

## Planche n° 32. Séries numériques : corrigé

### Exercice n° 1 :

1) Soient  $a$  et  $b$  deux réels. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, deux intégrations par parties fournit

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) \, dt &= \left[ (at^2 + bt) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi (2at + b) \frac{\sin(nt)}{n} \, dt = \frac{1}{n} \int_0^\pi (2at + b)(-\sin(nt)) \, dt \\ &= \frac{1}{n} \left( \left[ (2at + b) \frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi 2a \cos(nt) \, dt \right) = \frac{1}{n^2} \left[ (2at + b) \frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{n^2} ((2a\pi + b)(-1)^n - b). \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) \, dt = \frac{1}{n^2} &\Leftrightarrow \forall n \geq 1, \frac{1}{n^2} ((2a\pi + b)(-1)^n - b) = \frac{1}{n^2} \\ &\Leftrightarrow \forall n \geq 1, (2a\pi + b)(-1)^n - b = 1 \\ &\Leftrightarrow b = -1 \text{ et } a = \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

$$\forall n \geq 1, \frac{1}{n^2} = \int_0^\pi \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) \, dt.$$

2) Pour  $n \geq 1$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) \, dt = \int_0^\pi \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) \sum_{k=1}^n \cos(kt) \, dt$ . Pour  $t \in ]0, \pi[$ , posons

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos(kt). \text{ Pour } t \in ]0, \pi[,$$

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) f_n(t) &= \sum_{k=1}^n 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos(kt) = \sum_{k=1}^n \left( \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)t\right) \right) \\ &= \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right) \text{ (somme télescopique)} \\ &= \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

Par suite, si  $t \in ]0, \pi[$  de sorte que  $2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$ ,  $f_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$  et d'autre part,  $f_n(0) = n$ .

3) Pour  $t \in ]0, \pi[$ ,  $\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) f_n(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)$ . Pour  $t \in ]0, \pi[$ , on pose alors

$g(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ . La fonction  $g$  est continue sur  $]0, \pi[$  et se prolonge par continuité en 0 en posant  $g(0) = -1$ . En notant

encore  $g$  le prolongement obtenu, pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt + \int_0^\pi g(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt.$$

Puisque la fonction  $g$  est continue sur le segment  $[0, \pi]$ , le lemme de LEBESGUE permet d'affirmer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt = 0 \text{ et donc}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt = -\frac{1}{2} \left[ \frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2} \right]_0^\pi = -\frac{1}{2} \left( \frac{\pi^3}{6\pi} - \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

### Exercice n° 2 :

1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .  $\int_0^1 t^{k-1} dt = \left[ \frac{t^k}{k} \right]_0^1 = \frac{1}{k}$ . Donc,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1} dt = \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^n (-t)^{k-1} \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1 - (-t)} dt \quad (\text{car } \forall t \in [0, 1], -t \neq 1) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = \ln 2 - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt. \end{aligned}$$

De plus,  $\left| (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$ .

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ , on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0$ . Mais alors, la suite des sommes partielles  $\left( \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)_{n \geq 1}$  converge ou encore la série de terme général  $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ,  $n \geq 1$ , converge et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.}$$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .  $\int_0^1 t^{2k} dt = \frac{1}{2k+1}$ . Donc,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{2k} dt = \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^n (-t)^k \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 - (-t^2)} dt \quad (\text{car } \forall t \in [0, 1], -t^2 \neq 1) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

De plus,  $\left| (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt \right| = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{2n+1}$ .

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ , on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt = 0$ . Mais alors, la suite des sommes partielles  $\left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right)_{n \geq 1}$  converge ou encore la série de terme général  $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ ,  $n \geq 0$ , converge et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.}$$

**Exercice n° 3 :** La suite  $(u_n)$  est strictement positive.

1) • Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n^{3/2} \times \frac{\ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ . D'après un théorème de croissances comparées,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$  et donc  $n^{3/2} \times \frac{\ln n}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$  ou encore  $\frac{\ln n}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ . Puisque  $\frac{3}{2} > 1$ , la série de terme général  $\frac{1}{n^{3/2}}$  converge et donc la série de terme général  $\frac{\ln n}{n^2}$  converge.

• Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \times \frac{1}{\sqrt{n} \ln^2 n} = \frac{\sqrt{n}}{\ln^2 n}$ . D'après un théorème de croissances comparées,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln^2 n} = 0$  et donc  $\frac{1}{\sqrt{n} \ln^2 n}$  est prépondérant devant  $\frac{1}{n}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Puisque la série de terme général  $\frac{1}{n}$  diverge, la série de terme général  $\frac{1}{\sqrt{n} \ln^2 n}$  diverge.

2) Si  $\alpha < 0$ , on peut écrire  $u_n = \frac{n^{-\alpha}}{\ln^\beta n}$  avec  $-\alpha > 0$ . D'après un théorème de croissance comparées,  $u_n$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et donc la série de terme général  $u_n$ ,  $n \geq 2$ , diverge grossièrement.

