Planche n° 3. Ensembles. Relations. Applications

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (*T)

Soient E et F deux ensembles. Montrer que $\mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F) \Leftrightarrow E = F$.

Exercice n° 2 (T)**

A et B sont des parties d'un ensemble E. Montrer que :

1) $(A\Delta B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B = \varnothing)$.

2) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

3) $A\Delta B = B\Delta A$.

4) $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

5) $A\Delta B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$.

6) $A\Delta C = B\Delta C \Leftrightarrow A = B$.

Exercice n° 3 (IT)**

Soit $\mathscr{R}$ la relation définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x\mathscr{R}y \Leftrightarrow xe^y = ye^x.$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. Pour chaque réel x, préciser le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de x.

Exercice n° 4 (***)

Soit P l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive. On définit sur P la relation $\mathscr{R}$ par

$$\forall (z, z') \in P^2,\ z\mathscr{R}z' \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}/\ z' = \frac{z\cos\theta + \sin\theta}{-z\sin\theta + \cos\theta}.$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur P.

Exercice n° 5 (IT)**

Soit E un ensemble. Montrer que la relation d'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(E)$. Cette relation d'ordre est-elle partielle ou totale ?

Exercice n° 6 (*IT)**

Dans chacun des cas suivants, déterminer $f(I)$ puis vérifier que f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$ puis préciser f^{-1} :

1) $f(x) = x^2 - 4x + 3,\ I =]-\infty, 2]$.

2) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2},\ I =]-2, +\infty[$.

3) $f(x) = \sqrt{2x+3} - 1,\ I = \left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$.

4) $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|},\ I = \mathbb{R}$.

Exercice n° 7 (*IT)**

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on pose $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$. Montrer que f réalise une bijection de $D = \{z \in \mathbb{C}/\ |z| < 1\}$ sur $P = \{z \in \mathbb{C}/\ \mathrm{Re}(z) < 0\}$. Préciser f^{-1}.

Exercice n° 8 (*IT)**

Soient E un ensemble puis A une partie de E. Pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, on pose $\varphi_A(X) = X \cap A$ et $\psi_A(X) = X \cup A$. Montrer que

1) φ_A injective $\Leftrightarrow$ φ_A surjective $\Leftrightarrow A = E$.

2) ψ_A injective $\Leftrightarrow$ ψ_A surjective $\Leftrightarrow A = \varnothing$.

Exercice n° 9 (*IT)

Soient f une application d'un ensemble E vers un ensemble F et g une application de F vers un ensemble G.
Montrer que : ($g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective) et ($g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective).

Exercice n° 10 (I)**

Soit f une application d'un ensemble non vide E dans lui-même telle que $f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice n° 11 (**)

Parmi $f \circ g \circ h$, $g \circ h \circ f$ et $h \circ f \circ g$ deux sont injectives et une est surjective. Montrer que f, g et h sont bijectives.

Exercice n° 12 (*IT)**

f est une application d'un ensemble E dans lui-même. Montrer que :

1) a) f est injective $\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{P}(E),\ f^{-1}(f(X)) = X$.
b) f est injective $\Leftrightarrow \forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2,\ f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

2) f est surjective $\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{P}(E),\ f\left(f^{-1}(X)\right) = X$.

Exercice n° 13 (*I) Théorème de Cantor :**

1) Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathscr{P}(E)$.

2) En considérant la partie $A = \{x \in E / \ x \notin f(x)\}$, montrer qu'il n'existe pas de bijection f de E sur $\mathcal{P}(E)$.

Exercice n° 14 (****) (Une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$)

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (x; y) & \mapsto & y + \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} \end{array}$. Montrer que f est une bijection. Préciser, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, le couple (x, y) dont il est l'image.

