

# CONCOURS DE RECRUTEMENT

## D'ELEVES PILOTE DE LIGNE

ANNEE 2017

### EPREUVE DE MATHEMATIQUES

#### Partie I

##### Question 1 :

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) FAUX

**Explication 1 :** Pour  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(aI)^n = a^n I = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$ .  $(aI)^n \in \mathcal{M}$  et  $s((aI)^n) = a^n$ . A est vrai et B est faux.

$J^0 = I$  puis pour  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $(aJ)^0 = I \neq 3^{-1}a^0J$ . C et D sont faux.

##### Question 2 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

**Explication 2 :**  $L_2(K) = 6$ . Donc, si  $K \in \mathcal{M}$ ,  $C_2(K) = C_3(K) = 6$ . Ceci impose  $u - 1 = 6$  et  $v + 8 = 6$  puis  $u = 7$  et  $v = -2$ . Donc, B et C sont faux. Réciproquement, si  $u = 7$  et  $v = -2$ , alors  $L_1(K) = 5 \neq 6 = L_2(K)$ . Donc, K n'est jamais dans  $\mathcal{M}$ . A est faux et D est vrai.

##### Question 3 :

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) FAUX

**Explication 3 :**

$$L \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \begin{cases} d + e + z = a + b + c & \text{(I)} \\ x + y + t = a + b + c & \text{(II)} \\ a + d + x = a + b + c & \text{(III)} \\ b + e + y = a + b + c & \text{(IV)} \\ c + z + t = a + b + c & \text{(V)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b + c - d & \text{(III)} \\ z = a + b + c - d - e & \text{(I)} \\ y = a + c - e & \text{(IV)} \\ (b + c - d) + (a + c - e) + t = a + b + c \\ c + (a + b + c - d - e) + t = a + b + c \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = b + c - d \\ z = a + b + c - d - e \\ y = a + c - e \\ t = -c + d + e \\ t = -c + d + e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b + c - d \\ y = a + c - e \\ z = a + b + c - d - e \\ t = -c + d + e \end{cases} .$$

Donc, B est faux et C est vrai. Ensuite, L est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & d & b+c-d \\ b & e & a+c-e \\ c & a+b+c-d-e & -c+d+e \end{pmatrix} = a(E_{1,1} + E_{2,3} + E_{3,2}) + b(E_{1,3} + E_{2,1} + E_{3,2}) + c(E_{1,3} + E_{2,3} + E_{3,1} + E_{3,2} - E_{3,3}) \\ + d(E_{1,2} - E_{1,3} - E_{3,2} + E_{3,3}) + e(E_{2,2} - E_{2,3} - E_{3,2} + E_{3,3}).$$

$\mathcal{M} = \text{Vect}(E_{1,1} + E_{2,3} + E_{3,2}, E_{1,3} + E_{2,1} + E_{3,2}, E_{1,3} + E_{2,3} + E_{3,1} + E_{3,2} - E_{3,3}, E_{1,2} - E_{1,3} - E_{3,2} + E_{3,3}, E_{2,2} - E_{2,3} - E_{3,2} + E_{3,3})$ . Donc,  $\mathcal{M}$  est un sous-espace de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  de dimension inférieure ou égale à 5.

Ensuite, si  $a(E_{1,1} + E_{2,3} + E_{3,2}) + b(E_{1,3} + E_{2,1} + E_{3,2}) + c(E_{1,3} + E_{2,3} + E_{3,1} + E_{3,2} - E_{3,3}) + d(E_{1,2} - E_{1,3} - E_{3,2} + E_{3,3}) + e(E_{2,2} - E_{2,3} - E_{3,2} + E_{3,3}) = 0$ , alors  $\begin{pmatrix} a & d & b+c-d \\ b & e & a+c-e \\ c & a+b+c-d-e & -c+d+e \end{pmatrix}$  est la matrice nulle puis  $a = b = c = d = e = 0$ . La famille  $(E_{1,1} + E_{2,3} + E_{3,2}, E_{1,3} + E_{2,1} + E_{3,2}, E_{1,3} + E_{2,3} + E_{3,1} + E_{3,2} - E_{3,3}, E_{1,2} - E_{1,3} - E_{3,2} + E_{3,3}, E_{2,2} - E_{2,3} - E_{3,2} + E_{3,3})$  est libre et est donc une base de  $\mathcal{M}$ .  $\mathcal{M}$  est de dimension 5. A est vrai et D est faux.