3) On suppose que  $0 \leq \alpha < 1$ .  $n \times \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} = \frac{n^{1-\alpha}}{\ln^\beta n}$  avec  $1 - \alpha > 0$ . D'après un théorème de croissances comparées, pour tout réel  $\beta$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} = +\infty$ . Par suite,  $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$  est prépondérant devant  $\frac{1}{n}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et donc la série de terme général  $u_n$ ,  $n \geq 2$ , diverge.

4) On suppose que  $\alpha > 1$ .  $n^{(\alpha+1)/2} \times \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} = \frac{1}{n^{(\alpha-1)/2} \ln^\beta n}$  avec  $\frac{\alpha-1}{2} > 0$ . D'après un théorème de croissances comparées, pour tout réel  $\beta$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{(\alpha-1)/2} \ln^\beta n} = 0$ . Donc,  $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)$ . Puisque  $\frac{\alpha+1}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$ , la série de terme général  $\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}$  converge et donc la série de terme général  $u_n$  converge.

5) Dans cette question, pour tout  $n \geq 2$ ,  $u_n = \frac{1}{n \ln^\beta n}$ .

a) Si  $\beta < 0$ ,  $u_n = \frac{\ln^{-\beta} n}{n}$  avec  $-\beta > 0$ . Dans ce cas,  $u_n$  est prépondérant devant  $\frac{1}{n}$  en  $+\infty$ . Si  $\beta = 0$ ,  $u_n = \frac{1}{n}$ . Dans tous les cas, si  $\beta \leq 0$ , la série de terme général  $u_n$  diverge.

b) • Soit  $\beta > 1$ . Vérifions que la série de terme général  $u_n$  converge. Puisque la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est positive, on sait que la série de terme général  $u_n$ ,  $n \geq 2$ , converge si et seulement si la suite des sommes partielles  $\left(\sum_{k=2}^n u_k\right)_{n \geq 2}$  est majorée.

La fonction  $t \mapsto t \ln^\beta t$  est strictement croissante sur  $]1, +\infty[$  en tant que produit de fonctions strictement positives et strictement croissantes sur  $]1, +\infty[$ . Donc, la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t \ln^\beta t}$  est strictement décroissante sur  $]1, +\infty[$  en tant qu'inverse de fonction strictement positive et strictement croissante sur  $]1, +\infty[$ .

On en déduit que pour  $n \geq 3$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln^\beta k} &= \frac{1}{2 \ln^\beta 2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln^\beta k} \\ &\leq \frac{1}{2 \ln^\beta 2} + \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{t \ln^\beta t} dt = \frac{1}{2 \ln^\beta 2} + \int_2^n \frac{1}{t \ln^\beta t} dt \\ &= \frac{1}{2 \ln^\beta 2} + \left[ -\frac{1}{(\beta-1) \ln^{\beta-1} t} \right]_2^n = \frac{1}{2 \ln^\beta 2} + \frac{1}{(\beta-1) \ln^{\beta-1} 2} - \frac{1}{(\beta-1) \ln^{\beta-1} n} \\ &\leq \frac{1}{2 \ln^\beta 2} + \frac{1}{(\beta-1) \ln^{\beta-1} 2} \quad (\text{car } \beta - 1 > 0). \end{aligned}$$

Ainsi, si  $\beta > 1$ , la suite des sommes partielles  $\left(\sum_{k=2}^n u_k\right)_{n \geq 2}$  est majorée et donc la série de terme général  $u_n$  converge.

- Vérifions que la série de terme général  $\frac{1}{n \ln n}$  diverge. Par décroissance de la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$  sur  $]1, +\infty[$ , pour  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} &\geq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t} dt = \int_2^{n+1} \frac{1}{t \ln t} dt \\ &= [\ln |\ln t|]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2). \end{aligned}$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)) = +\infty$ , on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} = +\infty$  ou encore que la série de terme général  $\frac{1}{n \ln n}$ ,  $n \geq 2$ , diverge.

Enfin, si  $\beta < 1$ ,  $\frac{1}{n \ln^\beta n}$  est prépondérant devant  $\frac{1}{n \ln n}$  en  $+\infty$  car  $\frac{1/n \ln^\beta n}{1/n \ln n} = \ln^{1-\beta} n$  et donc  $\frac{1/n \ln^\beta n}{1/n \ln n}$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  car  $1 - \beta > 0$ . On en déduit que la série de terme général  $\frac{1}{n \ln^\beta n}$ ,  $n \geq 2$ , diverge.

En résumé, la série de terme général  $\frac{1}{n \ln^\beta n}$ ,  $n \geq 2$ , converge si et seulement si  $\beta > 1$ .

#### Exercice n° 4 :

1) Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \ln \left( \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1} \right)$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_n$  existe. De plus

$$\begin{aligned} u_n &= \ln \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left( \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - \left( \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Comme la série de terme général  $\frac{1}{n^2}$ ,  $n \geq 1$ , converge (série de RIEMANN d'exposant  $\alpha > 1$ ), la série de terme général  $u_n$  converge.

2) Pour  $n \geq 2$ , on pose  $u_n = \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$ .  $\forall n \geq 2$ ,  $u_n$  existe et de plus  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ . Comme la série de terme général  $\frac{1}{n}$ ,  $n \geq 2$ , diverge et est positive, la série de terme général  $u_n$  diverge.

3) Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \left( \frac{n+3}{2n+1} \right)^{\ln n}$ . Pour  $n \geq 1$ ,  $u_n$  existe et  $u_n > 0$ .

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= \ln(n) \ln \left( \frac{n+3}{2n+1} \right) = \ln(n) \left( \ln \left( \frac{1}{2} \right) + \ln \left( 1 + \frac{3}{n} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) \left( -\ln 2 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\ln 2 \ln(n) + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\ln 2 \ln(n) + o(1). \end{aligned}$$

Donc  $u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\ln 2 \ln n} = \frac{1}{n^{\ln 2}}$ . Comme la série de terme général  $\frac{1}{n^{\ln 2}}$ ,  $n \geq 1$ , diverge (série de RIEMANN d'exposant  $\alpha \leq 1$ ) et est à termes positifs, la série de terme général  $u_n$  diverge.

4) Pour  $n \geq 2$ , on pose  $u_n = \frac{1}{\ln(n) \ln(\text{ch } n)}$ .  $u_n$  existe pour  $n \geq 2$ .  $\ln(\text{ch } n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln \left( \frac{e^n}{2} \right) = n - \ln 2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$  puis  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln(n)} > 0$ .

Vérifions alors que la série de terme général  $\frac{1}{n \ln n}$ ,  $n \geq 2$ , diverge. La fonction  $x \rightarrow x \ln x$  est continue, croissante et strictement positive sur  $]1, +\infty[$  (produit de deux fonctions positives et croissantes sur  $]1, +\infty[$ ). Par suite, la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{x \ln x}$  est continue et décroissante sur  $]1, +\infty[$  et pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 2,

$$\frac{1}{k \ln k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx$$

Par suite, pour  $n \geq 2$ ,

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \geq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_2^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

On en déduit que la série de terme général  $u_n$  diverge.

5) Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \operatorname{Arccos} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^2}}$ .  $u_n$  existe pour  $n \geq 1$  car pour  $n \geq 1$ ,  $\sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^2}} \in [-1, 1]$ . De plus  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . On en déduit que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sin(u_n) = \sin\left(\operatorname{Arccos} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^2}}\right) = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{2/3}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\equiv} \sqrt{1 - 1 + \frac{2}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \\ \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{n} > 0$$

qui est le terme général d'une série de RIEMANN divergente. Donc la série de terme général  $u_n$  diverge.

6) Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \frac{n^2}{(n-1)!}$ . Pour  $n \geq 1$

$$n^2 u_n = n^2 \times \frac{n^3}{n!} = \frac{n^5}{n!}.$$

D'après un théorème de croissances comparées,  $n^2 u_n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ou encore  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\equiv} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . On en déduit que la série de terme général  $u_n$  converge.

7) Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$ .  $u_n$  est défini pour  $n \geq 1$  car pour  $n \geq 1$ ,  $\frac{1}{\sqrt{n}} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  et donc  $\cos \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ . Ensuite

$$\ln\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\equiv} \ln\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\equiv} -\frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \underset{n \rightarrow +\infty}{\equiv} -\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Puis  $n \ln\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\equiv} -\frac{1}{2} - \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  et donc

$$u_n = e^{n \ln(\cos(1/\sqrt{n}))} - \frac{1}{\sqrt{e}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\equiv} \frac{1}{\sqrt{e}} \left(e^{-\frac{1}{2} + o(\frac{1}{n})} - 1\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{12n\sqrt{e}} < 0.$$

La série de terme général  $-\frac{1}{12n\sqrt{e}}$  est divergente et donc la série de terme général  $u_n$  diverge.

8)

$$\ln\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\right) \\ \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi} \frac{n}{n^2+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{n\pi} < 0.$$

Donc, la série de terme général  $u_n$  diverge.

9) Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{n^2 + \cos^2 x} dx$ .

Pour  $n \geq 1$ , la fonction  $x \mapsto \frac{\cos^2 x}{n^2 + \cos^2 x}$  est continue sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et positive et donc,  $u_n$  existe et est positif. De plus, pour  $n \geq 1$ ,

$$0 \leq u_n \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{n^2 + 0} dx = \frac{\pi}{2n^2}.$$

La série de terme général  $\frac{\pi}{2n^2}$  converge et donc la série de terme général  $u_n$  converge.

$$\begin{aligned} 10) \quad -\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) &= -\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ puis} \\ &-\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) \ln n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln(n) + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln(n) + o(1). \end{aligned}$$

Par suite,

$$0 < u_n = e^{-\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) \ln n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\ln n} = \frac{1}{n}.$$

La série de terme général  $\frac{1}{n}$  diverge et la série de terme général  $u_n$  diverge.

$$11) \quad n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et donc}$$

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e - e^{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e \left(1 - 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{2n} > 0.$$

La série de terme général  $\frac{e}{2n}$  diverge et la série de terme général  $u_n$  diverge.

### Exercice n° 5

1) Si  $P$  n'est pas un polynôme unitaire de degré 3,  $u_n$  ne tend pas vers 0 et la série de terme général  $u_n$  diverge grossièrement.

