec une probabilité $1 - p = \frac{5}{7}$. De plus, au cours des 9 expériences, la probabilité d'obtenir 6 ou 7 ne varie pas en fonction des résultats précédemment obtenus ou encore les 9 expériences sont indépendantes les unes des autres.
La variable C est un compteur : à la fin des neuf expériences, la variable C contient le nombre de fois où on a obtenu un résultat égal à 6 ou 7 ou encore la variable X donne le nombre de succès en 9 tentatives. Finalement,

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètre } n = 9 \text{ et } p = \frac{2}{7}.}$$