#### Question 4 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) VRAI
- D) FAUX

**Explication 4 :**  $AJ = \begin{pmatrix} L_1(A) & L_1(A) & L_1(A) \\ L_2(A) & L_2(A) & L_2(A) \\ L_3(A) & L_3(A) & L_3(A) \end{pmatrix}$  et  $JA = \begin{pmatrix} C_1(A) & C_2(A) & C_3(A) \\ C_1(A) & C_2(A) & C_3(A) \\ C_1(A) & C_2(A) & C_3(A) \end{pmatrix}$ .

Donc,  $AJ = JA \Leftrightarrow L_1(A) = L_2(A) = L_3(A) = C_1(A) = C_2(A) = C_3(A) \Leftrightarrow A \in \mathcal{M}$ . A est faux et B est vrai.

Si A est dans  $\mathcal{M}$ ,  $AJ = \begin{pmatrix} s(A) & s(A) & s(A) \\ s(A) & s(A) & s(A) \\ s(A) & s(A) & s(A) \end{pmatrix} = s(A)J$ . C est vrai et D est faux.

#### Question 5 :

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) FAUX

**Explication 5 :** Les coefficients de la ligne i de AB sont les  $\sum_{k=1}^3 a_{i,k}b_{k,j}$ ,  $1 \leq j \leq 3$ . Donc,

$$L_i(AB) = \sum_{j=1}^3 \left( \sum_{k=1}^3 a_{i,k}b_{k,j} \right) = \sum_{k=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 a_{i,k}b_{k,j} \right) = \sum_{k=1}^3 \left( a_{i,k} \sum_{j=1}^3 b_{k,j} \right) = \sum_{k=1}^3 a_{i,k}s(B) \\ = \left( \sum_{k=1}^3 a_{i,k} \right) s(B) = s(A)s(B).$$

De même,

$$C_j(AB) = \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{k=1}^3 a_{i,k}b_{k,j} \right) = \sum_{k=1}^3 \left( \sum_{i=1}^3 a_{i,k}b_{k,j} \right) = \sum_{k=1}^3 s(A)b_{k,j} = s(A)s(B).$$

Si  $(A, B) \in \mathcal{M}^2$ , alors  $AB \in \mathcal{M}$  et  $s(AB) = s(A)s(B)$ . A est vrai et B est faux.

Si C inversible,  $C \in \mathcal{M} \Leftrightarrow CJ = JC \Leftrightarrow C^{-1}CJ C^{-1} = C^{-1}J C C^{-1} \Leftrightarrow JC^{-1} = C^{-1}J \Leftrightarrow C^{-1} \in \mathcal{M}$ . Donc D est faux. Ensuite,  $S(C)S(C^{-1}) = S(CC^{-1}) = S(I) = 1$  et donc  $S(C^{-1}) = s(C)^{-1}$ . C est faux.

## Partie II

### Question 6 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) FAUX

**Explication 6 :**  $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+1} + x^{2n+3}}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}(1+x^2)}{1+x^2} dx = \int_0^1 x^{2n+1} dx = \frac{1}{2n+2}$ . Tout est faux.

### Question 7 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

**Explication 7 :** Pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ ,  $0 \leq x^2 \leq 1$  puis en multipliant par  $\frac{x^{2n+1}}{1+x^2} \geq 0$ , on obtient pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ ,  $0 \leq \frac{x^{2n+3}}{1+x^2} \leq \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}$ . Par positivité et croissance de l'intégration, on en déduit que  $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$ .

La suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée par 0. Donc, la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. A est faux et B est vrai.

C et D sont faux car les raisons invoquées n'ont rien à voir avec la conclusion (et de plus en D, pour  $x = 1$ ,  $\frac{x^{2n+1}}{1+x^2}$  ne tend pas vers 0)).

### Question 8 :

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) VRAI
- D) FAUX

**Explication 8 :**  $0 \leq I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n+1} dx = \frac{1}{2n+2}$ . B est vrai puis C est vrai car  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2} \leq \frac{1}{2n+1}$ .

A et D sont nécessairement faux. Vérifions le.  $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[ \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2} = 0,34\dots > \frac{1}{3} > \frac{1}{5}$ .