Soit  $P$  un polynôme unitaire de degré 3. Posons  $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ .

$$\begin{aligned} u_n &= n \left( \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{1/4} - \left(1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3}\right)^{1/3} \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \left( \left(1 + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1 + \frac{a}{3n} + \frac{b}{3n^2} - \frac{a^2}{9n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{a}{3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{3} + \frac{a^2}{9}\right) \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

- Si  $a \neq 0$ ,  $u_n$  ne tend pas vers 0 et la série de terme général  $u_n$  diverge grossièrement.
- Si  $a = 0$  et  $\frac{1}{2} - \frac{b}{3} \neq 0$ ,  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{3}\right) \frac{1}{n}$ .  $u_n$  est donc de signe constant pour  $n$  grand et est équivalent au terme général d'une série divergente. Donc la série de terme général  $u_n$  diverge.
- Si  $a = 0$  et  $\frac{1}{2} - \frac{b}{3} = 0$ ,  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Dans ce cas, la série de terme général  $u_n$  converge (absolument).

En résumé, la série de terme général  $u_n$  converge si et seulement si  $a = 0$  et  $b = \frac{3}{2}$  ou encore la série de terme général  $u_n$  converge si et seulement si  $P$  est de la forme  $X^3 + \frac{3}{2}X + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

2) Pour  $n \geq 2$ , posons  $u_n = \frac{1}{n^\alpha} S(n)$ . Pour  $n \geq 2$ ,

$$0 < S(n+1) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p} \times \frac{1}{p^n} \leq \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{2} S(n)$$

et donc  $\forall n \geq 2$ ,  $S(n) \leq \frac{S(2)}{2^{n-2}}$ . Par suite,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^\alpha} \frac{S(2)}{2^{n-2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Pour tout réel  $\alpha$ , la série de terme général  $u_n$  converge.

3)  $\forall u_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$ . Par suite,  $\forall n \geq 2, 0 < u_n < \frac{1}{n}$ .

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  et par suite  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} > 0$ . La série de terme général  $u_n$  diverge.

4)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$ . Donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\tan(u_n)}{1 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^a} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^a}{2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{2a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par suite, la série de terme général  $u_n$  converge si et seulement si  $a = 0$ .

5) La fonction  $x \mapsto x^{3/2}$  est continue et croissante sur  $\mathbb{R}^+$ . Donc pour  $k \geq 1$ ,  $\int_{k-1}^k x^{3/2} dx \leq k^{3/2} \leq \int_k^{k+1} x^{3/2} dx$  puis pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\int_0^n x^{3/2} dx = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k x^{3/2} dx \leq \sum_{k=1}^n k^{3/2} \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} x^{3/2} dx = \int_1^{n+1} x^{3/2} dx$$

ce qui fournit

$$\frac{2}{5}n^{5/2} \leq \sum_{k=1}^n k^{3/2} \leq \frac{2}{5}((n+1)^{5/2} - 1) \text{ et donc } \sum_{k=1}^n k^{3/2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n^{5/2}}{5}.$$

Donc  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{5} \times \frac{1}{n^{\alpha - \frac{3}{2}}} > 0$ . La série de terme général  $u_n$  converge si et seulement si  $\alpha > \frac{7}{2}$ .

### Exercice n° 6

1)  $\frac{n+1}{3^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Par suite, la série de terme général  $\frac{n+1}{3^n}$  converge.

1er calcul. Soit  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$ . Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}S &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\ &= (S-1) - \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = S - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit que  $S = \frac{9}{4}$ .

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} = \frac{9}{4}}$$

2ème calcul. Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^k.$$

Par suite, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^k = f'_n(x) = \left( \frac{x^n - 1}{x - 1} \right)'(x) = \frac{nx^{n-1}(x-1) - (x^n - 1)}{(x-1)^2} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(x-1)^2}.$$

Pour  $x = \frac{1}{3}$ , on obtient  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{3^k} = \frac{\frac{n-1}{3^n} - \frac{n}{3^{n-1}} + 1}{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2}$  et quand  $n$  tend vers l'infini, on obtient de nouveau  $S = \frac{9}{4}$ .

2) Pour  $k \geq 3$ ,  $\frac{2k-1}{k^3-4k} = \frac{3}{8(k-2)} + \frac{1}{4k} - \frac{5}{8(k+2)}$ . Puis

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n \frac{2k-1}{k^3-4k} &= \frac{3}{8} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k-2} + \frac{1}{4} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \frac{5}{8} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k+2} = \frac{3}{8} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{1}{4} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \frac{5}{8} \sum_{k=5}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{3}{8} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{4} \left( -1 - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \frac{5}{8} \left( -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) + o(1) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{3}{8} + \frac{5}{8} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + o(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{3}{8} + \frac{125}{96} + o(1) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{89}{96} + o(1). \end{aligned}$$

La série proposée est donc convergente de somme  $\frac{89}{96}$ .

$$\boxed{\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n} = \frac{89}{96}.}$$

3) Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \frac{n^2}{(n-1)!}$ . Pour  $n \geq 3$

$$u_n = \frac{(n-1)(n-2) + 3n - 3 + 1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-3)!} + 3 \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}.$$

Les séries de termes généraux respectifs  $\frac{1}{(n-3)!}$ ,  $\frac{1}{(n-2)!}$  et  $\frac{1}{(n-1)!}$  convergent et donc la série de terme général  $u_n$  converge. De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} &= 1 + 4 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} = 5 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 3 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} \\ &= 5 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 5 + e + 3(e-1) + e - 2 = 5e. \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} = 5e.}$$