### Question 9 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

**Explication 9 :** Pour  $n \geq 1$ ,  $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (I_k + I_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} ((-1)^k I_k - (-1)^{k+1} I_{k+1}) = I_0 - (-1)^n I_n$  (somme télescopique). Donc,  $(-1)^n I_n = \frac{\ln 2}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (I_k + I_{k+1}) = \frac{\ln 2}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+2}$  puis

$$2(-1)^n I_n = \ln 2 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

A est faux, C est faux, mais D est vrai car  $2(-1)^{n-1}I_n = -\ln 2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$  puis B est faux.

**Question 10 :**

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) FAUX

**Explication 10 :** Une intégration par parties fournit

$$I_n = \int_0^1 x^{2n+1} \frac{1}{1+x^2} dx = \left[ \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)(1+x^2)} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \times \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx$$

$$= \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx.$$

A est vrai et le reste est faux.

**Question 11 :**

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

**Explication 11 :**  $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n+3} dx = \frac{1}{2n+4} \leq \frac{1}{2n+3}$ .

$I_n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  d'après la question 8, puis  $2(-1)^{n-1}I_n$  tend vers 0 (car  $|2(-1)^{n-1}I_n| = 2I_n$ ) et donc  $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$  tend vers  $\ln 2$  d'après la question 9. Donc,  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$ . A, B et C sont faux et D est vrai.

**Question 12 :**

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

**Explication 12 :**  $0 \leq \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx \leq \frac{1}{(n+1) \times (2n+4)} \leq \frac{1}{2n^2}$ . En particulier, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'après les questions 9 et 10,  $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 = 2(-1)^{n-1}I_n = 2(-1)^{n-1} \left( \frac{1}{4(n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = 2(-1)^{n-1} \left( \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \sim \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$ . Donc, B est vrai et A et D sont faux. Pour C,  $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} - \ln 2 = -\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 \sim -2\ln 2$  et donc C est faux.

## Partie III

### Question 13 :

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) FAUX

**Explication 13 :** On note  $C_n$  l'événement « on lance la pièce C au  $n$ -ème lancer » de probabilité  $p_n$  et donc  $\overline{C_n}$  l'événement « on lance la pièce D au  $n$ -ème lancer » de probabilité  $1 - p_n$ .

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p(C_{n+1}) = p(C_n) \times p_{C_n}(C_{n+1}) + p(\overline{C_n}) \times p_{\overline{C_n}}(C_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{1}{2} + (1 - p_n) \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

A est vrai et le reste est faux.

### Question 14 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) FAUX

**Explication 14 :**  $x = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$ .  $p_{n+1} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}p_n - \frac{1}{15} = \frac{1}{6}\left(p_n - \frac{2}{5}\right)$ . Puis, pour  $n \geq 1$ ,  $p_n = \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \left(p_1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ . C est vrai et A, B et D sont faux.

### Question 15 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) FAUX

**Explication 15 :**  $p(F_n) = p(C_n) \times p_{C_n}(F_n) + p(\overline{C_n}) \times p_{\overline{C_n}}(F_n) = \frac{1}{2}p_n + \frac{2}{3}(1 - p_n) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}p_n$  et donc

$$p(F_n) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \left( \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left( \frac{1}{6} \right)^n \right) = \frac{3}{5} - \frac{1}{10} \left( \frac{1}{6} \right)^{n+1}.$$

Tout est faux.

### Question 16 :

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) VRAI

**Explication 16 :**  $p_{n+1} = p(K_n) \times p_{K_n}(K_{n+1}) + p(A_n) \times p_{A_n}(K_{n+1}) + p(N_n) \times p_{N_n}(K_{n+1}) = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n$ .

De même,  $q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n$  et  $r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n$ .

Donc,  $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$  puis

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 45/100 \\ 25/100 \\ 30/100 \end{pmatrix},$$

ou aussi, en transposant,  $(p_n \ q_n \ r_n) = (45/100 \ 25/100 \ 30/100) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}^n$ .

C et D sont vrais et A, et B sont faux.

**Question 17 :**

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

**Explication 17 :** Deux matrices semblables ont même trace.  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{6} < 1$  et  $1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} > 1$ . Donc, C est faux.

De même,  $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$  et  $1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{4} < 1$ . Donc, A est faux.

On pose  $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  et  $Q = \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ .

$$PQ = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, P est inversible et  $Q = P^{-1}$ .

$$\begin{aligned} P \operatorname{diag} \left( 1, \frac{1}{12}, -\frac{1}{4} \right) P^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1/6 & 0 \\ 4 & -1/12 & -1/4 \\ 4 & -1/12 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = M. \end{aligned}$$

B est vrai.

$$\begin{aligned} P \operatorname{diag} \left( 1, \frac{1}{12}, \frac{1}{4} \right) P^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1/6 & 0 \\ 4 & -1/12 & 1/4 \\ 4 & -1/12 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bullet & 1/4 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D est faux.

**Question 18 :**

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) FAUX

**Explication 18 :**  $M^n = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/12)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1/4)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ .

Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $M^n$  tend vers

$$\begin{aligned} M_\infty &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/11 & 3/11 & 3/11 \\ 4/11 & 4/11 & 4/11 \\ 4/11 & 4/11 & 4/11 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

puis  $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$  tend vers

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/11 & 3/11 & 3/11 \\ 4/11 & 4/11 & 4/11 \\ 4/11 & 4/11 & 4/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 45/100 \\ 25/100 \\ 30/100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/11 \\ 4/11 \\ 4/11 \end{pmatrix}.$$

C est vrai et le reste est faux.

**Partie IV****Question 19 :**

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

**Explication 19 :**  $(xz - yt)^2 + (yz + xt)^2 = x^2z^2 + y^2t^2 + y^2z^2 + x^2t^2 = (x^2 + y^2)(z^2 + t^2)$ . Si maintenant,  $(a, b) \in S_2(A)$ , alors il existe  $(x, y, z, t) \in A^4$  tel que  $a = x^2 + y^2$  et  $b = z^2 + t^2$  et donc  $ab = (x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = (xz - yt)^2 + (yz + xt)^2$ . L'énoncé permet de supposer que  $+$  et  $\times$  sont des lois internes dans  $A$  et donc  $xz - yt$  et  $yz + xt$  sont dans  $A$  puis  $ab \in S_2(A)$ . D est vrai.

$(xz - yt)^2 + (yz - xt)^2 = x^2z^2 + y^2t^2 + y^2z^2 + x^2t^2 - 2xyzt \neq (x^2 + y^2)(z^2 + t^2)$ . A est faux.

$A$  n'a aucune raison d'être un sous-ensemble de  $\mathbb{C}$  et donc les modules n'ont pas de sens. B et C sont faux.

**Question 20 :**

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) FAUX

**Explication 20 :** ( $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  est au programme de maths spé et pas de maths sup).  $0^2 \equiv 0 [8]$  ou encore  $\overline{0}^2 = \overline{0}$ .  $\overline{1}^2 = \overline{1}$ ,  $\overline{2}^2 = \overline{4}$ ,  $\overline{3}^2 = \overline{1}$ ,  $\overline{4}^2 = \overline{0}$ ,  $\overline{5}^2 = \overline{1}$ ,  $\overline{6}^2 = \overline{4}$  et  $\overline{7}^2 = \overline{1}$ . Donc,  $S_1(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{4}\}$ . B et C sont faux.

$\overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$ ,  $\overline{0} + \overline{1} = \overline{1}$ ,  $\overline{0} + \overline{4} = \overline{4}$ ,  $\overline{1} + \overline{1} = \overline{2}$ ,  $\overline{1} + \overline{4} = \overline{5}$  et  $\overline{4} + \overline{4} = \overline{0}$ . Donc,  $S_2(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}\}$ .

Les éléments de  $S_3(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$  sont les sommes d'un élément de  $S_1(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$  et  $S_2(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ . On obtient  $S_3(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$ . A est vrai et D est faux.

**Question 21 :**

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

**Explication 21 :** Le carré d'un nombre pair est pair et le carré d'un nombre impair est impair.

$2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 \equiv 0 [8]$ . Donc, a, b, c et d peuvent être tous pairs. B et C sont faux.

Si un ou trois des nombres, a, b, c et d, sont impairs, alors un ou trois des nombres  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$  et  $d^2$ , sont impairs, puis  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  est impair et en particulier non divisible par 8.

Reste le cas où a et b sont impairs et c et d sont pairs.  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (2n + 1)^2 + (2m + 1)^2 + c^2 + d^2 = 4(n^2 + m^2) + 2 + c^2 + d^2 \equiv 0 + 2 + 0 + 0 [4]$ . Ainsi,  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv 2 [4]$  ou encore  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(2N + 1)$  et en particulier,  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \not\equiv 0 [8]$ . Finalement, a, b, c et d sont forcément pairs. D est vrai et A est faux.