4)

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{\sqrt{k-1}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{2}{\sqrt{k}} \right) &= \sum_{k=2}^n \left( \left( \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) - \left( \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \right) \\ &= \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \text{ (somme télescopique)} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + o(1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.}$$



5) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $S_n = \sum_{k=2}^n \ln \left( 1 + \frac{(-1)^k}{k} \right)$ . Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} S_{2p+1} &= \sum_{k=2}^{2p+1} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^k}{k} \right) = \sum_{k=1}^p \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{2k} \right) + \ln \left( 1 - \frac{1}{2k+1} \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^p (\ln(2k+1) - \ln(2k) + \ln(2k) - \ln(2k+1)) = 0. \end{aligned}$$

D'autre part,  $S_{2p} = S_{2p+1} - \ln \left( 1 + \frac{(-1)^{2p+1}}{2p+1} \right) = \ln \left( 1 - \frac{1}{2p+1} \right)$ . Mais alors les suites  $(S_{2p})_{p \in \mathbb{N}^*}$  et  $(S_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}^*}$  convergent et ont mêmes limites, à savoir 0. On en déduit que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge ou encore la série de terme général  $\ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ ,  $n \geq 2$ , converge et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 0.$$

6) Si  $a \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  alors, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{a}{2^n} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et donc  $\cos \left( \frac{a}{2^n} \right) > 0$ .

Ensuite,  $\ln \left( \cos \left( \frac{a}{2^n} \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln \left( 1 + O \left( \frac{1}{2^{2n}} \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} O \left( \frac{1}{2^{2n}} \right)$  et la série converge. Ensuite,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \ln \left( \cos \left( \frac{a}{2^k} \right) \right) &= \ln \left( \prod_{k=0}^n \cos \left( \frac{a}{2^k} \right) \right) = \ln \left( \prod_{k=0}^n \frac{\sin \left( 2 \times \frac{a}{2^k} \right)}{2 \sin \left( \frac{a}{2^k} \right)} \right) = \ln \left( \frac{1}{2^{n+1}} \prod_{k=0}^n \frac{\sin \left( \frac{a}{2^{k-1}} \right)}{\sin \left( \frac{a}{2^k} \right)} \right) \\ &= \ln \left( \frac{\sin(2a)}{2^{n+1} \sin \left( \frac{a}{2^n} \right)} \right) \text{ (produit télescopique)} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln \left( \frac{\sin(2a)}{2^{n+1} \times \frac{a}{2^n}} \right) = \ln \left( \frac{\sin(2a)}{2a} \right). \end{aligned}$$

$$\forall a \in ]0, \frac{\pi}{2}[, \sum_{n=0}^{+\infty} \ln \left( \cos \left( \frac{a}{2^n} \right) \right) = \ln \left( \frac{\sin(2a)}{2a} \right).$$

7) Vérifions que pour tout réel  $x$  on a  $\operatorname{th}(2x) = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4} \left( (e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2 \right) = \frac{1}{2} (e^{2x} + e^{-2x}) = \operatorname{ch}(2x)$$

et

$$2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) (e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2} (e^{2x} - e^{-2x}) = \operatorname{sh}(2x)$$

puis, en multipliant numérateur et dénominateur par le réel non nul  $\operatorname{ch}^2 x$ ,

$$\frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x} = \frac{2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{ch}(2x)} = \operatorname{th}(2x).$$

Par suite, pour  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\frac{2}{\operatorname{th}(2x)} = \frac{1 + \operatorname{th}^2 x}{\operatorname{th} x}$  puis  $\operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x}$ . Mais alors, pour  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \operatorname{th} \left( \frac{a}{2^k} \right) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \left( \frac{2}{\operatorname{th} \frac{a}{2^{k-1}}} - \frac{1}{\operatorname{th} \frac{a}{2^k}} \right) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{2^{k-1} \operatorname{th} \frac{a}{2^{k-1}}} - \frac{1}{2^k \operatorname{th} \frac{a}{2^k}} \right) \\ &= \frac{2}{\operatorname{th}(2a)} - \frac{1}{2^n \operatorname{th} \frac{a}{2^n}} \text{ (somme télescopique)} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{2}{\operatorname{th}(2a)} - \frac{1}{a}, \end{aligned}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{th}\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{2}{\operatorname{th}(2a)} - \frac{1}{a}.$$

**Exercice n° 7 :**

Il faut vérifier que  $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\begin{aligned} 0 < (2n)u_{2n} &= 2(\underbrace{u_{2n} + \dots + u_{2n}}_n) \leq 2 \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \quad (\text{car la suite } u \text{ est décroissante}) \\ &= 2(S_{2n} - S_n). \end{aligned}$$

Puisque la série de terme général  $u_n$  converge,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2(S_{2n} - S_n) = 0$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n)u_{2n} = 0$ .

Ensuite,  $0 < (2n+1)u_{2n+1} \leq (2n+1)u_{2n} = (2n)u_{2n} + u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Donc les suites des termes de rangs pairs et impairs extraites de la suite  $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent et ont même limite à savoir 0. On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 0$  ou encore que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Contre exemple avec  $u$  non monotone. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré parfait non nul} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

La suite  $u$  est positive et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} < +\infty$ . Pourtant,  $p^2 u_{p^2} = 1 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$  et donc la suite  $(nu_n)$  admet une suite extraite convergent vers 1. On a donc pas  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 0$ .

**Exercice n° 8 :**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $u_n = (n+1)! \left( e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{k!} \\ &= 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} + \sum_{k=n+6}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots k}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } 0 < \sum_{k=n+6}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots k} \leq \sum_{k=n+6}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{k-(n+1)}} = \frac{1}{(n+2)^5} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+2)^4(n+1)} \leq \frac{1}{n^5}.$$

On en déduit que  $\sum_{k=n+6}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^4}\right)$ . Donc

$$\begin{aligned} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} & 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \\ \underset{n \rightarrow +\infty}{=} & 1 + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^3} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \\ \underset{n \rightarrow +\infty}{=} & 1 + \frac{1}{n} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{8}{n^3}\right) + \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}\right) \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{9}{n^2}\right) + \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) \left(1 - \frac{4}{n}\right) \\ & + \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \\ \underset{n \rightarrow +\infty}{=} & 1 + \frac{1}{n} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{8}{n^3}\right) + \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{19}{n^2}\right) + \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{9}{n}\right) + \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \\ \underset{n \rightarrow +\infty}{=} & 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right). \end{aligned}$$

Finalement

$$(n+1)! \left( e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

**Exercice n° 9 :**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $u_n = \sin\left(\pi\left(2 + \sqrt{3}\right)^n\right)$ . D'après la formule du binôme de NEWTON,  $\left(2 + \sqrt{3}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{3}$  où  $A_n$  et  $B_n$  sont des entiers naturels. Un calcul conjugué fournit aussi  $\left(2 - \sqrt{3}\right)^n = A_n - B_n\sqrt{3}$ . Par suite,  $\left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \left(2 - \sqrt{3}\right)^n = 2A_n$  est un entier pair. Par suite, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = \sin\left(2A_n\pi - \pi\left(2 - \sqrt{3}\right)^n\right) = -\sin\left(\pi\left(2 - \sqrt{3}\right)^n\right).$$

Mais  $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$  et donc  $\left(2 - \sqrt{3}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ . On en déduit que  $|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \pi\left(2 - \sqrt{3}\right)^n$  terme général d'une série géométrique convergente. Donc la série de terme général  $u_n$  converge.

**Exercice n° 10 :**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\left(\sqrt{u_n} - \frac{1}{n}\right)^2 \geq 0$  et donc  $0 \leq \frac{\sqrt{u_n}}{n} \leq \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{n^2}\right)$ . Comme la série terme général  $\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{n^2}\right)$  converge, la série de terme général  $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$  converge.

**Exercice n° 11 :**

Pour  $n \geq 2$ ,  $v_n = \frac{u_n + 1 - 1}{(1 + u_1) \dots (1 + u_n)} = \frac{1}{(1 + u_1) \dots (1 + u_{n-1})} - \frac{1}{(1 + u_1) \dots (1 + u_n)}$  et d'autre part  $v_1 = 1 - \frac{1}{1 + u_1}$ .  
Donc, pour  $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^n v_k = 1 - \frac{1}{(1 + u_1) \dots (1 + u_n)} \text{ (somme télescopique).}$$

Si la série de terme général  $u_n$  converge alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  et donc  $0 < u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(1 + u_n)$ . Donc la série de terme général  $\ln(1 + u_n)$  converge ou encore la suite  $\left(\ln\left(\prod_{k=1}^n (1 + u_k)\right)\right)_{n \geq 1}$  converge vers un certain réel  $\ell$ . Mais alors la suite

$\left(\prod_{k=1}^n (1 + u_k)\right)_{n \geq 1}$  converge vers le réel strictement positif  $P = e^\ell$ . Dans ce cas, la suite  $\left(\sum_{k=1}^n v_k\right)_{n \geq 1}$  converge vers  $1 - \frac{1}{P}$ .

Si la série de terme général  $u_n$  diverge alors la série de terme général  $\ln(1 + u_n)$  diverge vers  $+\infty$  et il en est de même que la suite  $\left(\prod_{k=1}^n (1 + u_k)\right)_{n \geq 1}$ . Dans ce cas, la suite  $\left(\sum_{k=1}^n v_k\right)_{n \geq 1}$  converge vers 1.

**Exercice n° 12 :**

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} 2n^3 - 3n^2 + 1 &= 2(n+3)(n+2)(n+1) - 15n^2 - 22n - 11 = 2(n+3)(n+2)(n+1) - 15(n+3)(n+2) + 53n + 79 \\ &= 2(n+3)(n+2)(n+1) - 15(n+3)(n+2) + 53(n+3) - 80 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{2}{n!} - \frac{15}{(n+1)!} + \frac{53}{(n+2)!} - \frac{80}{(n+3)!} \right) = 2e - 15(e-1) + 53(e-2) - 80\left(e - \frac{5}{2}\right) \\ &= -40e + 109. \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!} = -40e + 109.$$

2) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_{n+1} = \frac{n+1}{a+n+1}u_n$ . Par suite  $(n+a+1)u_{n+1} = (n+1)u_n = (n+a)u_n + (1-a)u_n$  puis

$$(1-a) \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n ((k+a+1)u_{k+1} - (k+a)u_k) = (n+a+1)u_{n+1} - (a+1)u_1 = (n+a+1)u_{n+1} - 1.$$

Si  $a = 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{1}{n+1}$ . Dans ce cas, la série diverge.