**Question 22 :**

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

**Explication 22 :** D'après la question 20, un nombre congru à 7 modulo 3 ou encore à  $-1$  modulo 8 n'est pas la somme de trois carrés parfaits d'entiers. Donc, si  $n \equiv -1 [8]$ ,  $n \notin S_3(\mathbb{Z})$ . Donc, A et C sont faux.

Si  $n \in S_3(\mathbb{Q})$ , n est la somme de 3 carrés de rationnels, mis sous forme irréductible. On réduit ces carrés au même dénominateur puis on multiplie les deux membres de l'égalité par ce carré de dénominateur. On obtient une égalité du type  $nd^2 = a^2 + b^2 + c^2$  où a, b, c et d sont des entiers ce qui s'écrit  $a^2 + b^2 + c^2 - nd^2 = 0$ . On passe modulo 8 et on obtient  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv 0 [8]$ .

D'après la question précédente, a, b, c et d sont des entiers pairs ce qui contredit l'irréductibilité des trois rationnels de départ. Donc,  $n \notin S_3(\mathbb{Q})$ . B est vrai et D est faux.

**Question 23 :**

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

**Explication 23 :**  $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$  est dans  $S_3(\mathbb{Z})$  et donc dans  $S_3(\mathbb{Q})$ .  $5 = 2^2 + 1^2 + 0^2$  est dans  $S_3(\mathbb{Z})$ . Mais  $3 \times 5 = 15$  n'est ni dans  $S_3(\mathbb{Z})$  ni dans  $S_3(\mathbb{Q})$  car  $15 \equiv -1 [8]$ . Donc,  $S_3(\mathbb{Z})$  et  $S_3(\mathbb{Q})$  ne sont pas multiplicatifs. B est vrai et A, C et D sont faux.

## Partie V



**Question 24 :**

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) FAUX

**Explication 24 :**  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Donc, tout est faux.

**Question 25 :**

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) FAUX

**Explication 25 :** En développant suivant la première ligne, on a  $\det(P) = 1 \times 2 + 1 \times 0 = 2 \neq 0$  (D est faux). Donc, P est inversible.

$$\begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ u_2 = e_2 + e_3 \\ u_3 = e_1 + 2e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_2 = -e_3 + u_2 \\ e_1 = -2e_3 + u_3 \\ u_1 = (-2e_3 + u_3) + (-e_3 + u_2) + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_3 = \frac{1}{2}(-u_1 + u_2 + u_3) \\ e_2 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2 - u_3) \\ e_1 = u_1 - u_2 \end{cases}$$

Donc,  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ . A est vrai et B, C et D sont faux.

**Question 26 :**

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) VRAI

**Explication 26 :** P est inversible et donc  $(u_1, u_2, u_3)$  est une base de E. Mais aussi,  $(u_1, u_2, u_3)$  est génératrice de E, de cardinal 3 et donc est une base de E. C et D sont vraies. A et B sont fausses car les raisons invoquées sont fausses ou insuffisantes.

**Question 27 :**

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- d) FAUX

**Explication 27 :** Q est la matrice dans la base  $B'$  de la projection  $p_F$  sur  $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$  parallèlement à  $G = \text{Vect}(u_3)$  et  $Q'$  est la matrice dans la base  $B'$  de la projection  $p_G$  sur  $G = \text{Vect}(u_3)$  parallèlement à  $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ .

On sait que  $p_F^2 = p_F$ ,  $p_G^2 = p_G$ ,  $p_F p_G = p_G p_F = 0$  et  $p_F + p_G = \text{Id}_E$ . Donc, B est vrai et A, C et D sont faux.

**Question 28 :**

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

**Explication 28 :** On sait que  $F = \text{Im}(p_F) = \text{Ker}(p_G)$  et  $G = \text{Im}(p_G) = \text{Ker}(p_F)$  et de plus,  $\dim(F) = 2$  et  $\dim(G) = 1$ . D est vrai et A, B et C sont faux.

**Question 29 :**

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) FAUX

**Explication 29 :**  $Q' = P^{-1}A_G P$  et donc

$$A_G = PQ'P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$A_F = I_3 - A_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tout est faux.

**Partie VI**

**Question 30 :**

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

**Explication 30 :** En posant  $v = au$  et donc  $u = \frac{v}{a}$ ,  $du = \frac{dv}{a}$ ,  $\int_0^t \frac{1}{1+a^2u^2} du = \int_0^{at} \frac{1}{1+v^2} \frac{dv}{a} = \frac{1}{a} \text{Arctan}(at)$ . B est vrai et le reste est faux.

**Question 31 :**

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) VRAI
- D) FAUX

**Explication 31 :**  $x > 0$  puis  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\cos^2(t) + x \sin^2(t) > 0$  car les fonctions sinus et cosinus ne s'annulent pas simultanément. La fonction  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $t$  et tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $f(t + k\pi) = f(t)$ . On étudie et on construit le graphe de  $f$  sur un intervalle de longueur  $\pi$  comme  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ou aussi  $[0, \pi]$  puis on obtient la courbe complète par translations de vecteurs  $k\pi \vec{i}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f(-t) = f(t)$ .  $C_f$  est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On étudie et on construit sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  puis on complète par réflexion d'axe (Oy) puis translations de vecteurs  $k\pi \vec{i}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . B est vrai.

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f(\pi - t) = f(t)$ .  $C_f$  est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et aussi par rapport à la droite d'équation  $x = \frac{\pi}{2}$ . On étudie et on construit sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  puis on complète par réflexion d'axe la droite d'équation  $x = \frac{\pi}{2}$  puis translations de vecteurs  $k\pi \vec{i}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . C est vrai.

Les deux autres propositions ne fournissent pas la courbe complète.

**Question 32 :**

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

**Explication 32 :**  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $t$

$$f'(t) = -\frac{-2 \sin t \cos t + 2x \sin t \cos t}{(\cos^2 t + x \sin^2 t)^2} = \frac{2(1-x) \sin t \cos t}{(\cos^2 t + x \sin^2 t)^2}.$$

D est vrai et le reste est faux.

**Question 33 :**

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) VRAI

**Explication 33 :** • Si  $x = 1$ ,  $f'$  est nulle. Si  $x \neq 1$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f'(t) = (1-x) \frac{\sin(2t)}{(\cos^2 t + x \sin^2 t)^2}$ .

• Si  $0 < x < 1$ ,  $f'$  est strictement positive sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $f$  est strictement croissante sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , puis strictement décroissante sur  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  par symétrie.  $f$  admet un minimum sur  $[0, \pi]$  égal à  $f(0) = 1$  qui est encore minimum sur  $\mathbb{R}$  et un maximum égal à  $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{x}$ . D'autre part,  $f'$  s'annule en les  $\frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . En les points d'abscisses  $\frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $C_f$  admet une tangente parallèle à  $(Ox)$ .

• Si  $x > 1$ ,  $f$  admet un maximum sur  $\mathbb{R}$  égal à 1 et un minimum égal à  $\frac{1}{x}$  et en les points d'abscisses  $\frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $C_f$  admet une tangente parallèle à  $(Ox)$ . C et D sont vrais et A et B sont faux.

**Question 34 :**

- A) VRAI
- B) FAUX
- C) FAUX
- D) VRAI

**Explication 34 :**  $f$  est  $\pi$ -périodique et paire. Donc,

$$I = \int_0^\pi \frac{1}{\cos^2 t + x \sin^2 t} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 t + x \sin^2 t} dt = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 t + x \sin^2 t} dt.$$

A est vrai et B est faux. C est faux et D est vrai

**Question 35 :**

- A) FAUX
- B) VRAI
- C) FAUX
- D) FAUX

**Explication 35 :** Soit  $a \in [0, \frac{\pi}{2}[$ . On pose  $u = \tan t$  et donc  $du = \frac{dt}{\cos^2 t}$ .

$$H(a) = \int_0^a \frac{1}{1+x \tan^2 t} \times \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\tan(a)} \frac{1}{1+xu^2} du.$$

B est vrai et le reste est faux.

**Question 36 :**

- A) FAUX
- B) FAUX
- C) VRAI
- D) FAUX

**Explication 36 :** Pour  $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,

$$H(\alpha) = \int_0^{\tan(\alpha)} \frac{1}{1 + (\sqrt{x}u)^2} du = \left[ \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{x}u) \right]_0^{\tan(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{x} \tan(\alpha)).$$

A et B sont faux.

Quand  $x$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$  par valeurs inférieures,  $\sqrt{x} \tan(\alpha)$  tend vers  $+\infty$  puis  $H(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{x} \tan(\alpha))$  tend vers  $\frac{\pi}{2\sqrt{x}}$ . Par suite,

$$I = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 t + x \sin^2 t} dt = 2 \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} H(\alpha) = \frac{\pi}{\sqrt{x}}.$$

C est vrai et D est faux.