Si  $a \neq 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{1-a}((n+a+1)u_{n+1} - 1) = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a-1}(a+n+1)u_{n+1}$ .

Si  $a > 1$ , la suite  $u$  est strictement positive et la suite des sommes partielles  $(S_n)$  est majorée par  $\frac{1}{a-1}$ . Donc la série de terme général  $u_n$  converge. Il en est de même de la suite  $((a+n+1)u_{n+1})$ . Soit  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a+n+1)u_{n+1}$ .

Si  $\ell \neq 0$ ,  $u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell}{n+a+1}$  contredisant la convergence de la série de terme général  $u_n$ . Donc  $\ell = 0$  et

$$\forall a > 1, \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{a-1}.$$

Si  $0 < a < 1$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \geq \frac{1 \times 2 \times \dots \times n}{2 \times 3 \times \dots \times (n+1)} = \frac{1}{n+1}$ . Dans ce cas, la série diverge.

### Exercice n° 13 :

Pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $0 < \frac{1}{2^p n^{p-1}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2n)^p} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^p} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}}$  et la série de terme général  $u_n$  converge si et seulement si  $p > 2$ .

### Exercice n° 14 :

La série de terme général  $\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ ,  $n \geq 1$ , est absolument convergente et donc convergente.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) - 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) \\ &= \left(1 - \frac{2}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) = \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} &= 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) = \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

### Exercice n° 15 :

1) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ . Puisque la série de terme général  $\frac{1}{k^2}$ ,  $k \geq 1$ , converge, la suite  $(R_n)$  est définie et tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

2) Pour tout entier  $k \geq 2$ ,

$$\frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(k-1)k}.$$

Soient  $n$  un entier naturel non nul puis  $N$  un entier supérieur ou égal à  $n+1$ . En sommant membre à membre les inégalités précédentes, on obtient

$$\sum_{k=n+1}^N \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^N \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right),$$

ou encore  $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$ . Quand  $N$  tend vers  $+\infty$ ,  $n$  étant fixé, on obtient

$$\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}.$$

Le théorème des gendarmes montre alors que  $nR_n$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ou encore  $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$  ou enfin

$$R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

3) Soient  $n$  un entier naturel non nul puis  $N$  un entier naturel supérieur ou égal à  $n+1$ .

$$\sum_{k=n+1}^N \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{N} \text{ (somme télescopique).}$$

Quand  $N$  tend vers  $+\infty$ ,  $n$  étant fixé, on obtient  $\frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$ . Par suite, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$\begin{aligned} R_n - \frac{1}{n} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(k-1)} \right) \\ &= - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)}. \end{aligned}$$

Pour tout  $k \geq 2$ , on a

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} \leq \frac{1}{k^2(k-1)} \leq \frac{1}{(k-2)(k-1)k}$$

et donc

$$\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{(k-1)k(k+1)} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2(k-1)} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{(k-2)(k-1)k}$$

Ensuite,  $\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^N \left( \frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{N(N+1)} \right)$  et  $\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{(k-2)(k-1)k} =$

$\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^N \left( \frac{1}{(k-2)(k-1)} - \frac{1}{(k-1)k} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{(N-1)N} \right)$  et donc

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{N(N+1)} \right) \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2(k-1)} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{(N-1)N} \right).$$

Quand  $N$  tend vers  $+\infty$ ,  $n$  étant fixé, on obtient  $\frac{1}{2n(n+1)} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)} \leq \frac{1}{2(n-1)n}$  puis

$$-\frac{1}{2(n-1)n} \leq R_n - \frac{1}{n} \leq -\frac{1}{2n(n+1)}.$$

Le théorème des gendarmes montre que  $-2n^2 \left( R_n - \frac{1}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1 + o(1)$  ou encore

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

**Exercice n° 16 :**

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{p\}$ ,  $\frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{1}{2p} \left( \frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p} \right)$ . Donc pour  $N > p$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq n \leq N, n \neq p} \frac{1}{n^2 - p^2} &= \frac{1}{2p} \sum_{1 \leq n \leq N, n \neq p} \left( \frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p} \right) = \frac{1}{2p} \left( \sum_{1-p \leq k \leq N-p, k \neq 0} \frac{1}{k} - \sum_{p+1 \leq k \leq N+p, k \neq 2p} \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{2p} \left( -\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N+p} \frac{1}{k} + \frac{1}{2p} + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2p} \left( \frac{3}{2p} - \sum_{k=N-p+1}^{N+p} \frac{1}{k} \right) \end{aligned}$$

Maintenant,  $\sum_{k=N-p+1}^{N+p} \frac{1}{k} = \frac{1}{N-p+1} + \dots + \frac{1}{N+p}$  est une somme de  $2p$  termes tendant vers 0 quand  $N$  tend vers  $+\infty$ .

Puisque  $2p$  est constant quand  $N$  varie,  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=N-p+1}^{N+p} \frac{1}{k} = 0$  et donc

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*, n \neq p} \frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{1}{2p} \times \frac{3}{2p} = \frac{3}{4p^2} \text{ puis } \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}^*, n \neq p} \frac{1}{n^2 - p^2} \right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{3}{4p^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  donné, on a aussi  $\sum_{p \in \mathbb{N}^*, p \neq n} \frac{1}{n^2 - p^2} = -\sum_{p \in \mathbb{N}^*, p \neq n} \frac{1}{p^2 - n^2} = -\frac{3}{4n^2}$  et donc

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left( \sum_{p \in \mathbb{N}^*, p \neq n} \frac{1}{n^2 - p^2} \right) = -\frac{\pi^2}{8}.$$

Ainsi, les deux sommes existent et ne sont pas égales ou encore  $\sum_n \sum_p \neq \sum_p \sum_n$ .

**Exercice n° 17 :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt - \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{2k} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt - \int_0^1 \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 - (-t^2)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

Par suite, pour  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{n=0}^N u_n = \int_0^1 \sum_{n=0}^N \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt = \int_0^1 (-t^2) \frac{1 - (-t^2)^{N+1}}{(1+t^2)^2} dt = -\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2} dt.$$

Or  $\left| (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2} dt \right| = \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2} dt \leq \int_0^1 t^{2N+2} dt = \frac{1}{2N+3}$ . Comme  $\frac{1}{2N+3}$  tend vers 0 quand  $N$  tend vers  $+\infty$ , il en est de même de  $(-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2} dt$ . On en déduit que la série de terme général  $u_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge et de plus

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= -\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \int_0^1 \frac{t}{2} \times \frac{-2t}{(1+t^2)^2} dt \\ &= \left[ \frac{t}{2} \times \frac{1}{1+t^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}.$$

**Exercice n° 18 :**

1) On sait qu'il existe une infinité de nombres premiers. Notons  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite strictement croissante des nombres premiers. La suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite strictement croissante d'entiers et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = +\infty$  ou encore  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p_n} = 0$ .

Par suite,  $0 < \frac{1}{p_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln \left( \left( 1 - \frac{1}{p_n} \right)^{-1} \right)$  et les séries de termes généraux  $\frac{1}{p_n}$  et  $\ln \left( \left( 1 - \frac{1}{p_n} \right)^{-1} \right)$  sont de même nature.

Il reste donc à étudier la nature de la série de terme général  $\ln \left( \left( 1 - \frac{1}{p_n} \right)^{-1} \right)$ .

2) Montrons que  $\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left( \left( 1 - \frac{1}{p_n} \right)^{-1} \right) \geq \ln \left( \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \right)$ .

Soit  $n \geq 1$ . Alors  $\frac{1}{p_n} < 1$  et la série de terme général  $\frac{1}{p_n^k}, k \in \mathbb{N}$ , est une série géométrique convergente de somme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^k} = \left( 1 - \frac{1}{p_n} \right)^{-1}.$$

Soit alors  $N$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $p_1 < p_2 \dots < p_n$  la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à  $N$ .

Tout entier entre 1 et  $N$  s'écrit de manière unique  $p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$  où  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i = E \left( \frac{\ln(N)}{\ln(p_i)} \right)$  et deux entiers distincts ont des décompositions distinctes. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \ln \left( \left( 1 - \frac{1}{p_k} \right)^{-1} \right) &\geq \sum_{k=1}^n \ln \left( \left( 1 - \frac{1}{p_k} \right)^{-1} \right) \quad (\text{car } \forall k \in \mathbb{N}^*, \left( 1 - \frac{1}{p_k} \right)^{-1} > 1) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^i} \right) \geq \sum_{k=1}^n \ln \left( \sum_{i=0}^{\alpha_k} \frac{1}{p_k^i} \right) \\ &= \ln \left( \prod_{k=1}^n \left( \sum_{i=0}^{\alpha_k} \frac{1}{p_k^i} \right) \right) = \ln \left( \sum_{0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1, \dots, 0 \leq \beta_n \leq \alpha_n} \frac{1}{p_1^{\beta_1} \dots p_n^{\beta_n}} \right) \\ &\geq \ln \left( \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \right). \end{aligned}$$

Cette inégalité est vraie pour tout entier naturel non nul  $N$ . Puisque  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \ln \left( \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \right) = +\infty$ , quand  $N$  tend vers  $+\infty$ ,

on obtient  $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln \left( \left( 1 - \frac{1}{p_k} \right)^{-1} \right) \geq +\infty$  et donc  $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln \left( \left( 1 - \frac{1}{p_k} \right)^{-1} \right) = +\infty$ .

La série de terme général  $\ln \left( 1 - \frac{1}{p_k} \right)^{-1}$  diverge et il en est de même de la série de terme général  $\frac{1}{p_n}$ .

(Ceci montre qu'il y a beaucoup de nombres premiers et en tout cas beaucoup plus de nombres premiers que de carrés parfaits par exemple).